تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف أوراق عمل العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية مع الحل

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر العام

روابط مواد الصف الحادي عشر العام على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر العام والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	ملزمة مراجعة شاملة ومهمة 100 ورقة للفصل الثاني
2	دليل المعلم الدوال والعلاقات الأسية
3	دليل المعلم المتتاليات والمتسلسلات
4	دليل المعلم مع الحل الإحصاء والإحتمالات
5	كتاب الطالب

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التهيئة :

بسط كل عبارة مما يأتي مفترضا أن أيا من المتغيرات لايساوي صفرا :

(1) $a^4 a^3 a^5$	(a^{12})
(2) $(2xy^3z^2)^3$	$(8x^3y^9z^6)$
(3) $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$	$(\frac{-3x^6}{2y^3z^5})$
(4) $(\frac{-8r^2n}{36n^3t})^2$	$(\frac{4r^4}{81n^4t^2})$

(5) **كثافة :** تعرف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة علي الحجم . فإذا كانت كتلة جسم $7\bullet5\times10^3 g$ ، وحجمه $1\bullet5\times10^3 cm^3$ ، فما كثافته ؟

الحل: الكثافة $= \frac{7\bullet5\times10^3 g}{1\bullet5\times10^3 cm^3} = 5g/cm^3$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي :

(6) $f(x) = 2x + 5$	(7) $f(x) = x - 3$
(8) $f(x) = -4x$	(9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
(10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$	(11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى ، أم لا ، وضح إجابتك :

(12) $f(x) = x - 6$ ، $g(x) = x + 6$

الحل: نعم لأن : $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

(13) $f(x) = 2x + 5$ ، $g(x) = 2x - 5$

الحل : لا لأن : $[f \circ g](x) = 4x - 5$

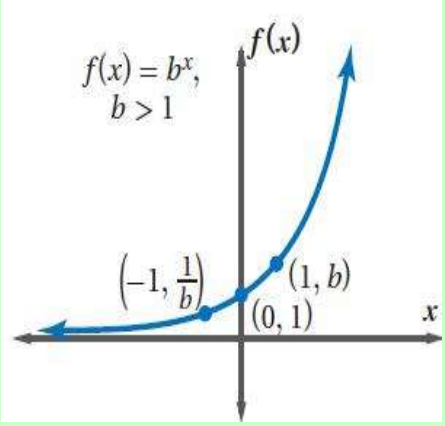
(14) **طعام :** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات ، وتكلف كل إضافة عليها 0 • 5 ريال . فإذا كانت الدالة $f(x) = 0 \bullet 5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافا إليها x من الإضافات ، فأوجد $f^{-1}(x)$ ، موضحا ماذا تعني .

الحل : $f^{-1}(x) = 2x - 8$

تمثل الدوال الأسية بيانيا 2 – 1

تعريف :

مفهوم أساسي **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسى**



الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = b^x$, $b > 1$

خصائص منحني الدالة : متصل ، متباين ، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

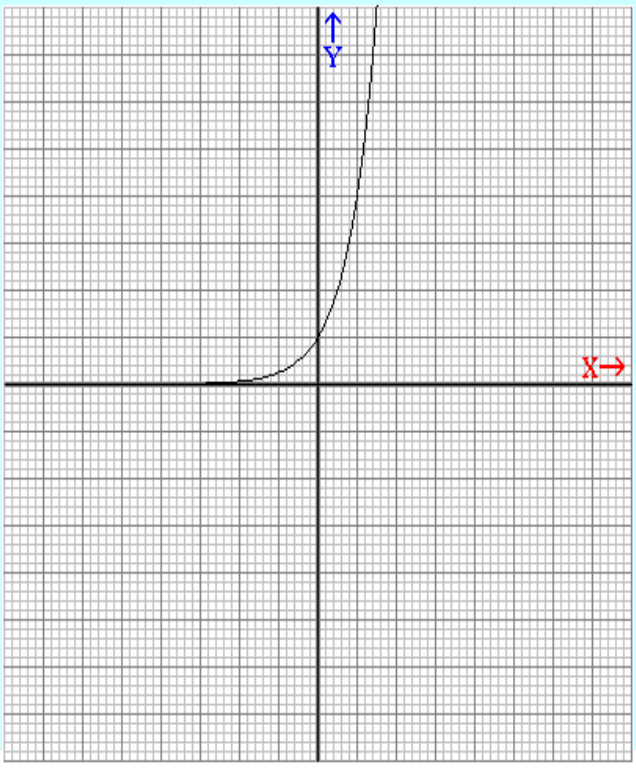
خط التقارب : المحور x

مقطع المحور: y : (0 , 1)

تحقق من فهمك :

1) مثل الدالة $y = 4^x$ بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

الحل:



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

ألمدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

خط التقارب : المحور x

مقطع المحور: y : (0 , 1)

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية :

مفهوم أساسي	تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية
$f(x) = ab^{x-h} + k$	
k : إزاحة راسية إذا كانت k موجبة : إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي الأعلي . إذا كانت k سالبة : إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي الأسفل .	h : إزاحة أفقية إذا كانت h موجبة : إزاحة بمقدار | h | وحدة إلي اليمين . إذا كانت h سالبة : إزاحة بمقدار | h | وحدة إلي اليسار.
a : الشكل والاتجاه إذا كانت $0 > a$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x عندما $k = 0$ إذا كانت $1 < \| a \|$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيا . إذا كانت $1 > \| a \| > 0$ ، فإن التمثيل البياني يضيق راسيا .	

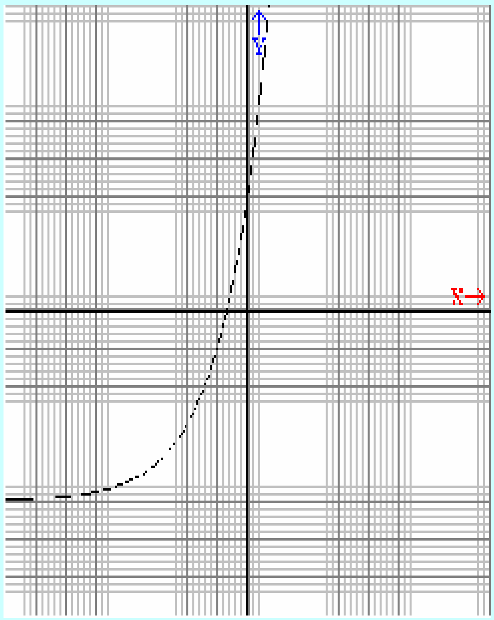
''

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

(2A $y = 2^{x+3} - 5$

الحل :

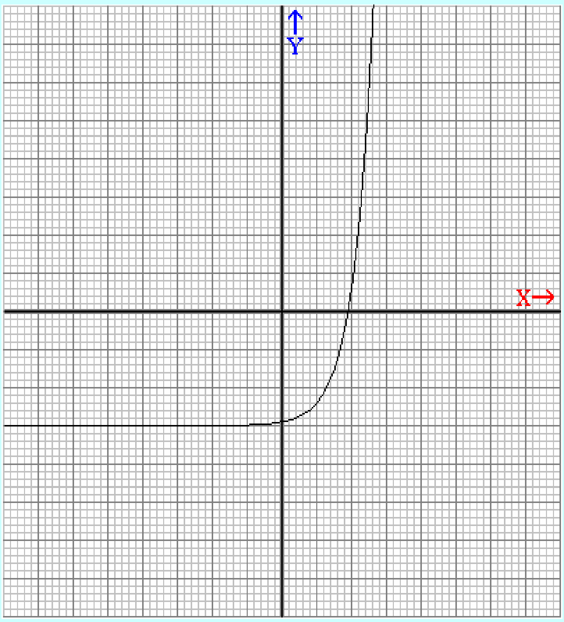


المجال = R

المدي = { y | y > -2 }

(2B $y = 0 \bullet 1(6)^x - 3$

الحل :

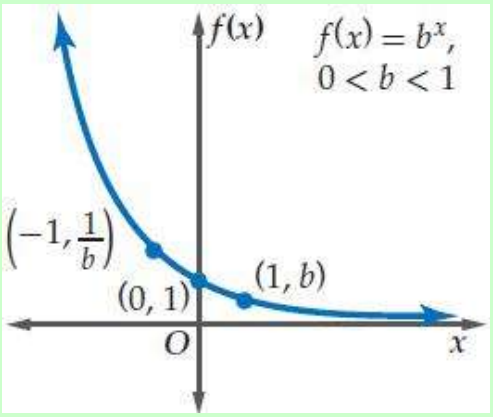


المجال = R

المدي = { y | y > -3 }

الاضمحلال الأسي :

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسي**



الدالة الرئيسة (الأم) : $f(x) = b^x$, $b < 1$

خصائص منحني الدالة : متصل ، متباين ، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب : المحور x

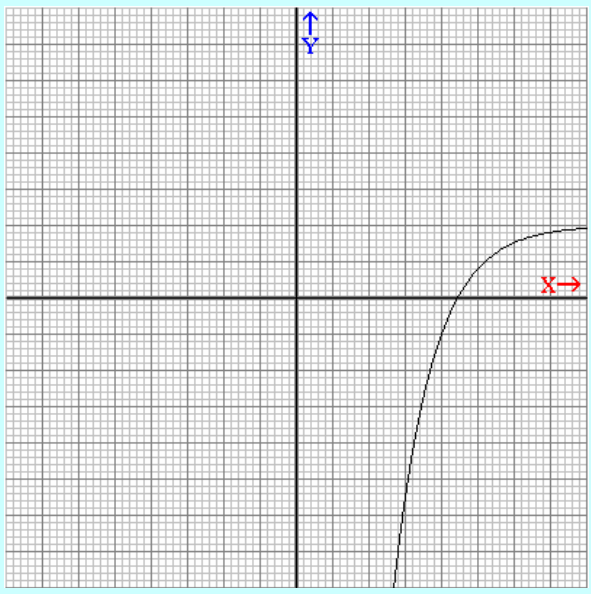
مقطع المحور: y : (0 , 1)

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

(4A $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

الحل :

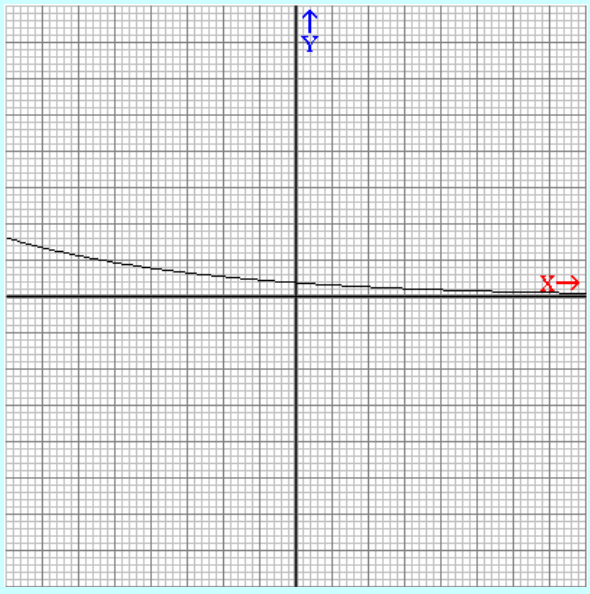


المجال = R

ألمدي = { y | y <2 }

(4B $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

الحل :



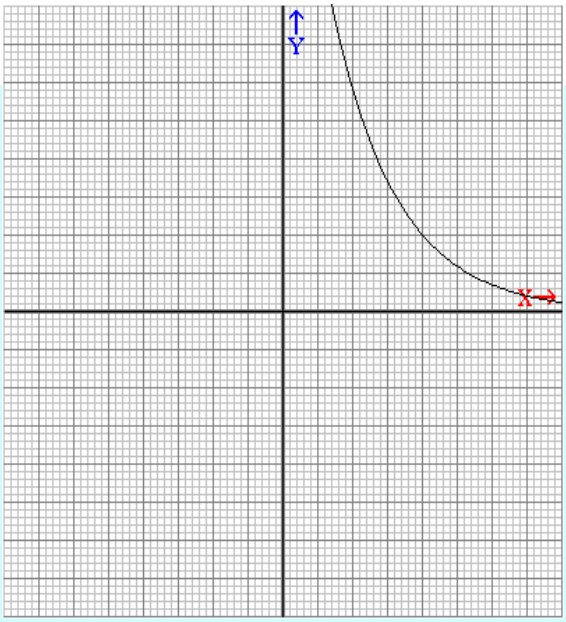
المجال = R

ألمدي = { y | y > 0 }

تحقق من فهمك :

5) يحتوي كوب الشاي الأسود علي 68 mg من الكافيين . أوجد معادلة أسية تمثل الكافيين المتبقية في جسم شخص بالغ بعد شربه كوبا من الشاي الأسود ، ومثلها مستعملا الحاسبة البيانية ، ثم قدر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب .

الحل :



$$y = a(1-r)^t = 68(1-0\bullet125)^t$$

بعد ساعتين

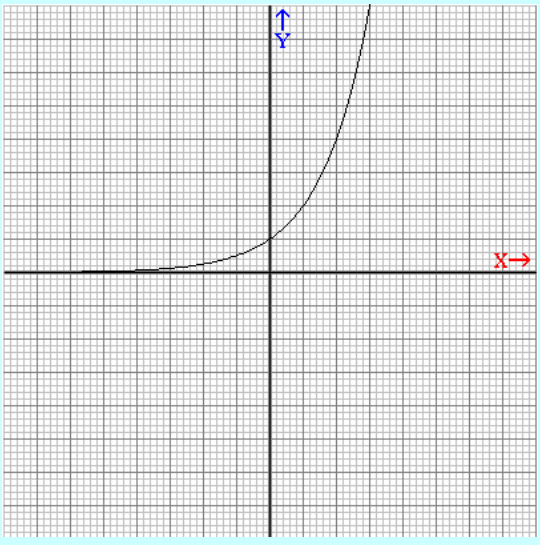
$$y = 68\,(\,0\bullet875\,)^2 \approx 52\bullet06$$

تدرب وحل المسائل :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

1) $f\,(x) = 2^x$

الحل :

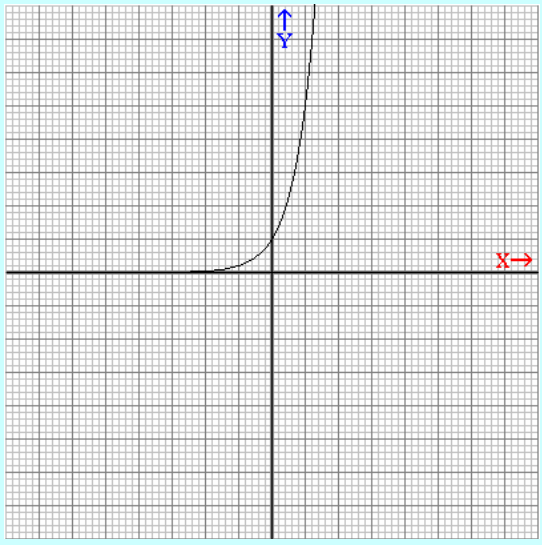


المجال = R

ألمدي = { y | y >0 }

2) $f\,(x) = 5^x$

الحل :

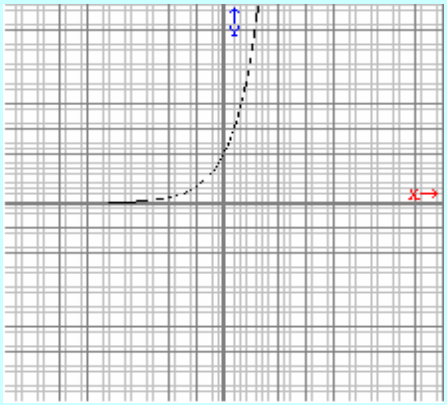


المجال = R

ألمدي = { y | y >0 }

(3 $f(x) = 2(3^x)$

الحل :

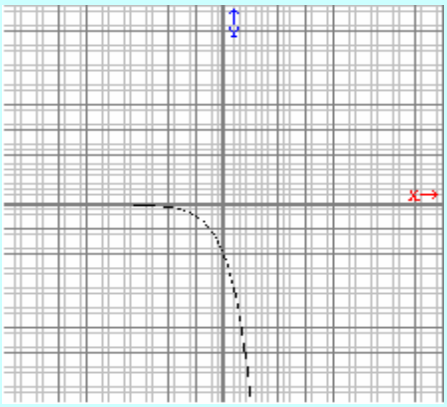


المجال = R

المدي = { y | y >0 }

(4 $f(x) = -2(4^x)$

الحل :

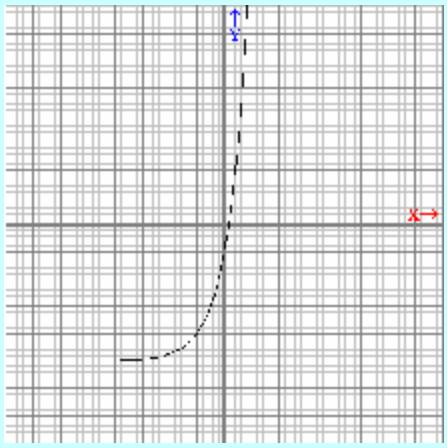


المجال = R

المدي = { y | y <0 }

(5 $f(x) = 4^{x+1} - 5$

الحل :

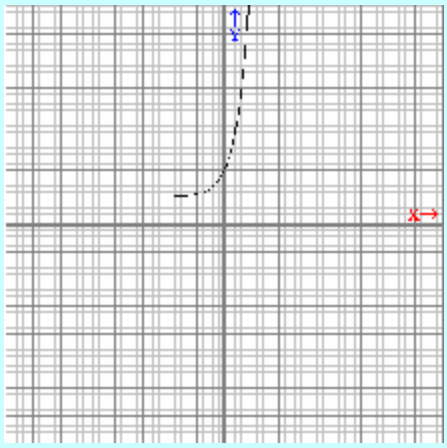


المجال = R

المدي = { y | y > – 5 }

(6 $f(x) = 3^{2x} + 1$

الحل :

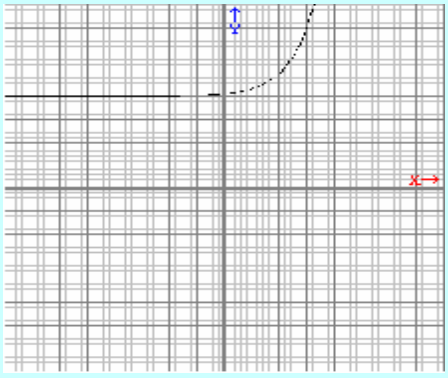


المجال = R

المدي = { y | y >1 }

(7 $f(x) = 3^{x-2} + 4$

الحل :



المجال = R

المدي = { y | y >4 }

(8 $f(x) = 2^{x+1} + 3$

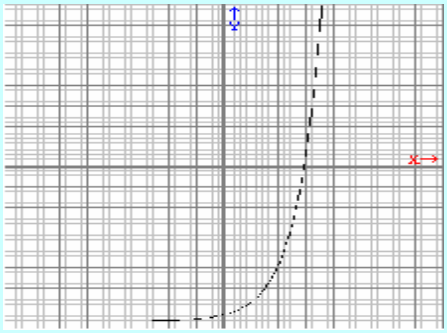
الحل :

المجال = R

المدي = { y | y >3 }

(9 $f(x) = 0 \bullet 25(4^x) - 6$

الحل :

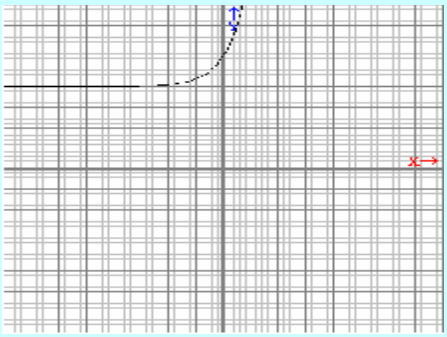


المجال = R

ألمدي = { y | y > – 6 }

(10 $f(x) = 3(2^x) + 8$

الحل :



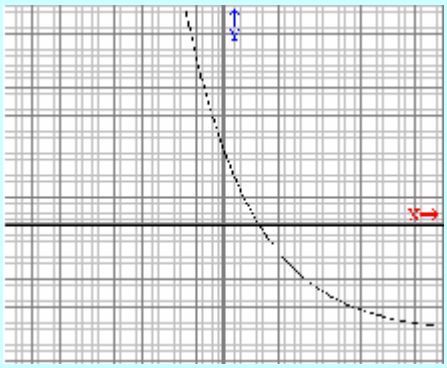
المجال = R

ألمدي = { y | y >8 }

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

(12 $f(x) = 2(\frac{2}{3})^{x-3} - 4$

الحل :

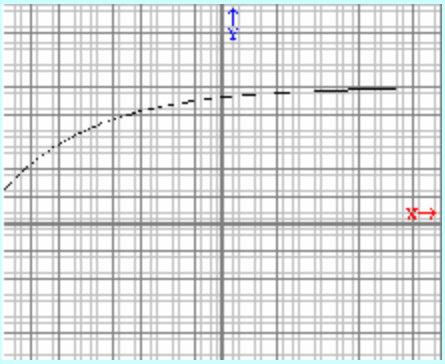


المجال = R

ألمدي = { y | y > – 4 }

(13 $f(x) = -\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^{x+1} + 5$

الحل :

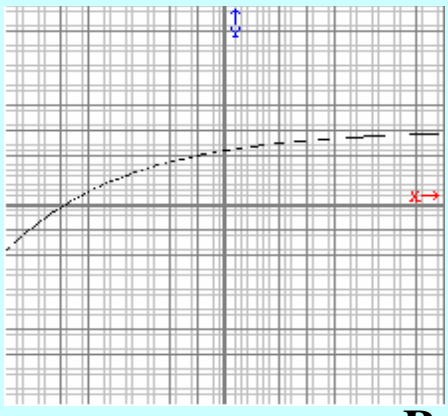


المجال = R

ألمدي = { y | y <5 }

(14 $f(x) = -\frac{1}{3}(\frac{4}{5})^{x-4} + 3$

الحل :

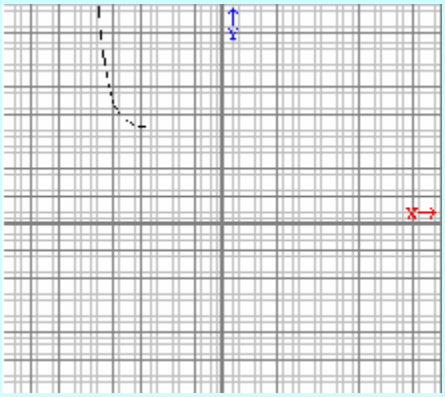


المجال = R

ألمدي = { y | y <3 }

(15 $f(x) = \frac{1}{8}(\frac{1}{4})^{x+6} + 7$

الحل :

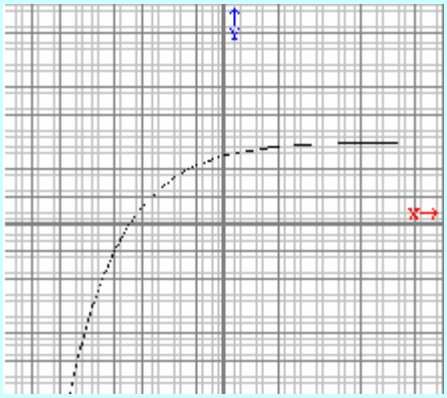


المجال = R

ألمدي = { y | y >7 }

16) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$

الحل :

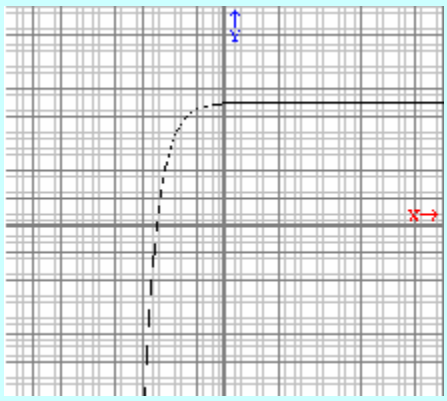


المجال = R

ألمدي = { y | y <3 }

17) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

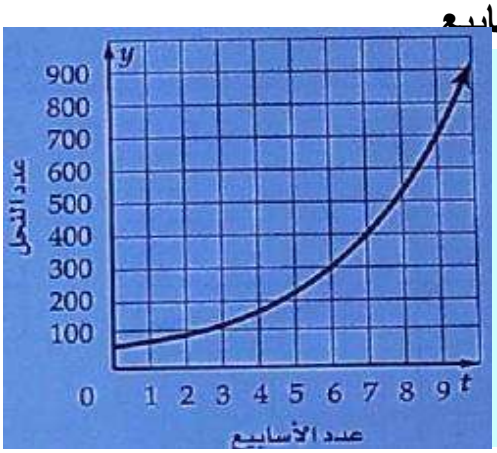
الحل :



المجال = R

ألمدي = { y | y <9 }

19) علوم : **يتكاثر نحل في خلية فيزداد العدد بمعدل 30 % كل أسبوع ، إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيا باستعمال الحاسبة البيانية ، ثم قدر عدد النحل بعد 10 أسابيع**



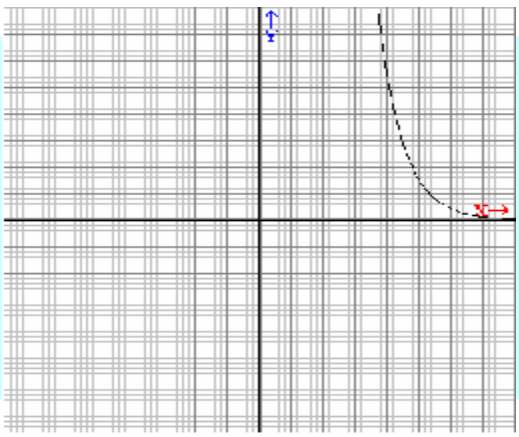
الحل :

$$y = a(1-r)^t = 65(1+0\bullet 3)^t$$

بعد 10 أسابيع

$$y = 65(1+0\bullet 3)^{10} = 65(1\bullet 3)^{10} \approx 896$$

20) كرة سلة : **تناقص عدد الحضور لمباريات كرة قدم بمعدل 5 % لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم ، أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور(y) في المباراة (t) ، إذا كان عددهم في المباراة الأولي 23500 ، ومثلها بيانيا باستعمال الحاسبة البيانية ، ثم قدر عدد الحضور في المباراة 15 .**



الحل:

$$y = a(1-r)^t = 23500(1-0\bullet 05)^t$$

بعد 15 مباراة

$$y = 23500(1-0\bullet 05)^{15}$$

$$= 23500(0\bullet 95)^{15} \approx 10887$$

2 ـ 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل المعادلات الآسية :

مفهوم أساسي	خاصية المساواة للدوال الآسية

التعبير اللفظي : إذا كان $b \neq 1$, $b > 0$ فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثـــــــــال : إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ ، وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$.

تحقق من فهمك :

حل كل معادلة مما يأتي :

(1A $4^{2n-1} = 64$

الحل: $4^{2n-1} = 4^3 \rightarrow 2n - 1 = 3$

$2n = 3 + 1 \rightarrow 2n = 4 \rightarrow n = 2$

(1B $5^{5x} = 125^{x+2}$

الحل: $5^{5x} = 125^{x+2} \rightarrow 5^{5x} = (5^3)^{x+2}$

$5^{5x} = 5^{3x+6} \rightarrow 5x = 3x + 6$

$5x - 3x = 6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

الربح المركب :

مفهوم أساسي	الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنه ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ،
r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلي رأس المال في السنة .

تحقق من فهمك :

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعا ربحا سنويا نسبته 12 % ، بحيث تضاف الأرباح إلي رأس المال مرتين شهريا . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات إلي أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 100000 , r = 0 \cdot 12 , n = 24 , t = 5$

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt} = 100000(1 + \frac{0 \cdot 12}{24})^{120} \approx 181939 \cdot 67$$

حل المتباينات الأسية : المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر .

مفهوم أساسي	خاصية التباين للدوال الأسية

التعبير اللفظي : إذا كان $b>1$, فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثـــــــــال : إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تحقق من فهمك :

حل المتباينات الآتية :

(4A $3^{2X-1} \geq \frac{1}{243}$

الحل: $3^{2X-1} \geq \frac{1}{3^5} \rightarrow 3^{2X-1} \geq 3^{-5}$

$2x - 1 \geq -5 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2$

(4B $2^{X+2} > \frac{1}{32}$

الحل: $2^{X+2} > \frac{1}{2^5} \rightarrow 2^{X+2} > 2^{-5}$

$x + 2 > -5 \rightarrow x > -7$

تدرب وحل المسائل :

حل كل معادلة مما يأتي :

(1 $8^{4x+2} = 64$

الحل: $8^{4x+2} = 8^2 \rightarrow 4x + 2 = 2$

$4x = 2 - 2 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$

(2 $5^{x-6} = 125$

الحل: $5^{x-6} = 5^3 \rightarrow x - 6 = 3$

$x = 3 + 6 \rightarrow x = 9$

(3 $3^{5x} = 27^{2x-4}$

الحل: $3^{5x} = (3^3)^{2x-4} \rightarrow 3^{5x} = 3^{6x-12}$

$5x = 6x - 12 \rightarrow x = 12$

(4 $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

الحل: $(4^2)^{2y-3} = 4^{y+1} \rightarrow 4^{4y-6} = 4^{y+1}$

$4y - 6 = y + 1 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{3}$

(5 $2^{6x} = 32^{x-2}$

الحل: $2^{6x} = (2^5)^{x-2} \rightarrow 2^{6x} = 2^{5x-10}$

$6x = 5x - 10 \rightarrow x = -10$

(6 $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

الحل: $(7^2)^{x+5} = 7^{8x-6} \rightarrow 7^{2x+10} = 7^{8x-6}$

$2x+10 = 8x - 6 \rightarrow 6x = 16$

$\rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

7) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$ **الحل:** $(3^4)^{a+2} = 3^{3a+1} \rightarrow 3^{4a+8} = 3^{3a+1}$ $4\alpha + 8 = 3\alpha + 1 \rightarrow \alpha = -7$	8) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ **الحل:** $(4^4)^{b+2} = 4^{2-2b} \Rightarrow 4^{4b+8} = 4^{2-2b}$ $4b + 8 = 2 - 2b \rightarrow 6b = -6 \rightarrow b = -1$
9) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ **الحل:** $(3^2)^{3c+1} = (3^3)^{3c-1} \rightarrow 3^{6c+2} = 3^{9c-3}$ $6c + 2 = 9c - 3 \rightarrow 5 = 3c \rightarrow c = \frac{5}{3}$	10) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ **الحل:** $(2^3)^{2y+4} = (2^4)^{y+1} \rightarrow 2^{6y+12} = 2^{4y+4}$ $6y + 12 = 4y + 4 \rightarrow 2y = -8 \rightarrow y = -4$

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعا ربحا سنويا نسبته 3 • 4 % ، بحيث تضاف الأرباح إلي رأس المال كل شهر . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلي أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 70000 , r = 0 \bullet 043 , n = 12 , t = 7$

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 70000(1+\frac{0 \bullet 043}{12})^{84} \approx 94533 \bullet 78$$

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعا ربحا سنويا نسبته 2 • 25 % ، بحيث تضاف الأرباح إلي رأس المال مرتين شهريا . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلي أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 50000 , r = 0 \bullet 0225 , n = 24 , t = 6$

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 50000(1+\frac{0 \bullet 0225}{24})^{144} \approx 57223 \bullet 22$$

حل كل متباينة مما يأتي :

15) $4^{2x+6} \leqslant 64^{2x-4}$ **الحل:** $4^{2x+6} \leqslant (4^3)^{2x-4}$ $4^{2x+6} \leqslant 4^{6x-12}$ $2x + 6 \leqslant 6x - 12 \rightarrow 18 \leqslant 4x$ $18 \leqslant 4x \geqslant 18 \rightarrow x \geqslant 4 \bullet 5$	16) $25^{y-3} \leqslant (\frac{1}{125})^{y+3}$ **الحل:** $(5^2)^{y-3} \leqslant (5^{-3})^{y+3}$ $5^{2y-6} \leqslant 5^{-3y-9}$ $2y - 6 \leqslant -3y - 9 \rightarrow y \leqslant \frac{-3}{5}$

(17 $625 \geqslant 5^{a+8}$ **الحل:** $5^4 \geqslant 5^{a+8}$ $4 \geqslant \alpha + 8 \rightarrow -4 \geqslant \alpha \rightarrow \alpha \leqslant -4$	(18 $10^{5b+2} > 1000$ **الحل:** $10^{5b+2} > 10^3$ $5b + 2 > 3 \rightarrow 5b > 1 \rightarrow b > \frac{1}{5}$
(19 $(\frac{1}{64})^{c-2} < 32^{2c}$ **الحل:** $(2^{-6})^{c-2} < (2^5)^{2c}$ $2^{-6c+12} < 2^{10c}$ $-6c + 12 < 10c \rightarrow 12 < 16c$ $16c \geqslant 12 \rightarrow c > 0 \bullet 75$	(20 $(\frac{1}{9})^{3t+5} \geqslant (\frac{1}{243})^{t-6}$ **الحل:** $(3^{-2})^{3t+5} \geqslant (3^{-5})^{t-6}$ $3^{-6t-10} \geqslant 3^{-5t+30}$ $-6t - 10 \geqslant -5t + 30 \rightarrow -t \geqslant 40$ $t \leqslant -40$

اكتب دالة أسية علي الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي :

(21 $(0 , 6 \bullet 4)$,$(3 , 100)$ **الحل:** $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 6 \bullet 4)$ نجد أن $6 \bullet 4 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 6 \bullet 4$ $y = 6 \bullet 4\, b^x$ وبالتعويض بالنقطة $(3 , 100)$نجد أن $100 = 6 \bullet 4b^3 \rightarrow b^3 = \frac{100}{6 \bullet 4}$ $b^3 = \frac{125}{8} = (\frac{5}{2})^3 \rightarrow b = 2 \bullet 5$ $y = 6 \bullet 4(2 \bullet 5)^x$	(22 $(0 , 256)$, $(4 , 81)$ **الحل:** $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 256)$ نجد أن $256 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 256$ $y = 256\, b^x$ وبالتعويض بالنقطة $(4 , 81)$نجد أن $81 = 256b^4 \rightarrow b^4 = \frac{81}{256}$ $b^4 = \frac{81}{256} = (\frac{3}{4})^4 \rightarrow b = 0 \bullet 75$ $y = 256(0 \bullet 75)^x$
(23 $(0 , 128)$, $(5 , 371293)$ **الحل:** $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 128)$ نجد أن	(24 $(0 , 144)$, $(4 , 21609)$ **الحل:** $y = ab^x$ بالتعويض بالنقطة $(0 , 144)$ نجد أن

$128 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 128$ $y = 128\ b^x$ وبالتعويض بالنقطة (371293 , 5)نجد أن $371293 = 128b^5 \rightarrow b^5 = \frac{371293}{128}$ $b = \sqrt[5]{\frac{371293}{128}} \approx 4 \bullet 926$ $y = 128(4 \bullet 926)^x$	$144 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 144$ $y = 144\ b^x$ وبالتعويض بالنقطة (21609 , 4) نجد أن $21609 = 144b^4 \rightarrow b^4 = \frac{21609}{144}$ $b^4 = \frac{2401}{16} = (\frac{7}{2})^4 \rightarrow b = 3 \bullet 5$ $y = 144(3 \bullet 5)^x$

25) **علوم :** وضع كوب من الشاي درجة حرارته $90^\circ C$ في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي $20^\circ C$ فتناقصت درجة حرارة الشاي ، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة : $y(t) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة .

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة .

c) إذا كانت درجة حرارة الشاي المناسبة لشرب الشاي هي $60^\circ C$ ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساوية لها أم أقل منها بعد 10 دقائق ؟

الحل:

a) $y(15) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-15} \approx 45 \bullet 02$

b) $y(30) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-30} \approx 28 \bullet 94$

c) $y(10) = 20 + 70(1 \bullet 071)^{-10} \approx 55 \bullet 25$ (أقل)

26) **أشجار :** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتيمترات طرديا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعا للأس $\frac{3}{2}$ ، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6m ، وقطر قاعدة جذعها $19 \bullet 1\ cm$. أكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها hm .

الحل: $d = \alpha (h)^{\frac{3}{2}}$ ، وبالتعويض عن $d = 19 \bullet 1\ cm$ ، $h = 6m = 600cm$

$19 \bullet 1 = \alpha (600)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \alpha = \frac{19 \bullet 1}{(600)^{\frac{3}{2}}} = 19 \bullet 1 (600)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow d = 19 \bullet 1 (600)^{-\frac{3}{2}} (h)^{\frac{3}{2}}$

حل كل معادلة مما يأتي :

27) $(\frac{1}{2})^{4x+1} = 8^{2x+1}$

الحل:

$(2^{-1})^{4x+1} = (2^3)^{2x+1}$

$2^{-4x-1} = 2^{6x+3}$

$-4x-1 = 6x+3 \rightarrow 10x = -4$

$x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$

28) $(\frac{1}{5})^{x-5} = 25^{3x+2}$

الحل:

$((5^{-1}))^{x-5} = ((5^2))^{3x+2}$

$5^{-x+5} = 5^{6x+4}$

$-x+5 = 6x+4 \rightarrow 7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

29) $216 = (\frac{1}{6})^{x+3}$

الحل:

$6^3 = (6^{-1})^{x+3}$

$6^3 = 6^{-x-3}$

$3 = -x-3 \rightarrow x = -3-3 \rightarrow x = -6$

30) $(\frac{1}{8})^{3x+4} = (\frac{1}{4})^{-2x+4}$

الحل:

$((2^{-3}))^{3x+4} = ((2^{-2}))^{-2x+4}$

$2^{-9x-12} = 2^{4x-8}$

$-9x-12 = 4x-8 \rightarrow 13x = -4$

$x = -\frac{4}{13}$

31) $(\frac{2}{3})^{5x+1} = (\frac{27}{8})^{x-4}$

الحل:

$(\frac{2}{3})^{5x+1} = ((\frac{2}{3})^{-3})^{x-4}$

$(\frac{2}{3})^{5x+1} = (\frac{2}{3})^{-3x+12}$

$5x+1 = -3x+12 \rightarrow 8x = 11$

$x = \frac{11}{8}$

32) $(\frac{25}{81})^{2x+1} = (\frac{729}{125})^{-3x+1}$

الحل:

$((\frac{5}{9})^2)^{2x+1} = ((\frac{5}{9})^{-3})^{-3x+1}$

$(\frac{5}{9})^{4x+2} = (\frac{5}{9})^{9x-3}$

$4x+2 = 9x-3 \rightarrow 5x = 5$

$x = 1$

---

37) تحد : حل المعادلة الآسية : $16^{18}+16^{18}+16^{18}+16^{18}+16^{18} = 4^x$

الحل: $5(16)^{18} = 4^x \rightarrow \log 5(16)^{18} = \log 4^x$

$$\log 5 + 18\log 16 = x \log 4 \rightarrow x = \frac{\log 5 + 18\log 16}{\log 4} \approx 37 \bullet 161$$

39) **برهان :** أثبت أن : $27^{2x} \bullet 81^{x+1} = 3^{2x+2} \bullet 9^{4x+1}$

الحل:

الأيمن = $3^{2x+2} \bullet (3^2)^{4x+1} = 3^{2x+2} \bullet 3^{8x+2} = 3^{10x+4}$

الأيسر = $(3^3)^{2x} \bullet (3^4)^{x+1} = 3^{6x} \bullet 3^{4x+4} = 3^{10x+4}$

54) ماقيمة x التي تحقق المعادلة : $7^{x-1} + 7 = 8$

F) 1 – H) 1 G) 0 J) 2

الحل: الإجابة H $\rightarrow 7^{x-1} = 8 - 7 \rightarrow 7^{x-1} = 7^0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

55) إذا كانت $f(x) = 5x$ فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟

A) – 25 B) – 5 C) 5 D) 25

الحل: الإجابة A $\rightarrow f[f(-1)] = f(-5) = -25$.

2 – 3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تعريف :

مفهوم أساسي	اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي : إذا كان b , x عددين موجبين ، حيث $b \neq 1$ ، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$ ، ويعرف علي أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة .

الرمـــــوز : افرض أن $b > 0 , b \neq 1$ فإن لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$b^y = x \leftrightarrow \log_b x = y$$

مثـــــال : $3^y = 27 \leftrightarrow \log_3 27 = y$

تحقق من فهمك :

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

$\log_4 16 = 2$ (1A ($16 = 4^2$) $\log_3 729 = 6$ (1B ($729 = 3^6$)

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية :

$4^3 = 64$ (2A ($\log_4 64 = 3$) $125^{\frac{1}{3}} = 5$ (2B ($\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$)

تحقق من فهمك :

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية :

$\log_3 81$ (3A (4) $\log_{\frac{1}{2}} 256$ (3B (- 8)

الخصائص الأساسية للوغاريتمات :

مفهوم أساسي	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
إذا كان $b > 0 , b \neq 1 , x$ عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة :	
الخاصية	**التبرير**
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x$, $x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$\log_9 81$ (4A (2) $3^{\log_3 1}$ (4B (1)

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيا :

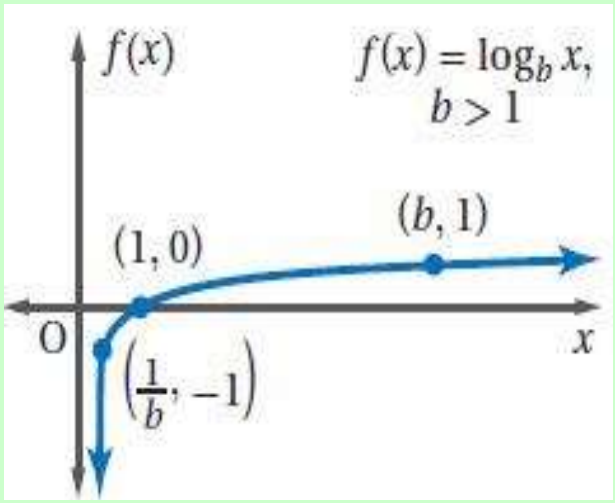
تسمي الدالة $f(x)=\log_b x$، حيث $b \neq 1$ **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x)=\log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسية (الأم)للدوال اللوغاريتمية .

مفهوم أساسي	الدالة الرئيسية (الأم)للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسية (الأم): $f(x)=\log_b x$

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

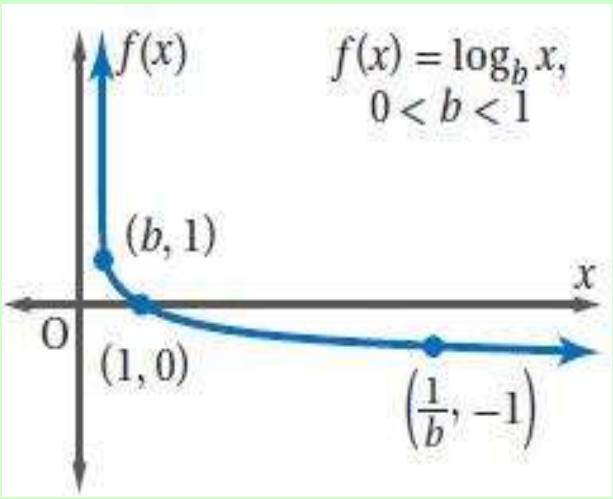
خط التقارب : المحور y



خصائص منحني الدالة : متصل ، متباين

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مقطع المحور x : النقطة (0 , 1)



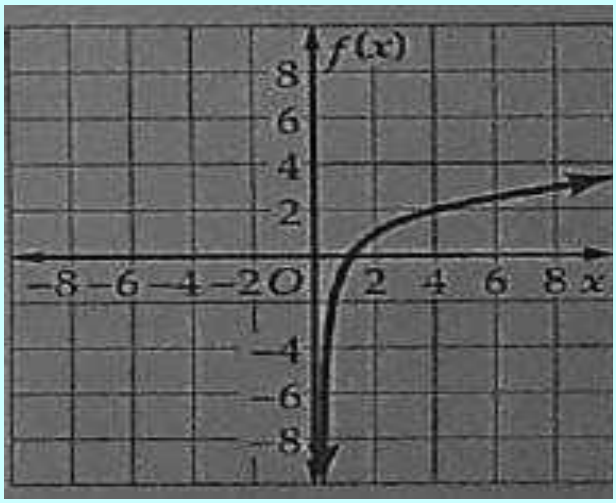
تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

(5A $f(x)=\log_2 x$

الحل: نستعمل النقاط الآتية لرسم الدالة :

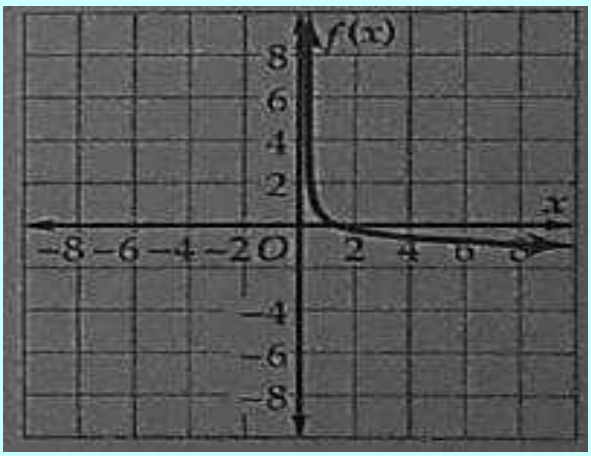
$(2,1)$ ، $(1,0)$ ، $(\frac{1}{2},-1)$



(5B $f(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$

الحل: نستعمل النقاط الآتية لرسم الدالة :

$(\frac{1}{8},1)$ ، $(1,0)$ ، $(8,-1)$



التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيا :

مفهوم أساسي	تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

$$f(x) = \log_b (x - h) + k$$

h : إزاحة أفقية	k : إزاحة رأسية
إذا كانت h موجبة : إزاحة بمقدار | h | وحدة إلي اليمين . إذا كانت h سالبة : إزاحة بمقدار | h | وحدة إلي اليسار.	إذا كانت k موجبة : إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي الأعلى . إذا كانت k سالبة : إزاحة بمقدار | k | وحدة إلي الأسفل.

a : الشكل والاتجاه

إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x عندما $k = 0$

إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيا .

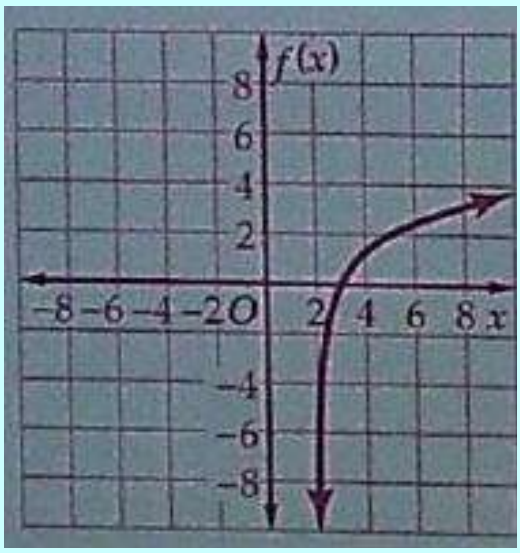
إذا كانت $|a| < 1$ ، $0 <$ فإن التمثيل البياني يضيق راسيا .

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

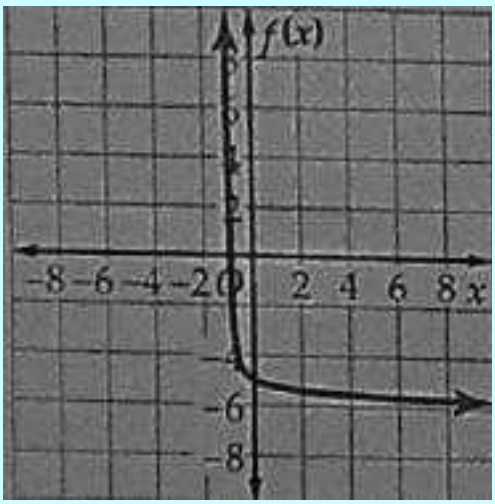
(6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$

الحل:



(6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

الحل:



تحقق من فهمك :

7) أوجد معادلة المعكوس الدالة : $y = 0 \bullet 5^x$

الحل: $x = (0 \bullet 5)^y \rightarrow y = \log_{0 \bullet 5} x$

تدرب وحل المسائل :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي علي الصورة الأسية :

(1 $\log_8 512 = 3$ **الحل :** $8^3 = 512$	**(2** $\log_5 625 = 4$ **الحل :** $5^4 = 625$
(3 $\log_2 16 = 4$ **الحل :** $2^4 = 16$	**(4** $\log_7 343 = 3$ **الحل :** $7^3 = 343$
(5 $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ **الحل :** $9^{-2} = \frac{1}{81}$	**(6** $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ **الحل :** $3^{-3} = \frac{1}{27}$
(7 $\log_{12} 144 = 2$ **الحل :** $(12)^2 = 144$	**(8** $\log_9 1 = 0$ **الحل :** $9^0 = 1$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي علي الصورة اللوغاريتمية :

(9 $11^3 = 1331$ **الحل :** $\log_{11} 1331 = 3$	**(10** $16^{\frac{3}{4}} = 8$ **الحل :** $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
(11 $9^{-1} = \frac{1}{9}$ **الحل :** $\log_9 \frac{1}{9} = -1$	**(12** $6^{-3} = \frac{1}{216}$ **الحل :** $\log_6 \frac{1}{216} = -3$
(13 $2^8 = 256$ **الحل :** $\log_2 256 = 8$	**(14** $4^6 = 4096$ **الحل :** $\log_4 4096 = 6$
(15 $27^{\frac{2}{3}} = 9$ **الحل :** $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$	**(16** $25^{\frac{3}{2}} = 125$ **الحل :** $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(17 $\log_{13} 169$

الحل : نفرض أن $\log_{13} 169 = x$

$13^x = 169 = 13^2 \rightarrow x = 2$

(18 $\log_2 \frac{1}{128}$

الحل : نفرض أن $\log_2 \frac{1}{128} = x$

$2^x = \frac{1}{128} = 2^{-7} \rightarrow x = -7$

(19 $\log_6 1$

الحل : نفرض أن $\log_6 1 = x$

$6^x = 1 = 6^0 \rightarrow x = 0$

(20 $\log_4 1$

الحل : نفرض أن $\log_4 1 = x$

$4^x = 1 = 4^0 \rightarrow x = 0$

(21 $\log_{10} 10$

الحل : نفرض أن $\log_{10} 10 = x$

$10^x = 10 \rightarrow x = 1$

(22 $\log_{10} 0 \bullet 01$

الحل : نفرض أن $\log_{10} 0 \bullet 01 = x$

$10^x = 0 \bullet 01 = 10^{-2} \rightarrow x = -2$

(23 $\log_3 \frac{1}{9}$

الحل : نفرض أن $\log_3 \frac{1}{9} = x$

$3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \rightarrow x = -2$

(24 $\log_4 \frac{1}{64}$

الحل : نفرض أن $\log_4 \frac{1}{64} = x$

$4^x = \frac{1}{64} = 4^{-3} \rightarrow x = -3$

(25 $\log_6 216$

الحل : نفرض أن $\log_6 216 = x$

$6^x = 6^3 \rightarrow x = 3$

(26 $\log_{27} 3$

الحل : نفرض أن $\log_{27} 3 = x$

$27^x = 3 \rightarrow 3^{3x} = 3$

$3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

(27 $\log_{32} 2$

الحل : نفرض أن $\log_{32} 2 = x$

(28 $\log_{121} 11$

الحل : نفرض أن $\log_{121} 11 = x$

$32^x = 2 \rightarrow 2^{5x} = 2$

5x = 1 → x = $\frac{1}{5}$

$121^x = 11 \rightarrow 11^{2x} = 11$

2x = 1 → x = $\frac{1}{2}$

(29 $\log_{\frac{1}{5}} 3125$

الحل : نفرض أن $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ **= x**

$(\frac{1}{5})^x = 5^5 \rightarrow 5^{-x} = 5^5$ **→x = -5**

(30 $\log_{\frac{1}{8}} 512$

الحل : نفرض أن $\log_{\frac{1}{8}} 512$ **= x**

$(\frac{1}{8})^x = 8^3 \rightarrow 8^{-x} = 8^3$

- x = 3 → x = - 3

(31 $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

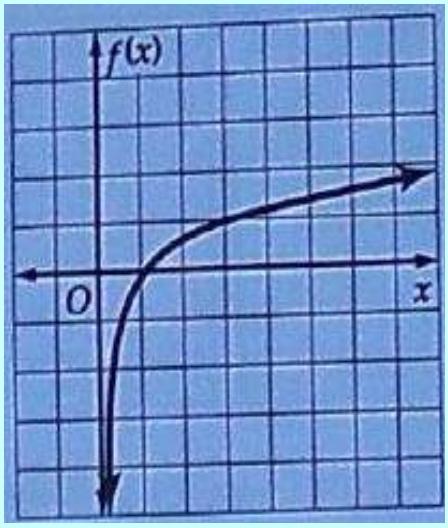
الحل : نفرض أن $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ **= x**

$(\frac{1}{6})^x = \frac{1}{216} = (\frac{1}{6})^3$ **→ x = 3**

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

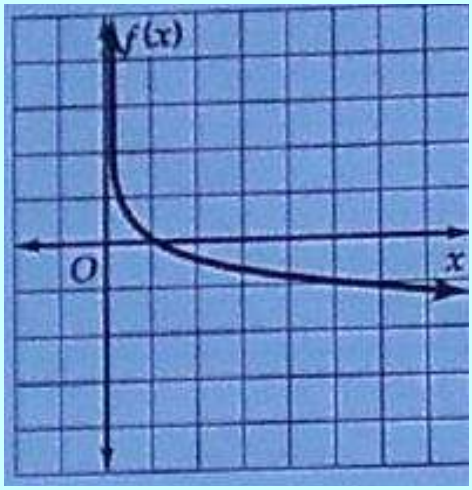
(32 $f(x) = \log_3 x$

الحل :



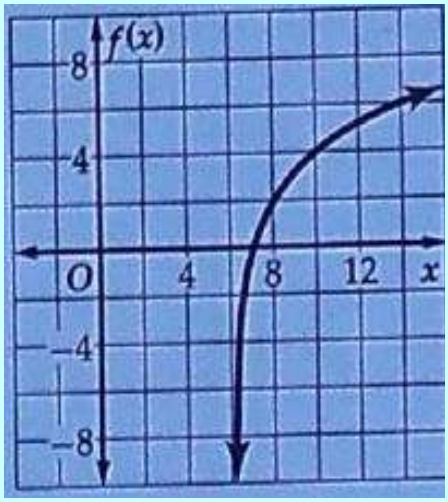
(33 $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

الحل :



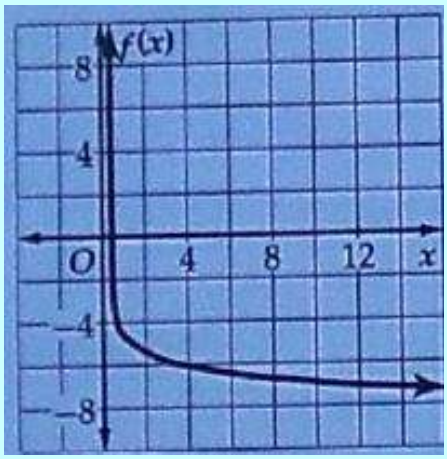
(34 $f(x)=4\log_4(x-6)$

الحل :



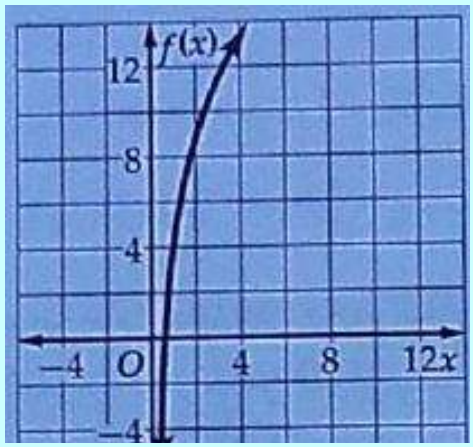
(35 $f(x)=2\log_{\frac{1}{10}} x-5$

الحل :



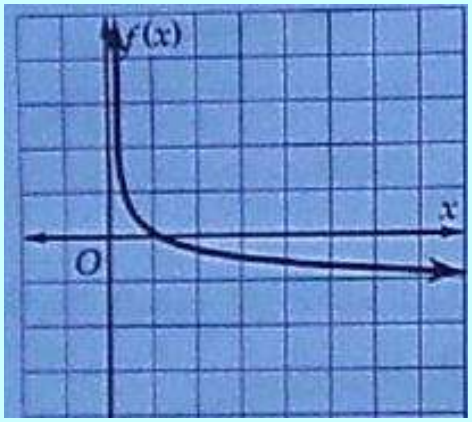
(36 $f(x)=4\log_2 x+6$

الحل :



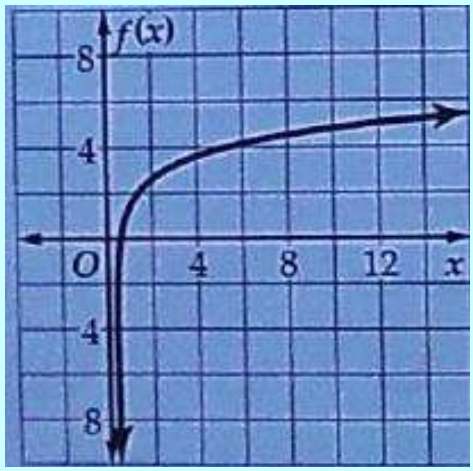
(37 $f(x)=\log_{\frac{1}{9}} x$

الحل :



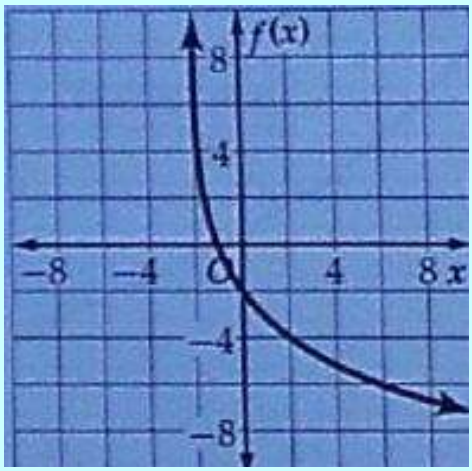
(38 $f(x)=-3\log_{\frac{1}{12}} x+2$

الحل :



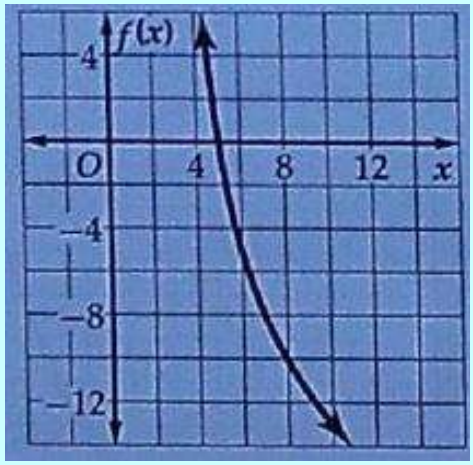
(39 $f(x)=6\log_{\frac{1}{8}}(x+2)$

الحل :



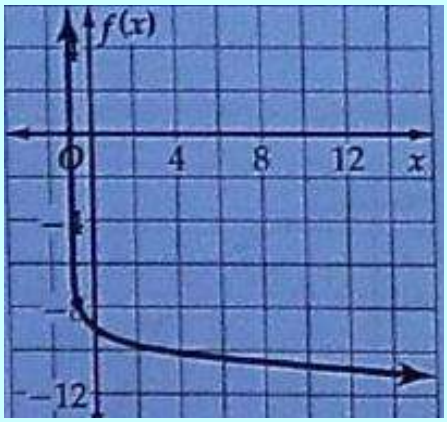
(40 $f(x) = -8\log_3(x-4)$

الحل :



(41 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+1) - 9$

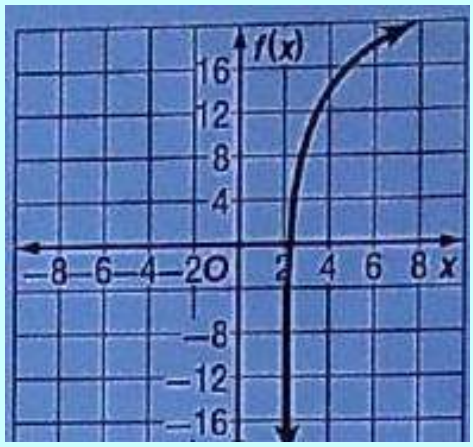
الحل :



مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

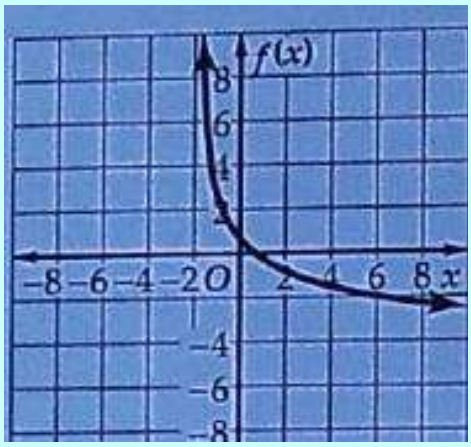
(45 $f(x) = 4\log_2(2x-4)+6$

الحل :



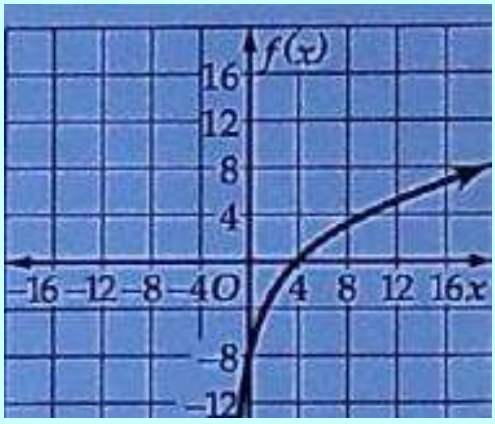
(46 $f(x) = -3\log_{12}(4x+3)+2$

الحل :



(47 $f(x) = 15\log_{14}(x+1) - 9$

الحل :



65) إذا كان $4^{x+2}=48$ فأوجد قيمة 4^x ؟

الحل: $4^{x+2}=48 \rightarrow 4^x \bullet 4^2=48 \rightarrow 4^x=\frac{48}{16}=3$

70) ماقيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$ ؟

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 2

الحل: الإجابة C) $8^x=16 \rightarrow 2^{3x}=2^4 \rightarrow 3x=4 \rightarrow x=\frac{4}{3}$.

71) ماقيمة $\log_2 \frac{1}{32}$

A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) - 5

الحل: نفرض أن x = $\log_2 \frac{1}{32} \leftarrow 2^x=\frac{1}{32}=2^{-5} \leftarrow x=-5 \leftarrow$ الإجابة D)

72) مامقطع y للدالة الأسية $y=4^x-1$ ؟

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

الحل: بوضع $x=0 \leftarrow y=1-1=0 \leftarrow$ الإجابة A)

2 - 4 خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات :

مفهوم أساسي	خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي : لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله .

الرمـــــوز : إذا كانت x, b, α أعدادا حقيقية موجبة ، حيث $x \neq 1$ فإن:

$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

مثـــــال : $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

تحقق من فهمك :

1) استعمل $\log_4 2 = 0 \bullet 5$ **لإيجاد قيمة** $\log_4 32$

الحل: $\log_4 32 = \log_4 2^5 = 5\log_4 2 = 5(0 \bullet 5) = 2 \bullet 5$

مفهوم أساسي	خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي : لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروح منه لوغاريتم المقسوم علية .

الرمـــــــوز : إذا كانت x , b , α أعدادا حقيقية موجبة ، حيث $x \neq 1$ فإن:

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

مثـــــــال : $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

تحقق من فهمك :

2) صوت : يقاس ارتفاع الصوت **L** بالديسبل**(dB)** ، ويعطي بالصيغة $L = 10\log_{10} R$ ، حيث **R** شدة الصوت النسبية . أوجد شدة الصوت النسبية لصوت ارتفاعه **120dB** .

الحل: $120 = 10\log_{10} R \rightarrow 12 = \log_{10} R \rightarrow R = 10^{12}$

خاصية لوغاريتم القوة :

مفهوم أساسي	خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي : لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها .

الرمـــــــوز : لأي عدد حقيقي p , وأي عددين موجبين b , m ، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b m^p = p \log_b m$$

مثـــــــال : $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

تحقق من فهمك :

3) إذا كان $\log_3 7 \approx 1 \bullet 7712$ **، فقرب قيمة** $\log_3 49$.

الحل: $\log_3 49 = \log_3 7^2 = 2\log_3 7 = 2(1 \bullet 7712) = 3 \bullet 5424$

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(4A $\log_6 \sqrt[3]{36}$

الحل:

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 6^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\log_6 6 = \frac{2}{3}$$

(4B $\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل:

$$\log_7 \sqrt[6]{49} = \log_7 7^{\frac{2}{6}}$$

$$= \frac{2}{6}\log_7 7 = \frac{1}{3}$$

تحقق من فهمك :

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

(5A $\log_{13} 6a^3bc^4$

الحل:

$$\log_{13} 6a^3bc^4 = \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$$

(5B $\log_6 5x^3y^7x^{0\bullet 5}$

$$\log_6 5x^3y^7x^{0\bullet 5} = \log_6 5 + \log_6 x^3 + \log_6 y^7 + \log_6 x^{0\bullet 5}$$

$$= \log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + 0\bullet 5\log_6 x$$

تحقق من فهمك :

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة :

(6A $-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x)$

(6B $\log_3(2x-1) - \frac{1}{4}\log_3(x+1)$

الحل:

$$-5\log_2(x+1) + 3\log_2(6x) = \log_2(x+1)^{-5} + \log_2(6x)^3$$

$$= \log_2 216x^3(x+1)^{-5} = \log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

(6B $\log_3(2x-1)-\frac{1}{4}\log_3(x+1)=\log_3(2x-1)-\log_3(x+1)^{\frac{1}{4}}$

$$=\log_3\frac{(2x-1)}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}=\log_3\frac{2x-1}{\sqrt[4]{x+1}}$$

تدرب وحل المسائل :

استعمل $\log_4 5\approx 1\bullet 1610, \log_4 3\approx 0\bullet 7925$ **لتقريب كل مما يأتي :**

(1 $\log_4 18$

الحل :

$\log_4 18=\log_4 2+\log_4 9$

$=\log_4 4^{\frac{1}{2}}+\log_4 3^2$

$=\frac{1}{2}\log_4 4+2\log_4 3$

$=\frac{1}{2}+2(0\bullet 7925)$

$=0\bullet 5+1\bullet 585=2\bullet 085$

(2 $\log_4 15$

الحل :

$\log_4 15=\log_4 3+\log_4 5$

$=0\bullet 7925+1\bullet 1610$

$=1\bullet 9535$

(3 $\log_4\frac{5}{3}$

الحل :

$\log_4\frac{5}{3}=\log_4 5-\log_4 3$

$=1\bullet 1610-0\bullet 7925$

$=0\bullet 3685$

(4 $\log_4\frac{3}{4}$

الحل :

$\log_4\frac{3}{4}=\log_4 3-\log_4 4$

$=0\bullet 7925-1$

$=-0\bullet 2075$

استعمل $\log_4 5=1\bullet 1610, \log_4 3\approx 0\bullet 7925. \log_4 2=0\bullet 5$ **لتقريب كل مما يأتي :**

(5 $\log_4 30$

الحل :

$\log_4 30=\log_4 2+\log_4 3+\log_4 5$

(6 $\log_4 20$

الحل :

$\log_4 20 = \log_4 4 + \log_4 5$
$= 1 + 1 \bullet 1610 = 2 \bullet 1610$

$= 0 \bullet 5 + 0 \bullet 7925 + 1 \bullet 1610$
$= 2 \bullet 4535$

(7 $\log_4 \frac{2}{3}$

الحل : $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$
$= 0 \bullet 5 - 0 \bullet 7925 = -0 \bullet 2925$

(8 $\log_4 \frac{4}{3}$

الحل : $\log_4 \frac{4}{3} = \log_4 4 - \log_4 3$
$= 1 - 0 \bullet 7925 = 0 \bullet 2075$

(9 $\log_4 9$

الحل : $\log_4 9 = \log_4 3^2 = 2\log_4 3$
$= 2(0 \bullet 7925) = 1 \bullet 585$

(10 $\log_4 8$

الحل : $\log_4 8 = \log_4 2^3 = 3\log_4 2$
$= 3(0 \bullet 5) = 1 \bullet 5$

إذا كان $\log_3 5 \approx 1 \bullet 465, \log_5 7 \approx 1 \bullet 2091. \log_6 8 = 1 \bullet 1606, \log_7 9 = 1 \bullet 1292$
لتقريب كل مما يأتي :

(13 $\log_3 25$

الحل : $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$
$= 2(1 \bullet 465) = 2 \bullet 93$

(14 $\log_5 49$

الحل : $\log_5 49 = \log_5 7^2 = 2\log_5 7$
$= 2(1 \bullet 2091) = 2 \bullet 4182$

(15 $\log_6 48$

الحل : $\log_6 48 = \log_6 6 + \log_6 8$
$= 1 + 1 \bullet 1606 = 2 \bullet 1606$

(16 $\log_7 81$

الحل : $\log_7 81 = \log_7 9^2 = 2\log_7 9$
$= 2\ (\ 1 \bullet 1292\ ) = 2 \bullet 2584$

(17 $\log_6 512$

الحل : $\log_6 512 = \log_6 8^3 = 3\log_6 8$
$= 3(1 \bullet 1606) = 3 \bullet 4818$

(18 $\log_7 729$

الحل : $\log_7 729 = \log_7 9^3 = 3\log_7 9$
$= 3(1 \bullet 1292) = 3 \bullet 3876$

احسب قيمة كل مما يأتي :

(19 $\log_5 \sqrt[4]{25}$

(20 $\log_2 \sqrt[5]{32}$

الحل : $\log_5 \sqrt[4]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{4}}$

$= \frac{2}{4} \log_5 5 = \frac{1}{2}$

الحل : $\log_2 \sqrt[5]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{5}}$

$= \log_2 2 = 1$

(21 $3\log_7 \sqrt[6]{49}$

الحل : $3\log_7 \sqrt[6]{49} = 3\log_7 7^{\frac{2}{6}}$

$= 3(\frac{2}{6}) \log_7 7 = 1$

(22 $4\log_2 \sqrt{8}$

الحل : $4\log_2 \sqrt{8} = 4\log_2 2^{\frac{3}{2}}$

$= 4(\frac{3}{2}) \log_2 2 = 6$

(23 $50\log_5 \sqrt{125}$

الحل : $50\log_5 \sqrt{125} = 50\log_5 5^{\frac{3}{2}}$

$= 50(\frac{3}{2}) \log_5 5 = 75$

(24 $\log_3 \sqrt[6]{243}$

الحل : $\log_3 \sqrt[6]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{6}}$

$= \frac{5}{6} \log_3 3 = \frac{5}{6}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

(25 $\log_9 6x^3y^5z$

الحل : $\log_9 6x^3y^5z = \log_9 6 + \log_9 x^3 + \log_9 y^5 + \log_9 z$

$= \log_9 6 + 3\log_9 x + 5\log_9 y + \log_9 z$

(26 $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

الحل : $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7 = \log_{11} a + \log_{11} b^{-4} + \log_{11} c^{12} + \log_{11} d^7$

$= \log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

(27 $\log_7 h^2 j^{11} k^{-5}$

الحل : $\log_7 h^2 j^{11} k^{-5} = \log_7 h^2 + \log_7 j^{11} + \log_7 k^{-5}$

$= 2\log_7 h + 11\log_7 j - 5\log_7 k$

(28 $\log_4 10t^2uv^{-3}$

الحل : $\log_4 10t^2uv^{-3} = \log_4 10 + \log_4 t^2 + \log_4 u + \log_4 v^{-3}$

$= \log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$

(29 $\log_5 a^6 b^{-3} c^4$

الحل : $\log_5 a^6 b^{-3} c^4 = \log_5 a^6 + \log_5 b^{-3} + \log_5 c^4$

$= 6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$

(30 $\log_2 \frac{2x+3}{\sqrt[7]{1-5x}}$

الحل : $\log_2 \frac{2x+3}{\sqrt[7]{1-5x}} = \log_2 (2x+3) - \log_2 \sqrt[7]{1-5x}$

$= \log_2 (2x+3) - \log_2 (1-5x)^{\frac{1}{7}}$

$= \log_2 (2x+3) - \frac{1}{7}\log_2 (1-5x)$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

(31 $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x)$

الحل : $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x) = \log_5 x^3 - \log_5 \sqrt{6-x} = \log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}}$

(32 $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1)$

الحل : $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1) = \log_7 (2x)^5 - \log_7 \sqrt[3]{5x+1} = \log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

(33 $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c)$

الحل : $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c) = \log_3 a^7 + \log_3 b - \log_3 (8c)^2$

$$= \log_3 \frac{a^7 b}{64c^2}$$

(34 $2\log_8(9x) - \log_8(2x-5)$

الحل : $2\log_8(9x) - \log_8(2x-5) = \log_8(9x)^2 - \log_8(2x-5)$

$$= \log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$$

(35 $2\log_6(5a) + \log_6 b + 7\log_6 c$

الحل : $2\log_6(5a) + \log_6 b + 7\log_6 c = \log_6(5a)^2 + \log_6 b + \log_6 c^7$

$= \log_6 25a^2bc^7$

(36 $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z$

الحل : $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z = \log_2 \frac{x}{yz^3}$

.....

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

(38 $\log_8(x-3) = \log_8 x - \log_8 3$

الحل : الأيسر $\log_8 x - \log_8 3 = \log_8 \frac{x}{3} \neq$ الأيمن

الأيمن $\neq$ الأيسر $\leftarrow$ العبارة خاطئة

(39 $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

الحل : الأيسر $= \log_5 22 + \log_5 x = \log_5 22x$ الأيمن

الأيمن = الأيسر $\leftarrow$ العبارة صحيحة

(40 $\log_{10} 19k = 19\log_{10} k$

الحل : الأيسر $\neq 19\log_{10} k = \log_{10} k^{19}$ الأيمن

الأيمن $\neq$ الأيسر $\leftarrow$ العبارة خاطئة

(41 $\log_2 y^5 = 5\log_2 y$

الحل : الأيسر $= \log_2 y^5 = 5\log_2 y$ الأيمن

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

42) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

الحل : الأيسر $= \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 \frac{x}{3}$ = الأيمن

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

43) $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$

الحل : الأيسر $\neq \log_4 z + \log_4 2 = \log_4 2z$ = الأيمن

الأيمن ≠ الأيسر ← العبارة خاطئة

44) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

الحل : الأيمن ≠ الأيسر ← العبارة خاطئة

45) $\log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$

الحل : الأيسر $= \log_9 x^2 + \log_9 y^3 - \log_9 z^4 = \log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4}$ = الأيسر

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

49) **تحد :** بسط العبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$ لتجد القيمة العددية الدقيقة .

الحل: $\log_{\sqrt{a}} (a^2) = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a^4} = \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a})^4 = 4\log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a}) = 4$

50) **تبرير:** استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن : $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

الحل: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(55 $\log_{10} 0 \bullet 001$	(- 3)
(56 $\log_4 16^x$	(2x)
(57 $\log_3 27^x$	(3x)

58) كهرباء : يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = (\frac{P}{R})^{\frac{1}{2}}$ ، حيث P القدرة بالواط ، R المقاومة بالأوم ، ماكمية التيار الكهربائي اتلي يستهلكها جهاز ما إذا كانت P = 120 W ، R = 3Ω . قرب الناتج إلي أقرب عشر .

الحل: $I = (\frac{P}{R})^{\frac{1}{2}} = (\frac{120}{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{40} \approx 6 \bullet 3$

حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك :

(61 $3^{4x} = 3^{3-x}$
(62 $3^{5x} \bullet 81^{1-x} = 9^{x-3}$
(63 $49^x = 7^{x^2-15}$
(64 $\log_2 (x + 6) = 5$

65) ماقيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ ؟

(A $\log_5 2$ (B $\log_5 0 \bullet 5$ (C $\log_5 3$ (D 1

66) مامقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x + 1) + 3$ ؟

(A 3 (B 2 (C 1 (D 0

2 – 5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل المعادلات اللوغاريتمية : تحتوي المعادلات اللوغاريتمية علي لوغاريتم واحد أو أكثر.
ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة عل حل معادلات لوغاريتمية .

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية :

(1A $\log_9 x = \frac{3}{2}$

الحل: $x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

(1B $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

الحل: $x = 16^{\frac{5}{2}} = (4^2)^{\frac{5}{2}} = 4^5 = 1024$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية :

مفهوم أساسي **خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية**

الرموز : إذا كان b عددا موجبا حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$
إذا وفقط إذا كان $x = y$

مثـــال : إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

تحقق من فهمك :

2) حل المعادلة : $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$

(F -3 **(G** -1 **(H** 5 **(J** 15

الحل: $x^2 - 15 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0$
$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$ مرفوضة أو $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$
الإجابة (H)

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية :

(3A $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

الحل: $\log_7 x^2 = \log_7 27(3)$

$x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow x = 9$

(3B $\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$

الحل: $\log_6 x(x+5) = 2$

$x(x+5) = 6^2 \rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$(x-4)(x+9) = 0$

$x = 4$ أو $x = -9$ مرفوضة

حل المتباينات اللوغاريتمية : المتباينة اللوغاريتمية هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر. ويمكنك استعمال الخاصية التالية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة .

مفهوم أساسي	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
إذا كان $b > 1 , x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن	$x > b^y$
إذا كان $b > 1 , x > 0$ و $\log_b x < y$ ، فإن	$x < b^y$

تحقق من فهمك :

حل المتباينات الآتية :

4A) $\log_4 x \geq 3$	4B) $\log_2 x < 4$
الحل: $x \geq 4^3 \rightarrow x \geq 64$	الحل: $x < 2^4 \rightarrow x < 16$
$\{x \mid x \geq 16\}$	$\{x \mid 0 < x < 16\}$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية :

مفهوم أساسي	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
الرموز : إذا كان $b > 1$ ، فإن	$\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
و	$\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
مثـــال : إذا كان $\log_b x > \log_b 35$ فإن	$x > 35$

تحقق من فهمك :

5) حل المتباينة: $\log_5(2x+1) \leq \log_5(x+4)$

الحل: $2x + 1 \leq x + 4 \rightarrow 2x - x \leq 4 - 1 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \{x \mid -0.5 < x \leq 3\}$

تدرب وحل المسائل :

حل كل معادلة مما يأتي :

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$	2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

الحل: $x = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

(3 $\log_{81} x = \frac{3}{4}$

الحل: $x = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

(4 $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

الحل: $x = 25^{\frac{5}{2}} = (5^2)^{\frac{5}{2}} = 5^5 = 3125$

(5 $\log_8 \frac{1}{2} = x$

الحل:

$8^x = \frac{1}{2} \rightarrow 2^{3x} = 2^{-1}$

$3x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

(6 $\log_6 \frac{1}{36} = x$

الحل:

$6^x = \frac{1}{36} \rightarrow 6^x = 6^{-2} \rightarrow x = -2$

(7 $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

الحل: $x^{\frac{5}{2}} = 32 \rightarrow x = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$

(8 $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

الحل: $x^{\frac{3}{2}} = 27 \rightarrow x = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

حل كل معادلة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

(9 $5\log_2 x = \log_2 32$

الحل: $\log_2 x^5 = \log_2 32 \rightarrow x^5 = 32 \rightarrow x^5 = 2^5 \rightarrow x = 2$

(10 $3\log_2 x = \log_2 8$

الحل: $\log_2 x^3 = \log_2 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x^3 = 2^3 \rightarrow x = 2$

(11 $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

الحل:

$\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6 \rightarrow \log_4 \frac{48}{n} = \log_4 6$

$\frac{48}{n} = 6 \rightarrow 6n = 48 \rightarrow n = 8$

(12 $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

الحل: $\log_3 14x = \log_3 28 \rightarrow 14x = 28 \rightarrow x = 2$

(13 $\log_2(4x)+\log_2 5=\log_2 40$

الحل: $\log_2 20x = \log_2 40 \rightarrow 20x = 40 \rightarrow x = 2$

(14 $\log_4 a+\log_4 8=\log_4 24$

الحل: $\log_4 a8 = \log_4 24 \rightarrow a8 = 24 \rightarrow a = 3$

(15 $\log_2 n=\frac{1}{3}\log_2 27+\log_2 36$

الحل: $\log_2 n=\log_2(3^3)^{\frac{1}{3}}+\log_2 36 \rightarrow \log_2 n=\log_2 108 \rightarrow n=108$

(16 $3\log_{10} 8-\frac{1}{2}\log_2 36=\log_2 x$

الحل: $\log_{10} 8^3-\log_2(36)^{\frac{1}{2}}=\log_2 x \rightarrow \log_2 x=\log_2 \frac{512}{6} \rightarrow x=\frac{256}{3}$

حل كل متباينة مما يأتي :

(17 $\log_5 x > 3$

الحل: $x > 5^3 \rightarrow x > 125$

$\{x| x > 125\}$

(18 $\log_8 x \leqslant -2$

الحل: $x \leqslant 8^{-2} \rightarrow x \leqslant \frac{1}{64}$

$\{x| 0 < x \leqslant \frac{1}{64}\}$

(19 $\log_6 x < -3$

الحل: $x < 6^{-3} \rightarrow x < \frac{1}{216}$

$\{x| 0 < x < \frac{1}{216}\}$

(20 $\log_4 x \geqslant 4$

الحل: $x \geqslant 4^4 \rightarrow x \geqslant 256$

$\{x| x \geqslant 256\}$

(21 $\log_3 x \geqslant -4$

الحل: $x \geqslant 3^{-4} \rightarrow x \geqslant \frac{1}{81}$

(22 $\log_2 x \leqslant -2$

الحل: $x \leqslant 2^{-2} \rightarrow x \leqslant \frac{1}{4}$

$\{x \mid x \geq \frac{1}{81}\}$	$\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$

حل كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

23) $\log_4(2x+5) \leq \log_4(4x-3)$

الحل: $2x+5 \leq 4x-3 \rightarrow 5+3 \leq 4x-2x \rightarrow 8 \leq 2x \rightarrow 4 \leq x \rightarrow x \geq 4$

$\{x \mid x \geq 4\}$

24) $\log_8(2x) > \log_8(6x-8)$

الحل: $2x > 6x-8 \rightarrow 2x-6x > -8 \rightarrow -4x > -8 \rightarrow x < 2$

$\{x \mid \frac{4}{3} < x < 2\}$

25) $\log_2(4x-6) > \log_2(2x+8)$

الحل: $4x-6 > 2x+8 \rightarrow 4x-2x > 8+6 \rightarrow 2x > 14 \rightarrow x > 7$

$\{x \mid x > 7\}$

26) $\log_7(x+2) \geq \log_7(6x-3)$

الحل: $x+2 \geq 6x-3 \rightarrow 2+3 \geq 6x-x \rightarrow 5 \geq 5x \rightarrow 1 \geq x \rightarrow x \leq 1$

$\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$

27) صوت : يعطي ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10\log_{10} R$ ، حيث R هي الشدة النسبية للصوت . احسب الشدة النسبية لصوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل .

الحل: $80 = 10\log_{10} R \rightarrow \log_{10} R = 8 \rightarrow R = 10^8$

30) علوم : تعطي سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93\log_{10} d + 65$ ، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل .

a) اكتب المعادلة بصورة أسية .

b) ماسرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلا ؟

الحل: (a $w = 93\log_{10} d + 65 \rightarrow w - 65 = \log_{10} d^{93}$

$$d^{93} = 10^{(w-65)} \rightarrow d = 10^{\frac{(w-65)}{93}}$$

(b $w = 93\log_{10} 525 + 65 \approx 317 \bullet 97$

33) تحد : اوجد قيمة $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$

الحل:

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$
$$= \log_3 3^3 + \log_9 9^{\frac{3}{2}} + 1 + \log_{81} 81^{\frac{3}{4}} + \log_{243} 243^{\frac{3}{5}}$$
$$= 3\log_3 3 + \frac{3}{2}\log_9 9 + 1 + \frac{3}{4}\log_{81} 81 + \frac{3}{5}\log_{243} 243$$
$$= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{137}{20}$$

مراجعة تراكمية :

حل كل مما يأتي وتحقق من صحة حللك :

(39 $3^{3x-2} > 81$
(40 $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$
(41 $8^{x-4} = 2^{4-x}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي :

(42 $\log_4 256$	(43 $\log_2 \frac{1}{8}$
(44 $\log_6 216$	(45 $\log_7 2401$

بسط كلا مما يأتي مفترضا أن أي من المتغيرات لايساوي الصفر :

(46 $x^5 \bullet x^3$	(47 $(2p^2n)^3$
(48 $\frac{x^4 y^6}{xy^2}$	(49 $(\frac{c^9}{d^7})^0$

51) أي مما يأتي يمثل حلا للمعادلة : $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$

(A $-\frac{1}{2}$ (B $\frac{1}{2}$ (C -2 (D 2

الحل: $\log_4 \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 2$

$2x - 2 = x \rightarrow 2x - x = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ الإجابة (D

2 - 6 اللوغاريتمات العشرية

اللوغاريتمات العشرية : نلاحظ أن أي دالة لوغاريتم للأساس 10 تكتب علي الصورة $y = \log_{10} x$ ، وتسمي باللوغاريتمات العشرية وتكتب دون الأساس 10 .

$\log_{10} x = \log x$, x > 0

تحقق من فهمك :

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(1A log 7 الحل: 0•8451	(1B log 0 • 5 الحل: – 0• 3010

تحقق من فهمك :

2) هزات أرضية : ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الأيرج التي تطلقها الأرض علي مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11 \cdot 8 + 1 \cdot 5 M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات علي مقياس ريختر .

الحل: $\log E = 11 \cdot 8 + 1 \cdot 5 (9) = 11 \cdot 8 + 13 \cdot 5 = 25 \cdot 3 \rightarrow E \approx 2(10^{25})$

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(3A $3^x = 15$ الحل: $\log 3^x = \log 15$ $x \log 3 = \log 15 \rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2 \bullet 46$	(3B $6^x = 42$ الحل: $\log 6^x = \log 42$ $x \log 6 = \log 42 \rightarrow x = \frac{\log 42}{\log 6} \approx 2 \bullet 09$

حل المتباينات الآتية وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(4A $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

الحل: $\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$

$2x \log 3 \geq (x+1) \log 6$

$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$

$x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$

$x(\log 9 - \log 6) \geq \log 6$

$x \log 1 \bullet 5 \geq \log 6$

$x \geq \frac{\log 6}{\log 1 \bullet 5} \rightarrow x \geq 4 \bullet 42$

$\{x | x \geq 4 \bullet 42\}$

(4B $4^{y} < 5^{2y+1}$

الحل: $\log 4^{y} < \log 5^{2y+1}$

$y \log 4 < (2y+1) \log 5$

$y \log 4 - 2y \log 5 < \log 5$

$y(\log 4 - 2 \log 5) < \log 5$

$y(\log 4 - \log 25) < \log 5$

$y \log \frac{4}{25} < \log 5$

$y > \frac{\log 5}{\log \frac{4}{25}} \rightarrow y > -0 \bullet 8782$

$\{y | y > -0 \bullet 8782\}$

صيغة تغيير الأساس :

مفهوم أساسي	صيغة تغيير الأساس

الرموز :لأي أعداد موجبة a , b , n ، حيث $a \neq 1$، $b \neq 1$ فإن : $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

مثـــال : $\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$

تحقق من فهمك :

5) أكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

الحل: $\log_6 8 = \frac{\log 8}{\log 6} \approx 1 \bullet 16$

تدرب وحل المسائل :

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

1) log 5 الحل: 0•6990	2) log 21 الحل: 1•3222	3) log 0• 4 الحل: -0•3979

4) $\log 3$ الحل: 0•4771	5) $\log 11$ الحل: 1•0414	6) $\log 3 \bullet 2$ الحل: 0•5051
7) $\log 8 \bullet 2$ الحل: 0•9138	8) $\log 0 \bullet 9$ الحل: -0•0458	9) $\log 0 \bullet 04$ الحل: -1•3979

10) علوم : ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الأيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة علي مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11 \bullet 8 + 1 \bullet 5 M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8 • 5 درجات علي مقياس ريختر

الحل: $\log E = 11 \bullet 8 + 1 \bullet 5 (8 \bullet 5) = 11 \bullet 8 + 12 \bullet 7 5 = 24 \bullet 55$

$$E = 10^{24 \bullet 55} \approx 3 \bullet 55 (10^{24})$$

حل كل معادلة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

12) $6^x = 40$

الحل:

$$\log 6^x = \log 40$$

$$x \log 6 = \log 40$$

$$x = \frac{\log 40}{\log 6} \approx 2 \bullet 0588$$

13) $2 \bullet 1^{a+2} = 8 \bullet 25$

الحل:

$$\log 2 \bullet 1^{a+2} = \log 8 \bullet 25$$

$$(a+2) \log 2 \bullet 1 = \log 8 \bullet 25$$

$$a + 2 = \frac{\log 8 \bullet 25}{\log 2 \bullet 1}$$

$$a = \frac{\log 8 \bullet 25}{\log 2 \bullet 1} - 2 \approx 0 \bullet 8442$$

14) $7^{x^2} = 20 \bullet 42$

الحل:

$$\log 7^{x^2} = \log 20 \bullet 42$$

$$x^2 \log 7 = \log 20 \bullet 42$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\log 20 \bullet 42}{\log 7}} \approx \pm 1 \bullet 2451$$

15) $11^{b-3} = 5^b$

الحل:

$$\log 11^{b-3} = \log 5^b$$

$$(b-3) \log 11 = b \log 5$$

$$b \log 11 - 3 \log 11 = b \log 5$$

$$b \log 11 - b \log 5 = 3 \log 11$$

$$b (\log 11 - \log 5) = 3 \log 11$$

$$b = \frac{3 \log 11}{\log 11 - \log 5} \approx 9 \bullet 1237$$

16) $8^x = 40$

17) $5^x = 55$

الحل: $\log 8^x = \log 40$

$x \log 8 = \log 40$

$x = \frac{\log 40}{\log 8} \approx 1 \bullet 7740$

الحل: $\log 5^x = \log 55$

$x \log 5 = \log 55$

$x = \frac{\log 55}{\log 5} \approx 2 \bullet 4899$

(18 $9^{b-1} = 7^b$

الحل: $\log 9^{b-1} = \log 7^b$

$(b-1)\log 9 = b \log 7$

$b \log 9 - \log 9 = b \log 7$

$b \log 9 - b \log 7 = \log 9$

$b(\log 9 - \log 7) = \log 9$

$b = \frac{\log 9}{\log 9 - \log 7} \approx 8 \bullet 7429$

(19 $15^{x^2} = 110$

الحل: $\log 15^{x^2} = \log 110$

$x^2 \log 15 = \log 110$

$x = \pm\sqrt{\frac{\log 110}{\log 15}} \approx \pm 1 \bullet 3175$

(20 $9^{6y-2} = 3^{3y+1}$

الحل: $(3^2)^{6y-2} = 3^{3y+1}$

$3^{12y-4} = 3^{3y+1}$

12y – 4 = 3y + 1 → 9y = 5

y = $\frac{5}{9}$

(21 $8^{2x-4} = 4^{x+1}$

الحل: $(2^3)^{2x-4} = (2^2)^{x+1}$

$2^{6x-12} = 2^{2x+2}$

6x – 12 = 2x + 2 → 4x = 14

x = $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

(22 $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$

الحل: $2^{4x} = 2^{x+3}$

4x = x + 3 →3x = 3 → x = 1

(23 $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

الحل: $\log 2^y = \log \sqrt{3^{y-1}}$

$y \log 2 = \frac{1}{2}(y-1)\log 3$

$2y \log 2 = y \log 3 - \log 3$

$\log 3 = y \log 3 - 2y \log 2$

$\log 3 = y(\log 3 - 2\log 2)$

$y = \frac{\log 3}{\log 3 - 2\log 2} \approx -3 \bullet 8189$

حل كل متباينة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(24 $5^{4n} > 33$

الحل : $4n \log 5 > \log 33$

$n > \frac{\log 33}{4 \log 5} \rightarrow n > 0 \cdot 5431$

$\{n | n > 0 \cdot 5431\}$

(25 $6^{p-1} \leq 4^{p}$

الحل: $(p - 1) \log 6 \leqslant p \log 4$

$p \log 6 - \log 6 \leqslant p \log 4$

$p \log 6 - p \log 4 \leqslant \log 6$

$p(\log 6 - \log 4) \leqslant \log 6$

$p \leqslant \frac{\log 6}{\log 6 - \log 4}$

$p \leqslant 4 \cdot 4190 \rightarrow \{p | p \leqslant 4 \cdot 4190\}$

(26 $3^{y-1} \leqslant 4^{y}$

الحل: $(y - 1) \log 3 \leqslant y \log 4$

$y \log 3 - \log 3 \leqslant y \log 4$

$y \log 3 - y \log 4 \leqslant \log 3$

$y(\log 3 - \log 4) \leqslant \log 3$

$y \leqslant \frac{\log 3}{\log 3 - \log 4}$

$y \geqslant -3 \cdot 8188$

$\{y | y \geqslant -3 \cdot 8188\}$

(27 $5^{p-2} \leqslant 2^{p}$

الحل: $(p - 2) \log 5 \leqslant p \log 2$

$p \log 5 - 2 \log 5 \leqslant p \log 2$

$p \log 5 - p \log 2 \leqslant 2 \log 5$

$p(\log 5 - \log 2) \leqslant 2 \log 5$

$p \leqslant \frac{2 \log 5}{\log 5 - \log 2}$

$p \leqslant 3 \cdot 5129$

$\{p | p \leqslant 4 \cdot 4190\}$

(28 $2^{4x} \leqslant 20$

الحل: $4x \log 2 \leqslant \log 20$

$x \leqslant \frac{\log 20}{4 \log 2} \rightarrow x \leqslant 1 \cdot 0805$

$\{x | x \leqslant 1 \cdot 0805\}$

(29 $6^{3n} > 36$

الحل: $3n \log 6 > \log 36$

$n > \frac{\log 36}{3 \log 6} \rightarrow n > \frac{2}{3}$

$\{n | n > \frac{2}{3}\}$

أكتب كلا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(30 $\log_3 7$ **الحل:** $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1\bullet 7712$	**(31** $\log_2 16$ **الحل:** $\log_2 16 = \frac{\log 16}{\log 2} = 4$
(32 $\log_4 9$ **الحل:** $\log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} \approx 1\bullet 5850$	**(33** $\log_3 21$ **الحل:** $\log_3 21 = \frac{\log 21}{\log 3} \approx 2\bullet 7712$
(34 $\log_5 (2\bullet 7)^2$ **الحل:** $\log_5 (2\bullet 7)^2 = \frac{2\log 2\bullet 7}{\log 5} \approx 1\bullet 2343$	**(35** $\log_7 \sqrt{5}$ **الحل:** $\log_7 \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2\log 7} \approx 0\bullet 4135$

41) تحد : حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ **لتجد قيمة x . وفسر كل خطوة .**

الحل: نفرض أن y = $x = a^y$, $(\sqrt{a})^y = 3$ **بالتربيع** $\leftarrow \log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$

$9 = a^y \leftarrow$ **x = 9**

43) برهان : أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ ، $\log_{27} 3$ **واكتب تخمينا حول العلاقة بين** $\log_b a$ ، $\log_a b$ **وبرهن تخمينك .**

الحل: $\log_{27} 3 = \log_{27} (27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_{27} 27 = \frac{1}{3}$

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3$$

$\log_a b = \frac{1}{9}\log_b a$ $\leftarrow$ **بوضع a = 27 , b = 3**

مراجعة تراكمية :

حل كل معادلة مما يأتي ، وتحقق من صحة حلك :

(45 $\log_5 7 + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 x$
(46 $2\log_2 x - \log_2 (x+3) = 2$
(47 $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

حل كل متباينة مما يأتي ، وتحقق من صحة حلك :

(48 $\log_8 (3y-1) < \log_8 (y+5) = x$
(49 $\log_9 (9x+4) \leqslant \log_9 (11x-12)$

50) افرض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم ، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة . تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ **لتقدير عدد السنوات t ليصبح هذا النوع من الطيور p طائرا . بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر ؟**

A) سنتان **B) 5 سنوات** **(C 3 سنوات** **D) 8 سنوات**

الحل: $t = \log_{0.95} \frac{3000}{3500} \approx 3$ **→ (C الإجابة**

51)أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $g(x) = x - 5$ ، $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ؟

A) $x^2 + 4x - 2$ **(B** $x^2 - 6x + 8$ **C)** $x^2 - 9x + 23$ **D)** $x^2 - 14x + 6$

الحل: $f[g(x)] = f(x-5) = (x-5)^2 + 4(x-5) + 3$

$= x^2 - 10x + 25 + 4x - 20 + 3 = x^2 - 6x + 8$ **→ (B الإجابة**

52) أي مما يأتي يمثل حلا للمعادلة $27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$ **؟**

(F -4 **G)** -2 **H)** 2 **J)** 4

الحل: $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{5^3}{3^3} \rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1} = (\frac{3}{5})^{-3} \rightarrow x+1=-3$

الإجابة F) $\rightarrow$ **x = - 4**

''

مراجعة الدروس :

2 - 1 تمثيل الدوال الأسية بيانيا

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها :

8) $f(x)=3^x$	**9)** $f(x)=-5(2)^x$
10) $f(x)=3(4)^x-6$	**11)** $f(x)=3^{3x}+5$
12) $f(x)=3(\frac{1}{4})^x+3$	**13)** $f(x)=\frac{3}{5}(\frac{2}{3})^{x-2}+3$

''

14) سكان : يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة ، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل % 3 سنويا .
a) أكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنه .
b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات ؟

''

2 - 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل كل معادلة مما يأتي :

15) $16^x=\frac{1}{64}$	**16)** $3^{4x}=9^{3x+7}$
17) $64^{3n}=8^{2n-3}$	**18)** $8^{3-3y}=256^{4y}$
19) $9^{x-2}=(\frac{1}{81})^{x+2}$	**20)** $27^{3x}=9^{2x-1}$

''

21) بكتيريا : بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية . وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبا .
a) أكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه .

b) ماعدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32 h ؟

،،

3 – 2 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ علي الصورة الأسية

،،

23) أكتب $10^2 = 100$ علي الصورة اللوغاريتمية

،،

أوجد قيمة كل مما يأتي :

24) $\log_4 256$	25) $\log_2 \frac{1}{8}$

،،

مثل الدالتين الآتيتين بيانيا :

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$	27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

،،

4 – 2 خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_5 16 \approx 1 \bullet 7227, \log_5 2 \approx 0 \bullet 4307$ لتقريب قيمة كل مما يأتي :

28) $\log_5 8$	29) $\log_5 64$
30) $\log_5 4$	31) $\log_5 \frac{1}{8}$
32) $\log_5 \frac{1}{2}$	

،،

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة :

33) $\log_3 2x^5 y^2 z^3$
34) $\log_5 ab^{-3} c^4 d^{-2}$

،،

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة :

(35) $3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2(x-4)$
(36) $2\log_2(z-1) - \log_2(2z-1)$

(37) **هزات أرضية :** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يسمي مقياس ريختر ، وتعطي قوة الهزة M بالمعادلة $M = \log_{10} x$ ، حيث x سعة الموجة التي تسبب حركة الأرض . كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت 10 درجات علي مقياس ريختر من سعة هزة أرضية أخري سجلت 7 درجات علي المقياس نفسه ؟

2 – 5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي :

(38) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$	(39) $\log_2 \frac{1}{64} = x$
(40) $\log_4 x$	(41) $\log_5 x$
(42) $\log_9(3x-1) = \log_9(4x)$	
(43) $\log_2(x^2-18) = \log_2(-3x)$	
(44) $\log_3(3x+4) \leqslant \log_3(x-2)$	

(45) **صوت :** استعمل القانون $L = 10\log_{10} R$ ، حيث L ارتفاع الصوت ، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصا يتكلمون في الوقت نفسه مقارنه بارتفاع صوت شخص واحد . علي فرض أن ارتفاع صوت الشخص الواحد يساوي 80 dB .

2 – 6 اللوغاريتمات العشرية

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

(46) $3^x = 15$	(47) $6^{x^2} = 28$
(48) $8^{m+1} = 30$	(49) $12^{r-1} = 7^r$

50) $3^{5n} > 24$	51) $5^{x+2} \leqslant 3^{x}$

---

52) أكتب كلا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

a) $\log_4 11$	b) $\log_2 15$

---

53) استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري ، وتوقع ربحا سنويا نسبته 5% ، وتضاف الأرباح إلي رأس المال كل 4 أشهر . استعمل القانون $A = p(1+\frac{0 \bullet 5}{3})^{3t}$

حيث A المبلغ المتجمع بعد t سنة .

a) كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ المتجمع 15000 ريال ؟

b) كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ المتجمع مثلي المبلغ الأصلي ؟