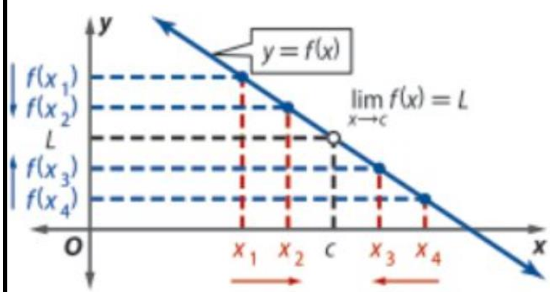
1 تقدير النهاية عند نقطة

يتمحور حساب التفاضل والتكامل حول مسألتين مهمتين:

- إيجاد معادلة المماس بتمثيل بياني لدالة عند نقطة
- إيجاد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور x.

يلزم لحل هاتين المسألتين استيعاب مفهوم النهاية. تذكر أنه إذا كانت $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة L عندما يقترب x من c من طرف واحد، فإن النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c تكون عبارة عن L، وتُكتب على صورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

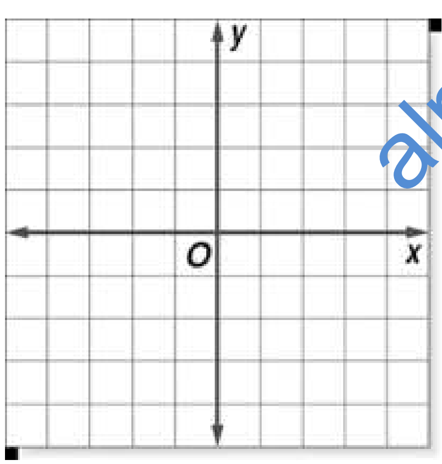


يُمكنك تطبيق هذا الوصف لتقدير نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة ثابتة لـ c أو $\lim_{x \to c} f(x)$ باستخدام تمثيل بياني أو إنشاء جدول بالقيم.

تمرين موجه 1 تقدير النهاية عندما النهاية $= f(c)$

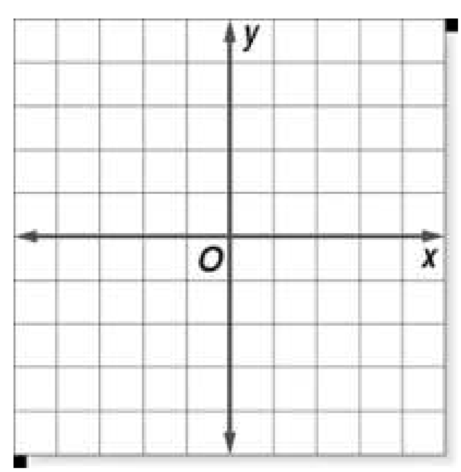
قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

1A. $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$



x							
F(x)							

1B. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$



x							
F(x)							

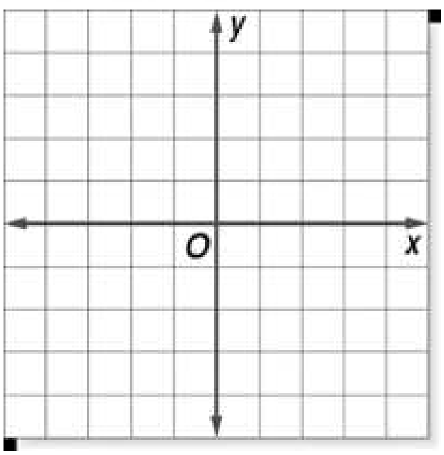
تصرف كما لو أنه من المستحيل أن تفشل.

ورقة عمل 33

تمرين موجه 2	تقدير النهاية عندما النهاية $\neq f(c)$

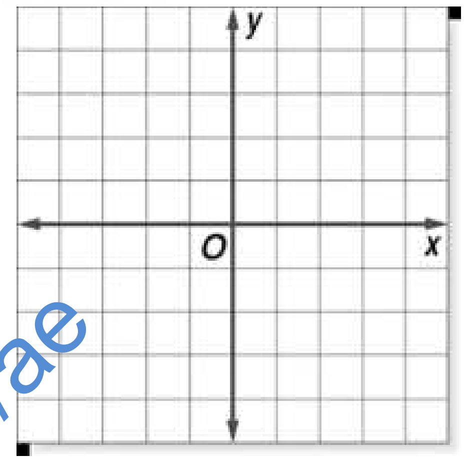
قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

2A. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$



x							
F(x)							

2B. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$

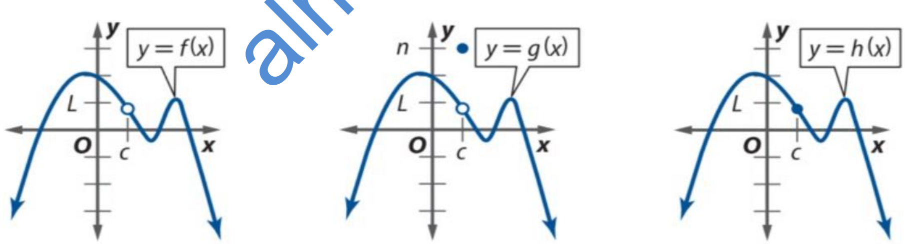


x							
F(x)							

المفهوم الأساسي استقلالية النهاية عن قيمة الدالة عند نقطة ما

الشرح لا تعتمد نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c.

الرموز



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ — $f(c)$ غير معرفة.

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ — $g(c) = n$

$\lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ — $h(c) = L$

المفهوم الأساسي النهايات أحادية الطرف

نهاية من الجهة اليمنى

إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 عندما يقترب x من c من اليمين، فإن

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_2$، وتُقرأ

النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليمين تساوي L_2

نهاية من الجهة اليسرى

إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 عندما يقترب x من c من اليسار، فإن

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_1$، وتُقرأ

النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليسار تساوي L_1.

تقدير النهايات بيانياً

2018-..........-..........

ورقة عمل 34

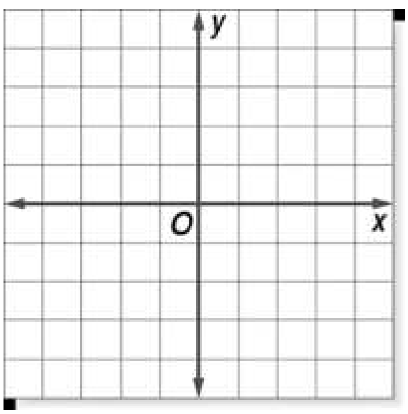
المفهوم الأساسي وجود نهاية عند نقطة

لا تكون نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c موجودة إلا إذا كان هناك نهايتان أحاديتا الطرف ومتساويتين. بمعنى أنه إذا كان $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$ ، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

تمرين موجه 3 — تقدير النهايات أحادية الطرف وثنائية الطرف

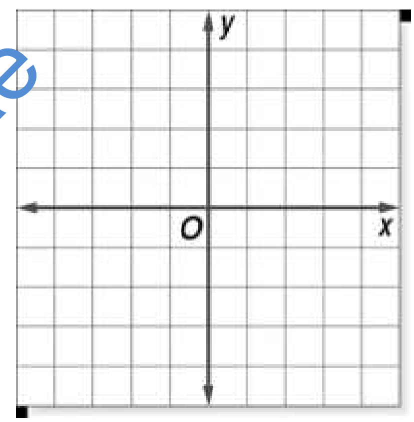
3A. $\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 1} f(x),$:

حيث
$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , x < -2 \\ x^2 & , x \geq -2 \end{cases}$$



3B. $\lim_{x\to -2^-} g(x), \lim_{x\to -2^+} g(x), \lim_{x\to -2} g(x),$

حيث
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , x < 1 \\ 2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$



....

....

....

تمرين موجه 4 — النهايات والسلوك غير المحدود

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

4A. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$ ....

....

....

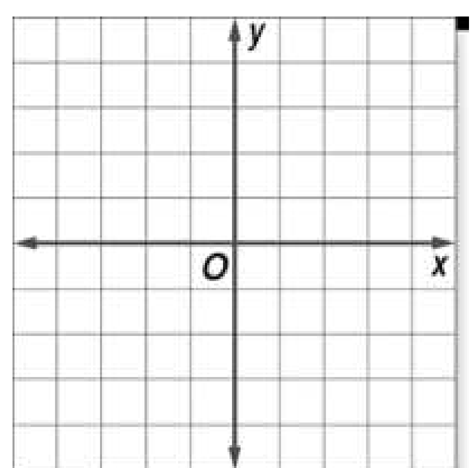
....

....

....

x								
F(x)								

....



الوحدة : 12 — تقدير النهايات بيانياً — 2018-...........-..........

الدرس : 1

ورقة عمل 35

تمرين موجه 4	النهايات والسلوك غير المحدود

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

4B. $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{2}{x^4}$ ....

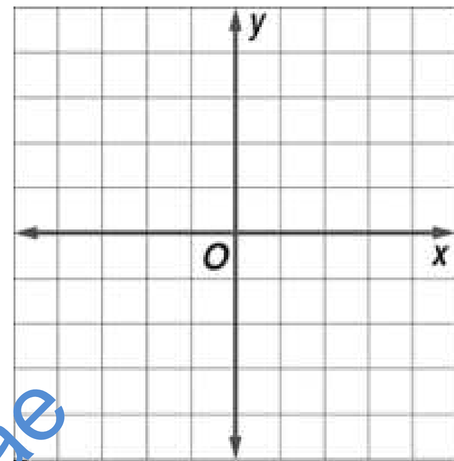
....

....

....

....

....



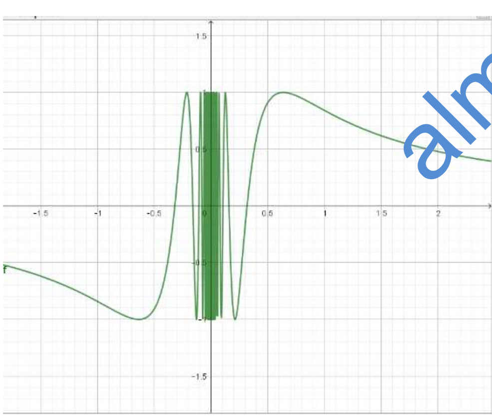
x								
F(x)								

....

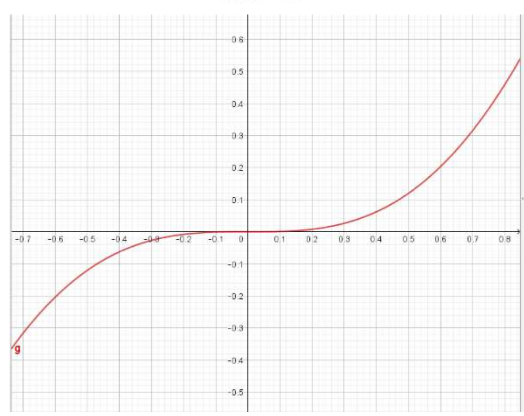
تمرين موجه 5	النهايات والسلوك المتذبذب

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

5A. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$



5B. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \sin x)$



المفهوم الأساسي السبب في عدم وجود نهايات عند نقطة ما

تكون نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c غير موجودة إذا كان:

نهاية $f(x)$ من اليسار ومن اليمين لــ C من قيم مختلفة

- قيم $f(x)$ تزداد أو تقل دون نهاية من اليسار و/أو اليمين بالنسبة إلى c
- قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين محددتين.

تقدير النهايات بيانياً

2018-..........-..........

ورقة عمل 36

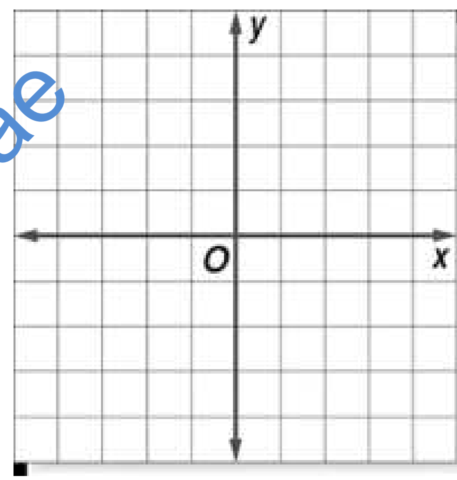
المفهوم الأساسي النهايات عند اللانهاية

- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 حيث x تزداد، فإن $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$، وتُقرأ نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من اللانهاية تساوي L_1.
- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 حيث x تقل، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$، وتُقرأ نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من اللانهاية السالبة تساوي L_2.

تمرين موجه 6	تقدير النهايات عند اللا نهاية

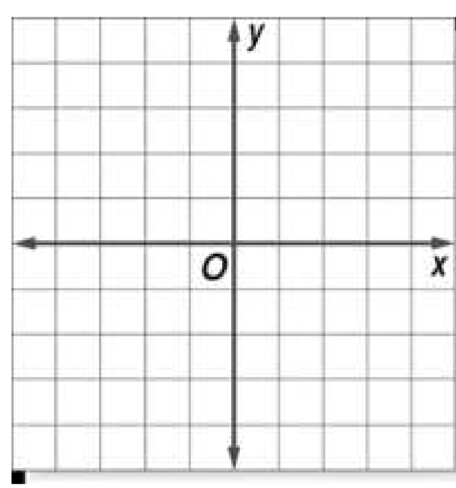
قدّر كل نهاية، إن وجدت.

6A. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^4} - 3\right)$ ....



x								
F(x)								

6B. $\lim_{x \to -\infty} e^x$



x								
F(x)								

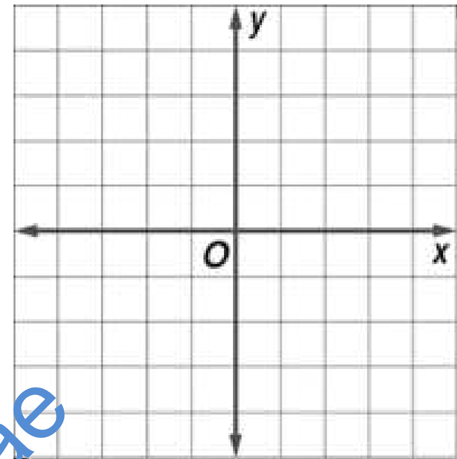
الوحدة : 12 تقدير النهايات بيانياً 2018-..........-..........

الدرس : 1 ورقة عمل 37

تمرين موجه 6	تقدير النهايات عند اللا نهاية

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

6C. $\lim_{x \to \infty} \sin x$



.. ..

....

....

....

....

....

x							
F(x)							

....

ملاحظات:

....

....

....

....

....

الوحدة : 12

إيجاد قيمة النهايات جبرياً

2018-..........-..........

الدرس : 2

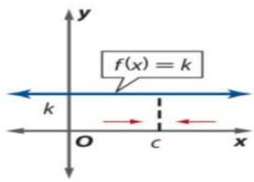
ورقة عمل 38

المفهوم الأساسي نهاية الدوال

نهاية الدوال الثابتة

الشرح نهاية دالة ثابتة عند أي نقطة c تساوي قيمة الثابت الخاص بالدالة.

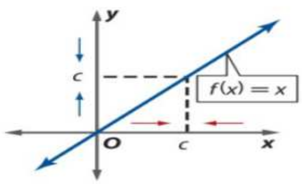
الرموز $\lim_{x\to c} k = k$



نهاية الدالة المحايدة

الشرح نهاية الدالة المحايدة عند أي نقطة c تساوي c.

الرموز $\lim_{x\to c} x = c$



المفهوم الأساسي خواص النهايات

إذا كان k و c أعدادًا حقيقية، وn هو عدد صحيح موجب، و $\lim_{x\to c}$، $\lim_{x\to c}$ موجودتان، فإن العبارة التالية صحيحة.

خاصية المجموع $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الفرق $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الضرب في كمية عددية $\lim_{x\to c}[k f(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$

خاصية ناتج الضرب $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية ناتج القسمة $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$، إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة $\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

خاصية الجذر النوني $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ حيث n هو عدد زوجي.

تمرين موجه 1	استخدام خواص النهايات

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

1A. $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$ **1B.** $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$ **1C.** $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$

....

....

....

....

....

....

....

....

إيجاد قيمة النهايات جبرياً

2018-..........-.........

ورقة عمل 39

نصيحة دراسية

الدوال حسنة الأداء تُعد الدوال المتصلة مثل الدوال كثيرة الحدود *حسنة الأداء*، وذلك لأنه يُمكن إيجاد نهايات هذه الدوال عند أي نقطة باستخدام التعويض المباشر. وكذلك يُمكن إيجاد نهايات الدوال التي لا تدخل ضمن الدوال حسنة الأداء باستخدام هذه الطريقة، طالما كانت الدالة متصلة عند قيمة المجال ذي الصلة.

المفهوم الأساسي **نهايات الدوال**

نهايات الدوال كثيرة الحدود

إذا كانت $p(x)$ هي دالة كثيرة الحدود، و c هو عدد حقيقي، فإن $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ هي دالة نسبية، و c هو عدد حقيقي، فإن $\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$ إذا كان $q(c) \neq 0$.

بشكل أبسط، يُمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود باستخدام **التعويض المباشر** طالما أن قيمة مقام الدالة النسبية عند c لا يساوي 0.

تمرين موجه 2 — استخدام خواص النهايات

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

2A. $\lim_{x \to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ **2B.** $\lim_{x \to -5} \frac{x+1}{x^2+3}$ **2C.** $\lim_{x \to -8} \sqrt{x+6}$

....
....
....
....
....

إذا أوجدت قيمة نهاية دالة نسبية وتوصلت إلى النموذج المُبهم $\frac{0}{0}$، فينبغي لك محاولة تبسيط التعبير جبريًا من خلال تحليل العامل المشترك إلى العوامل الأولية وقسمته.

تمرين موجه 3 — استخدام التحليل إلى العوامل

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

3A. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x+2}$ **3B.** $\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$

....
....
....
....
....

الوحدة : 12 | إيجاد قيمة النهايات جبرياً | 2018-..........-..........

الدرس : 2

ورقة عمل 40

تمرين موجه 4	استخدام الإنطاق

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

4B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ **4A.** $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

....

....

....

....

....

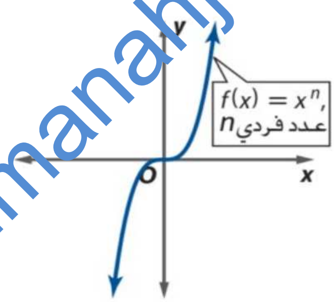
2 حساب النهايات عند اللانهاية

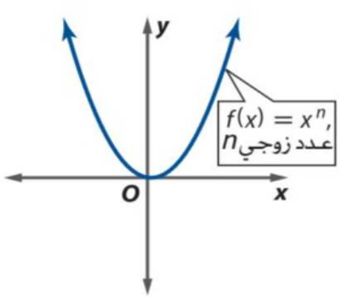
لقد تعلمت أن جميع دوال القوى زوجية الدرجة لديها نفس السلوك الطرفي، وأن جميع دوال القوى فردية الدرجة لديها نفس السلوك الطرفي. ويُمكن وصف ذلك بدلالة النهايات كما هو موضح أدناه.

المفهوم الأساسي نهايات دوال القوة عند اللانهاية

لأي عدد صحيح موجب n،

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددًا فرديًا.





المفهوم الأساسي نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

افترض أن p هي دالة كثيرة الحدود. فإن $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$ and $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n$

يُمكنك استخدام هذه الخواص لإيجاد قيمة نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية. تذكر أن رمز نهاية الدالة على ∞ أو $-\infty$ هو غير موجود، ولا يشير إلى أن النهاية موجودة لكنها تصف بدلاً من ذلك سلوك الدالة سواء متزايدة أم متناقصة دون نهاية، على التوالي.

نصيحة دراسية

نواتج الضرب في اللانهاية بما أن نهاية ∞ تعني أن قيم الدالة تزداد بشكل كبير تجاه الأعداد الموجبة، فإن ضرب هذه الأعداد في ثابت موجب لا يغير هذا التوجه. إلا أن ضرب نهاية ∞ في ثابت سالب يغير إشارة جميع المخرجات بسبب هذا الرمز. إذًا، $-\infty = -1(\infty)$.

إيجاد قيمة النهايات جبرياً

2018-..........-..........

ورقة عمل 41

تمرين موجه 5	نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

أوجد قيمة كل نهاية.

5A. $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$ **5B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ **5C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي نهايات الدوال العكسية عند اللانهاية

الشرح نهاية الدالة العكسية عند اللانهاية الموجبة أو السالبة تساوي 0.

الرموز $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

النتيجة بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n، $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

تمرين موجه 6	نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

6A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x-10}$ 6B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7}{5x+1}$ 6C. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

....

....

....

....

....

....

....

الوحدة : 12 إيجاد قيمة النهايات جبرياً 2018-..........-..........

الدرس : 2 ورقة عمل 42

تمرين موجه 7 نهايات المتتاليات

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم أوجد نهاية المتتالية، إن وجدت.

7A. $a_n = \dfrac{4}{n^2+1}$

....

....

....

....

....

....

7B. $b_n = \dfrac{2n^3}{3n+8}$

....

....

....

....

....

....

7C. $c_n = \dfrac{9}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

....

....

....

....

....

....

2018-..........-.......... المماسات والسرعة المتجهة الوحدة : 12

الدرس : 3

ورقة عمل 43

المفهوم الأساسي معدل التغير اللحظي

يكون معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني لـ $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو الميل m للمماس عند $(x, f(x))$ الذي يُمكن إيجاده باستخدام $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$، بشرط وجود النهاية.

تمرين موجه 1 ميل تمثيل بياني عند نقطة ما

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة لكل دالة عند النقطة المذكورة.

1A. $y = x^2$; $(3, 9)$

....

....

....

....

....

....

....

....

1B. $y = x^2 + 4$; $(-2, 8)$

....

....

....

....

....

....

....

....

-2018 ....-..........

الوحدة : 12 المماسات والسرعة المتجهة

الدرس : 3

ورقة عمل 44

تمرين موجه 2	ميل تمثيل بياني عند أي نقطة

أوجد معادلة لميل منحنى الدالة m لكل دالة عند أي نقطة.

2A. $y = x^2 - 4x + 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

2B. $y = x^3$

....

....

....

....

....

....

....

....

2 السرعة اللحظية

قمت بحساب متوسط سرعة جسم ساقط عبر قسمة المسافة التي قطعها على الوقت الذي استغرقه الجسم ليقطع هذه المسافة. السرعة المتجهة هي السرعة مضاف إليها اتجاه البعد. يمكنك حساب متوسط السرعة المتجهة باستخدام نفس النهج الذي استخدمته عند حساب متوسط السرعة.

المفهوم الأساسي متوسط السرعة

إذا تم ذكر الوضع في صورة دالة للزمن $f(t)$، فإنه لأي نقطتين زمنيتين a و b، يتم إيجاد متوسط السرعة v عبر

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

تمرين موجه 3	متوسط سرعة جسم ما

3. **بالون ماء** يتم قذف بالون ماء لأعلى بشكل مستقيم باستخدام جهاز إطلاق. يمكن تحديد ارتفاع البالون بالأمتار t بعد إطلاقه بثوانٍ عن طريق $d(t) = 2 + 20t - 5t^2$. ماذا كان متوسط سرعة البالون بين t يساوي 1 و 2؟

....
....
....
....
....
....
....
....

المفهوم الأساسي السرعة اللحظية

إذا تم ذكر المسافة التي يقطعها جسم ما في صورة دالة زمنية $f(t)$، إذًا يتم إيجاد السرعة اللحظية $v(t)$ عند الوقت t باستخدام

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط وجود النهاية.

تمرين موجه 4	السرعة اللحظية عند نقطة ما

4. أسقط أحد عمال غسل النوافذ غداءه دون قصد من المنصة التي يعمل عليها على ارتفاع 420 قدمًا فوق سطح الأرض. يُمكن كتابة العلاقة بين موقع الغداء وسطح الأرض في صورة $d(t) = 4000 - 5t^2$، حيث تتم كتابة الزمن t بالثواني وموقع الغداء بالأمتار. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ للغداء عند 7 ثوانٍ.

....
....
....
....
....
....
....
....

المماسات والسرعة المتجهة

ورقة عمل 46

تمرين موجه 5	السرعة اللحظية عند أي نقطة

5. يتم إيجاد المسافة بالأمتار لصاروخ مائي من الأرض بعد t ثانية من خلال $s(t) = 30t - 5t^2$. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للصاروخ المائي عند أي نقطة زمنية t.

....

....

....

....

....

....

....

....

ملاحظات :

....

....

....

....

....

ورقة عمل 47

1 قواعد أساسية استخدمت النهايات لتحديد ميل خط المماس على التمثيل البياني لدالة عند أي نقطة. وتُسمى هذه النهاية مشتقة الدالة. **مشتقة** $f(x)$ هي $f'(x)$، والتي تُعطى بالمعادلة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

بشرط وجود النهاية. وتُسمى عملية إيجاد المشتقات **تفاضل**، وتُسمى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

تمرين موجه 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x)$. ثم أوجد قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة.

1A. $f(x) = 6x^2 + 7; x = 2$ و 5

....
....
....
....
....
....
....
....
....

1B. $f(x) = -5x^2 + 2x - 12; x = 1$ و 4

....
....
....
....
....
....
....
....
....

ورقة عمل 48

مشتقة الدالة $y = f(x)$ قد يُرمز إليها أيضًا بـ y' أو $\frac{df}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}$. إذا كانت الدالة مسبوقة **بعامل تفاضلي** $\frac{d}{dx}$، فيجب عليك إذًا إيجاد مشتقة الدالة.

المفهوم الأساسي قاعدة القوى للمشتقات

الشرح القوة لـ x في المشتقة تقل بواحد عن القوة لـ x في الدالة الأصلية، ومعامل القوة لـ x في المشتقة هو نفسه القوة لـ x في الدالة الأصلية.

الرموز إذا كانت $f(x) = x^n$ وكان n عددًا حقيقيًا، فإذًا $f'(x) = nx^{n-1}$.

تمرين موجه 2	قاعدة القوى للمشتقات	**أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.**

2A. $j(x) = x^4$ **2B.** $k(x) = \sqrt{x^3}$ **2C.** $m(x) = \frac{1}{x^5}$

....

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي قواعد اشتقاق أخرى

الثابت مشتقة الدالة الثابتة هي صفر. بمعنى، إذا كانت $f(x) = c$، فإذًا $f'(x) = 0$.

المضاعف الثابت للقوة إذا كانت $f(x) = cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.

المجموع أو الفرق إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

تمرين موجه 3	قواعد الاشتقاق	**أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.**

3A. $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$

....

....

....

....

....

....

ورقة عمل 49

تمرين موجه 3	قواعد الاشتقاق	**أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.**

3B. $g(x) = 3x^4(x + 2)$

....

....

....

....

....

....

....

3C. $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

....

....

....

....

....

....

....

تمرين موجه 4	السرعة اللحظية

4. كرة قدم رُكلت للأعلى مباشرة. ارتفاع الكرة تحدده المعادلة $h(t) = 18t - 5t^2$، حيث الزمن t يُعطى بالثواني وارتفاع الكرة يُعطى بالمتر. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للكرة عند أي نقطة في الزمن.

....

....

....

....

....

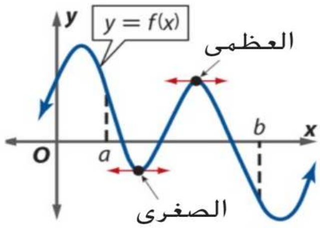
....

....

ورقة عمل 50

المفهوم الأساسي نظرية القيم القصوى

إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$، فإن $f(x)$ تحقق القيمة العظمى والصغرى على $[a, b]$.



القيم القصوى النسبية تحدث فقط عند *نقاط* حرجة حيث يكون ميل المماس،أما مشتقة الدالة تساوي 0 أو غير مُعرَّف. لتحديد مكان القيمة العظمى والصغرى لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $[a, b]$، أوجد قيمة الدالة عند a و b وعند أي قيم لـــ x في الفترة $[a, b]$ التي يكون فيها $f'(x) = 0$.

تمرين موجه 5	القيم العظمى و الصغرى

5. القفز بالحبال يمكن تمثيل ارتفاع h القَفّاز بالحبال بالنسبة للأرض، بالمتر، بواسطة المعادلة $h(t) = 6t^2 - 48t + 100$ على الفترة $[0, 6]$ حيث يُعطى الزمن t بالثواني. أوجد أعلى وأقل ارتفاع للقَفّاز.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للمشتقات

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند x، فإذًا $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

الوحدة : 12 المشتقات ....-..........-2018

الدرس : 4 ورقة عمل 51

تمرين موجه 6	قاعدة ناتج الضرب	أوجد مشتقة كل ناتج ضرب مما يلي.

6A. $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

....

....

....

....

....

....

....

6B. $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

....

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج القسمة للمشتقات

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند x و $g(x) \neq 0$، فإذًا $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

الوحدة : 12

المشتقات

2018-..........-.........

الدرس : 4

ورقة عمل 52

تمرين موجه 7	قاعدة ناتج القسمة	**أوجد مشتقة كل ناتج قسمة مما يلي.**

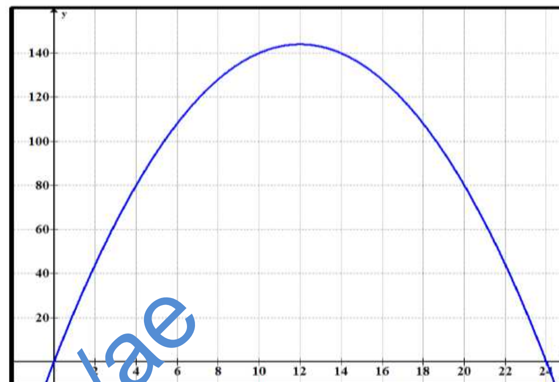
7A. $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$

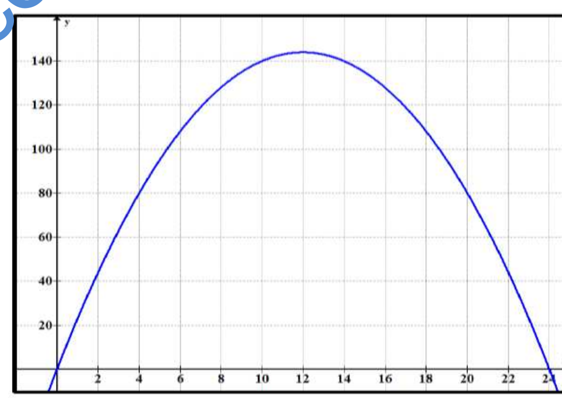
7B. $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$

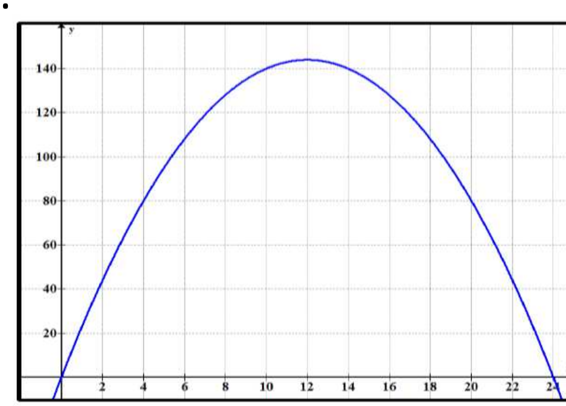
ورقة عمل 53

تمرين موجه 1	المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات

1. قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستخدام 6 مستطيلات و 8 مستطيلات و 12 مستطيلاً. استخدم نقطة النهاية اليمنى لكل مستطيل لتحديد الارتفاع.



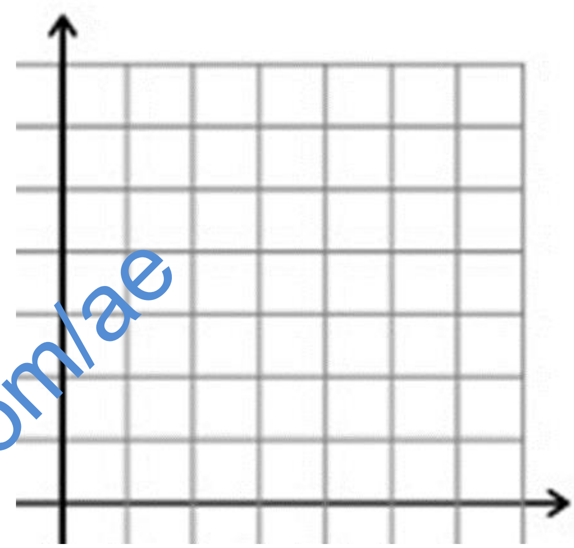


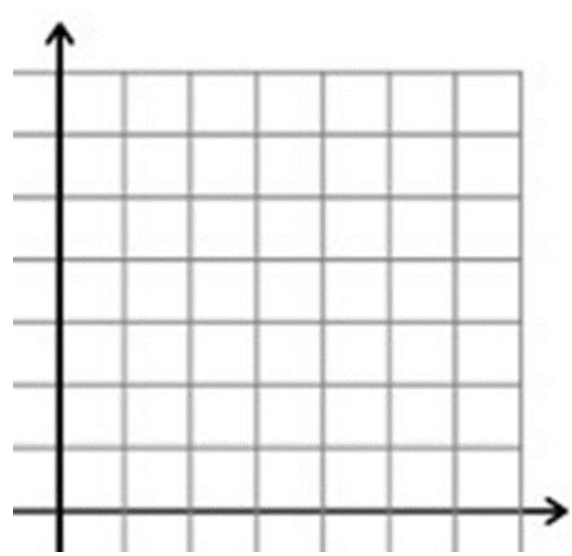


ورقة عمل 54

تمرين موجه 2	المساحة تحت المنحنى باستخدام نقاط النهاية اليسرى واليمنى

2. قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم نقاط النهاية اليسرى. استخدم مستطيلات عرضها يساوي وحدة واحدة. ثم أوجد متوسط التقريبين.





ورقة عمل 55

المفهوم الأساسي تكامل محدد

مساحة المنطقة تحت المنحنى لدالة هي

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

حيث a و b هما **الحد الأدنى** و**الحد الأعلى** على التوالي. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + i\Delta x$. يُشار إلى هذه الطريقة بأنها **مجموع ريمان يميني**.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ $$\sum_{i=1}^{n} c = cn,\ c \text{ عبارة عن ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$ $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$ $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تمرين موجه 3 المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

3A. $\int_0^1 3x^2\,dx$

3B. $\int_0^1 x\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الوحدة : 12 المساحة تحت المنحنى و التكامل 2018-...........-..........

الدرس : 5

ورقة عمل 56

تمرين موجه 4	المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

4A. $\int_1^3 x^2\,dx$

4B. $\int_2^4 x^3\,dx$

ورقة عمل 57

تمرين موجه 5	المساحة تحت المنحنى

5. **الطلاء** يطلي طلاب صف الأستاذة هداية للرسم لوحة جدارية كبيرة تجسد مشهدًا للتزلج في الشتاء. ويريد الطلاب البدء بطلاء تلين للتزلج يقع أحدهما عند بداية الصورة والآخر عند نهايتها، ولكن ليس لديهم إلا طلاء يكفي لتغطية 30 مترًا مربعًا. إذا كانت مساحة كل تل للتزلج يمكن إيجادها بواسطة $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ، فهل لدى الطلاب طلاء كافٍ لكلا التلين؟ اشرح.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تسمى الدالة F بالمشتقة العكسية للدالة f على الفترة I إذا تحقق الشرط $F'(x) = f(x)$

تمرين موجه 1 إيجاد المشتقات العكسية

أوجد مشتقتين عكسيتين مختلفتين لكل دالة.

1A. $2x$ **1B.** $-3x^{-4}$

....

....

....

المفهوم الأساسي قواعد المشتقات العكسية

قاعدة القوى إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي غير -1، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

المضاعف الثابت للقوة إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي غير -1 و k حد ثابت، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$

المجموع والفرق إذا كانت المشتقات العكسية للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ هي $F(x)$ و $G(x)$ بالتوالي، فإن المشتقة العكسية للدالة $f(x) \pm g(x)$ هي $F(x) \pm G(x)$.

تمرين موجه 2 قواعد المشتقات العكسيه

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

2A. $f(x) = 6x^4$ **2B.** $f(x) = \frac{10}{x^3}$ **2C.** $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي التكامل غير المحدود

يتحدد **التكامل غير المحدود** للدالة $f(x)$ عن طريق $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $f(x)$ و C هي أي حد ثابت.

تمرين موجه 3	التكامل غير المحدود

3. **سقوط جسم** يقف عامل صيانة بشكل آمن على منصة في صالة للألعاب الرياضية لإصلاح نظام إضاءة يوجد على ارتفاع 36 مترًا من الأرض، وذلك عندما سقطت محفظته من جيبه. يمكن تحديد السرعة اللحظية للمحفظة كالآتي $v(t) = -10t$، حيث t معطاة بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية.

a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للمحفظة التي سقطت.

b. أوجد المدة التي ستستغرقها المحفظة للاصطدام بالأرض.

....

....

....

....

....

....

....

المفهوم الأساسي النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة $[a, b]$ و$F(x)$ هي أي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

يشار عادة إلى الفارق $F(b) - F(a)$ بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

تمرين موجه 4	المساحة تحت المنحنى

أوجد قيمة كل تكامل محدود مما يلي.

4A. $\int_2^5 3x^2\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

ورقة عمل 60

تمرين موجه 4	المساحة تحت المنحنى

أوجد قيمة كل تكامل محدود مما يلي.

4B. $\int_{1}^{2} (16x^3 - 6x^2)\, dx$

....

....

....

....

....

....

تمرين موجه 5	التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

5A. $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$

5B. $\int_{1}^{3} (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$

....

....

....

....

....

....

....

تمرين موجه 6	التكاملات المحدودة

أوجد الشغل المطلوب لتمديد نابض إذا كان محددًا بالتكاملات الآتية.

6A. $\int_{0}^{0.7} 476x\, dx$

6B. $\int_{0}^{1.4} 512x\, dx$

....

....

....

....

....

....

....