الوحدة الثامنة

المتجهات

ورقة عمل الثاني عشر العام 8-1 مقدمة في المتجهات

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا. 2- حل مسائل المتجهات وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

الكميات الفيزيائية

كمية غير متجهة (قياسية أو عددية)

هي كمية لها قيمة عددية واحدة، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها مثل الكتلة.

كمية متجهة

هي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات غير المتجهة في كلٍّ مما يأتي:

a. يسير قارب بسرعة 15 km/h.

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب.

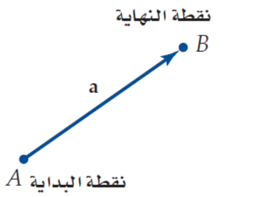
c. وزن شخص على ميزان حمّام.

d. تسير السيارة بسرعة 60 km/h بزاوية °15 في اتجاه الجنوب الشرقي.

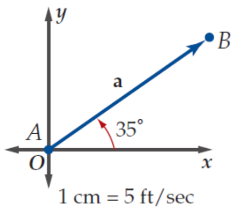
e. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 20.2 km/h .

f. يسحب طفل زلاجة بقوة مقدارها 40 N.

يمكن تمثيل الكمية المتجِهة بسهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل **متجهًا**. ويمثِّل الشكل المجاور المتجه الذي له **نقطة البداية** A، و**نقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\boldsymbol{a}$.



أما **طول المتجه** فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجِهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s ، فإن طول المتجه a ، ويرمز له بالرمز |a| ، يساوي 5 x 2.6 أو 13 ft/s .

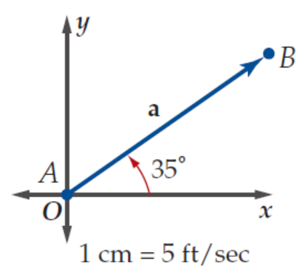


يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.

طرق التعبير عن **اتجاه المتجه** في الوضع القياسي

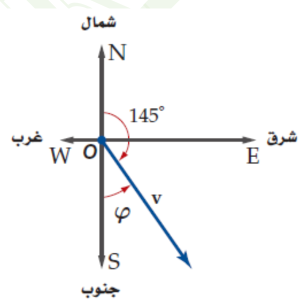
الاتجاه الأفقي

الزاوية التي يصنعها المتجه مع الجزء الموجب لمحور x عكس عقارب الساعة

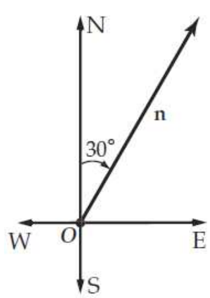


35°

الاتجاه الربعي



S 35° E

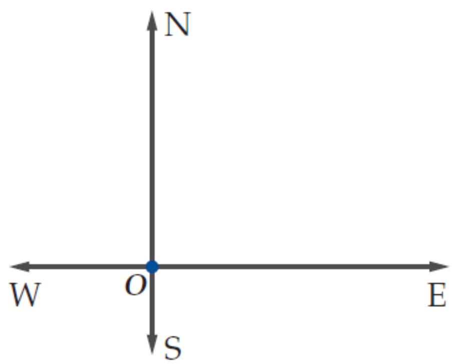


030°

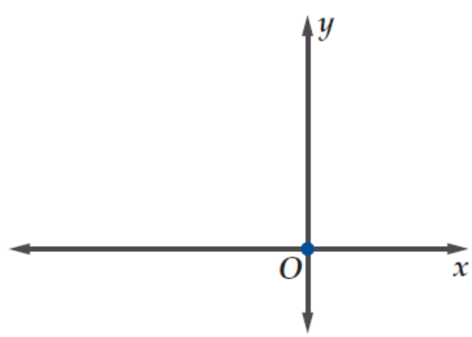
تمثيل المتجه هندسيًا

استخدم مسطرةً أو منقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

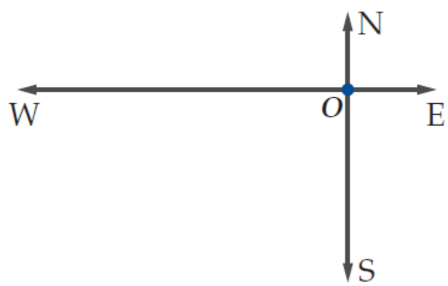
a) $a = 20 \text{ ft/s}$ باتجاه $030°$.



b) $v = 75 \text{ N}$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.

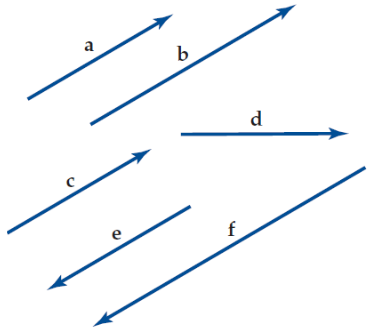


c) $z = 30 \text{ mi/h}$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.



تنبيه! يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثل المسافة المقطوعة.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



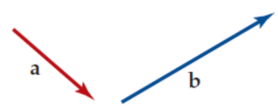
- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور a, c ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $a = c$.
لاحظ أن $a \neq b$ ؛ لأن $|a| \neq |b|$ و $a \neq d$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه a ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-a$، ففي الشكل المجاور $e = -a$.

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، ويسمى المحصّلة أو الناتج. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.

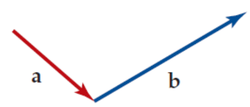
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث (الطرف إلى الذيل)

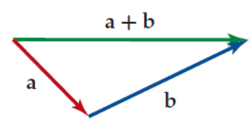
لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b** ، اتبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a** .

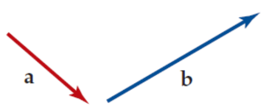


الخطوة 2 محصلة المتجهين **a, b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b** .

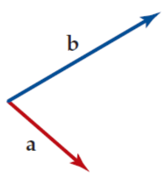


قاعدة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b** ، اتبع الخطوات الآتية :

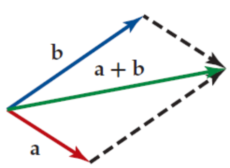


الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a** .



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a, b** .

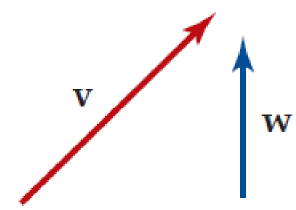
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثله قطر متوازي الأضلاع .

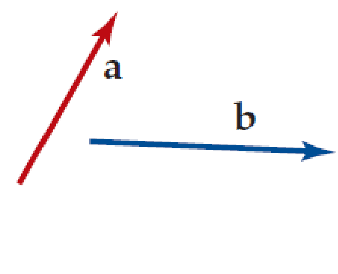


إيجاد محصلة (ناتج) متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.





عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي المتجه الصفري. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0، وليس له اتجاه.

مفهوم أساسي ضرب المتجه في عدد حقيقي

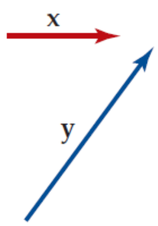
إذا ضُرب المتجه **v** في عدد حقيقي k ينتج المتجه $k\mathbf{v}$ الذي يوازي المتجه **v**، ويكون طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\ |\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه **v** نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه **v** .

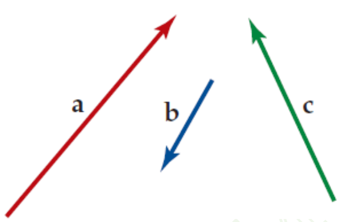
العمليات على المتجهات

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

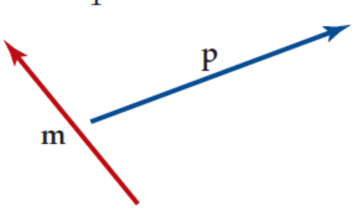
$3x - \frac{3}{4}y$



$\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



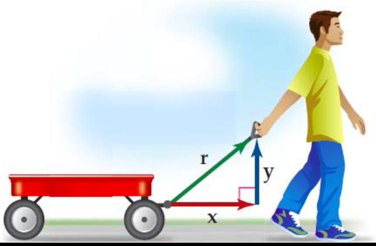
$\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



الطيران تطير طائرة بسرعة جوية 310 km/h باتجاه °050. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78-km/h من اتجاه حقيقي °125، فحدد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

السباحة يسبح إبراهيم في اتجاه الشرق بسرعة 3.5 ft/s عبر نهر متجهًا مباشرة نحو الضفة المقابلة. وفي الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل 2 ft/s . جد سرعة إبراهيم واتجاهه بالنسبة للشاطئ.

تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r، **مركبتي** r. ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.



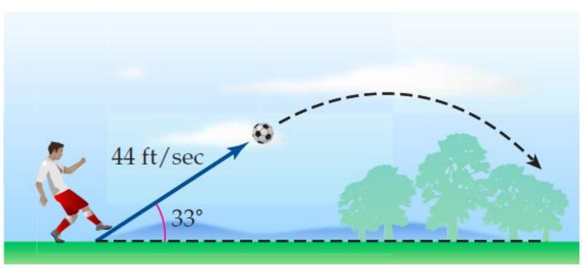
تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها 56° مع الأفقي (سطح الأرض).

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



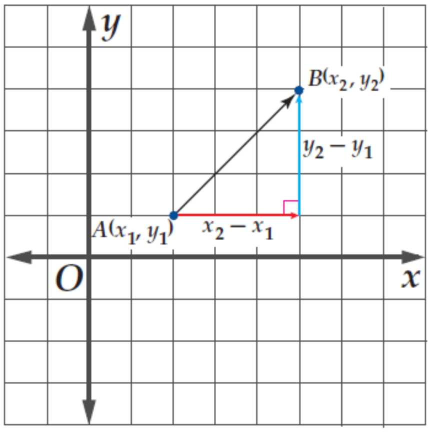
A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

ورقة عمل الثاني عشر العام 8-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي. 2- كتابة المتجه باستخدام متجهي الوحدة.

مفهوم أساسي الصورة الإحداثية لمتجه (المركَّبة)



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية (المركبة)

أوجد الصورة الإحداثية (المركبة) لـ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

$A(-2,-7)\ ,B(6,1)$ $A(0,8)\ ,B(-9,-3$ $A(-4,2)\ ,B(3,-5)$

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن : $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إيجاد طول (مقدار) متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(-2,-7)\ ,B(6,1)$ $A(0,8)\ ,B(-9,-3$ $A(-4,2)\ ,B(3,-5)$

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

العمليات على المتجهات

جد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\boldsymbol{a} = \langle 2, 5 \rangle$, $\boldsymbol{b} = \langle -3, 0 \rangle$, $\boldsymbol{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

$2\boldsymbol{c} + 4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$

متجهات الوحدة: يُسمّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز u ، ولإيجاد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه v على طوله |v| .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

العمليات على المتجهات

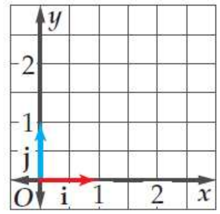
أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

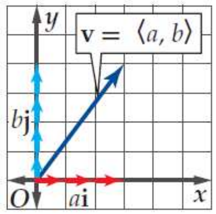
$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ ، $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

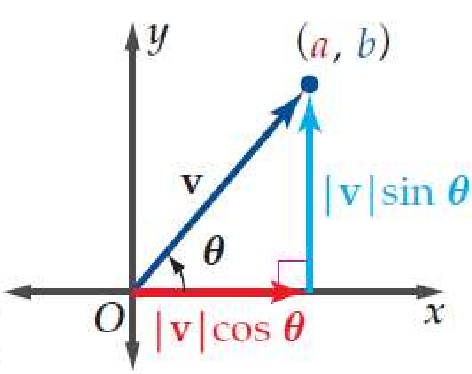
اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

$D(-6, 0), E(2, 5)$

$D(-3, -8), E(7, 1)$

$D(-2, 3), E(4, 5)$

يمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ ، باستخدام زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x. فمن الشكل يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصور:



$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta\rangle$	عوّض
$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\mathbf{j}$	توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

إيجاد الصورة الإحداثية (المركبة) لمتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي:

$|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

$|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

طوله 10 ، وزاوية اتجاهه °120 مع الأفقي.

يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي بحل المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}| \sin\theta}{|\mathbf{v}| \cos\theta} = \frac{b}{a}$

زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

$-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

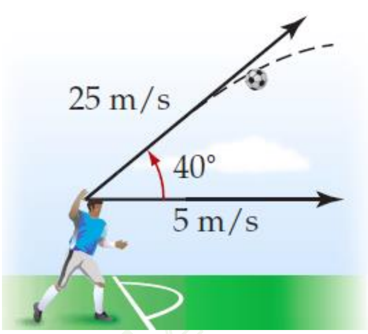
$\langle -3, -8 \rangle$

$\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية °40 مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



ورقة عمل الثاني عشر العام 8-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين. واستخدامه لإيجاد الزاوية بينهما. 2- إيجاد مسقط متجه على آخر.

يعرَّف **الضرب النقطي** للمتجهين $a = \langle a_1, a_2\rangle , b = \langle b_1, b_2\rangle$ كالآتي :

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$$

يكون المتجهان غير الصفريين a , b **متعامدين**، إذا وفقط إذا كان $a \cdot b = 0$

استخدام الضرب النقطي في التحقق من تعامد متجهين

جد حاصل الضرب النقطي للمتجهين u , v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين.

$\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle , \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$

$\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle , \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

خصائص الضرب النقطي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في كمية عددية	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب النقطي للمتجهات الصفرية	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

استخدام الضرب النقطي لإيجاد طول (مقدار) متجه

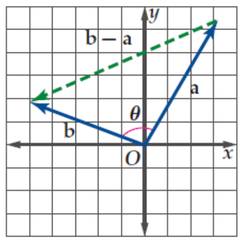
استخدم الضرب النقطي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

$\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$

$\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$

$\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

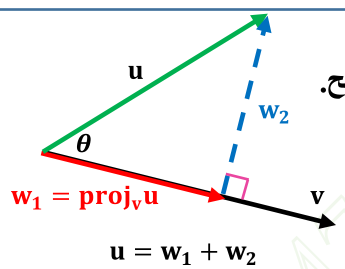
أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

$\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$

إذا كان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهان غير صفريان، وكان $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ مركّبا المتجه $\mathbf{u}$ بحيث $\mathbf{w}_1$ توازي $\mathbf{v}$ كما هو موضح.
فإن المتجه $\mathbf{w}_1$ يسمَّى مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. ويرمز إليه بالرمز $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ و $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$



العمليات على المتجهات

جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, 2 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

جـــد مسقط المتجه $u = \langle 1, 2 \rangle$ على $v = \langle 8, 5 \rangle$. ثم اكتب **u** على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه **u** على **v**.

المسقط في عكس اتجاه v

جـــد مسقط المتجه $u = \langle 4, -3 \rangle$ على المتجه $v = \langle 2, 6 \rangle$. ثم اكتب u على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه u على المتجه v.

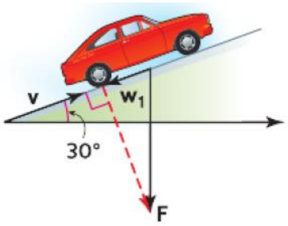
جـــد مسقط المتجه $u = \langle -3, 4 \rangle$ على $v = \langle 6, 1 \rangle$. ثم اكتب **u** على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه **u** على **v**.

إذا كان المتجه **u** يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه **v**. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه **v**) بالقوة **u** (الشكل 8.3.7). القوة المؤثرة هي دفع المركبة في اتجاه $\mathbf{v}$, $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

الشكل 8.3.7

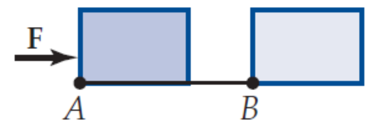
استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة

السيارات تقف سيارة بقوة 13000 N على تل مائل بزاوية 30° كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟

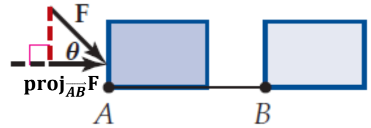


التزلج تجلس خديجة على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية 60° ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن خديجة والزلاجة $550\ N$ ؟

من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول W بواسطة قوة ثابتة F تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B.

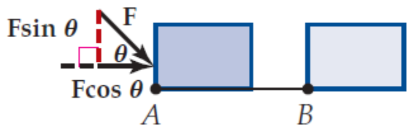


$$\mathbf{W} = |\mathbf{F}|\ |\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$$



$$\mathbf{W} = |\mathbf{proj}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}\mathbf{F}||\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$$

$$\mathbf{W} = |\mathbf{F}|(\cos\theta)\ |\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$$

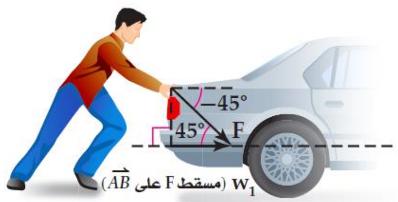


$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

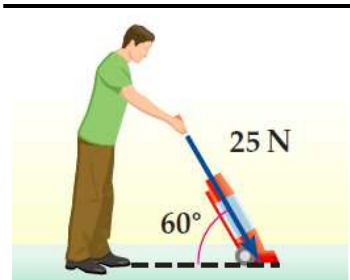
وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم-رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن-متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

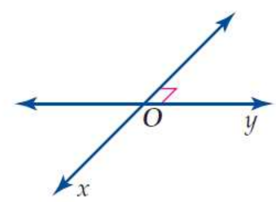


تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟

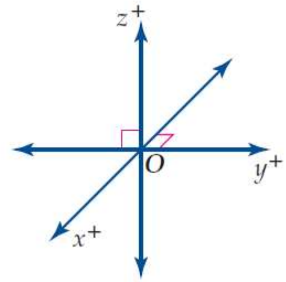


ورقة عمل الثاني عشر العام 8-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

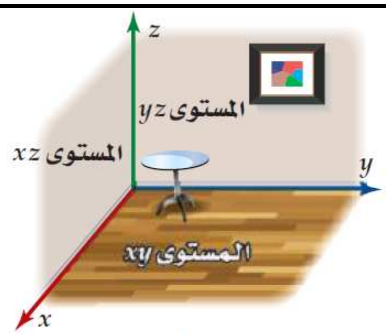
في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. 2- التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا وإجراء العمليات عليها.



الشكل 1.4.1



الشكل 1.4.2



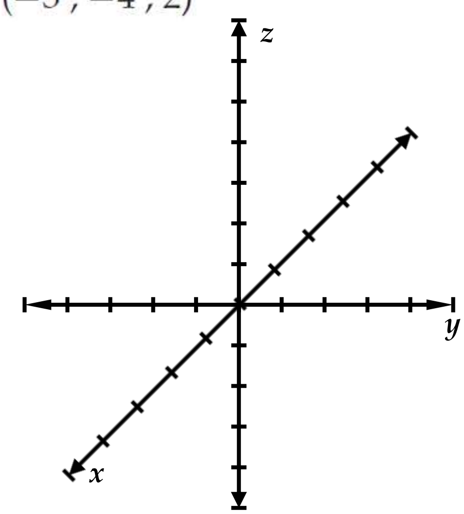
الشكل 1.4.3

تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\,y$ ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

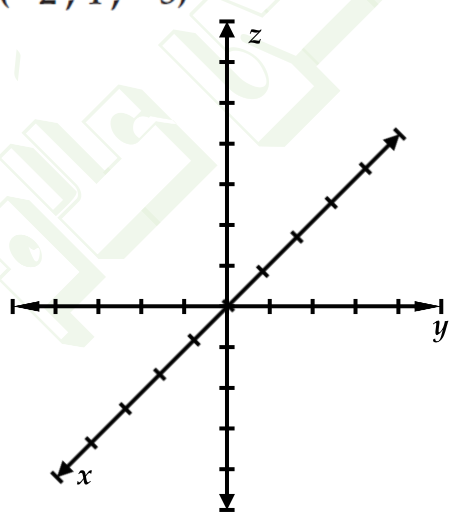
تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

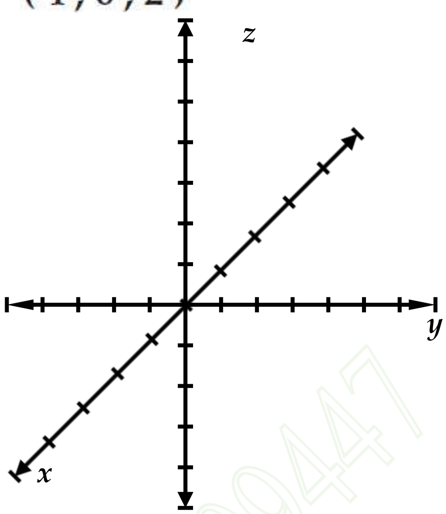
$(-3, -4, 2)$



$(-2, 4, -5)$



$(4, 6, 2)$



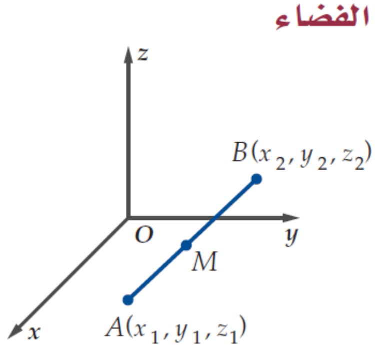
مفهوم أساسي — صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

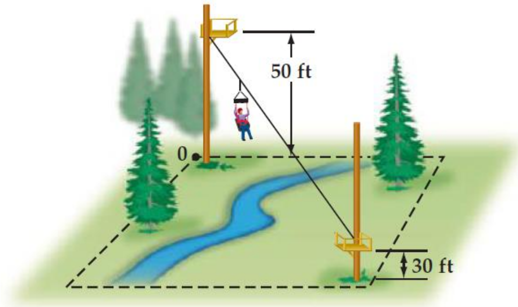
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتين إلى أقرب قدمٍ.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن $0.5\,mi$ في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(300, 150, 30000)$, $(450, -250, 28000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

الميل = 5280 قدمًا

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

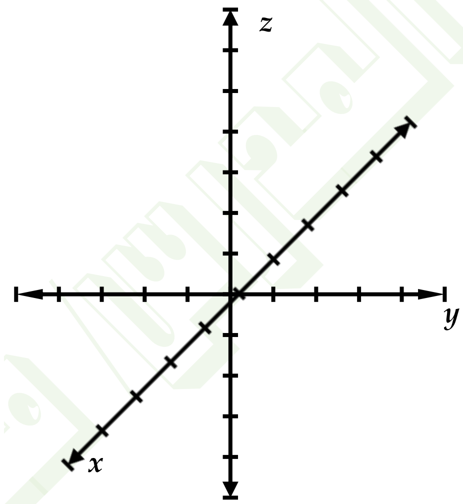
المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ ، كما في الشكل 1.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

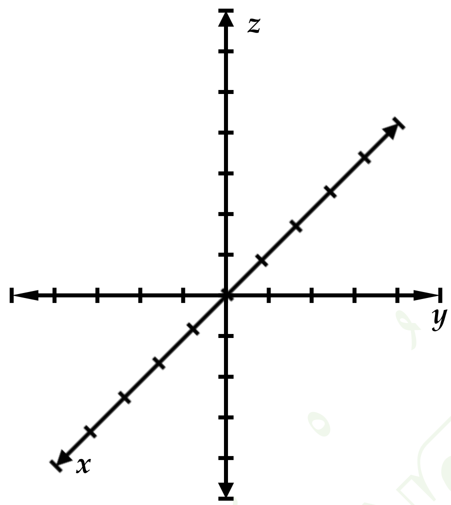
تعيين متجه في الفضاء

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

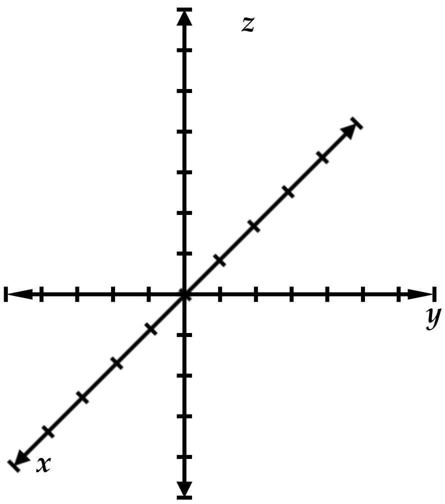
$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$



$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$



التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

جد الصورة المركبة وطول $\overrightarrow{AB}$ (مقدار) المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

$A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

$A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$

$A(-4, -2, 1), B(3, 6, -6)$

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b}) = \langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

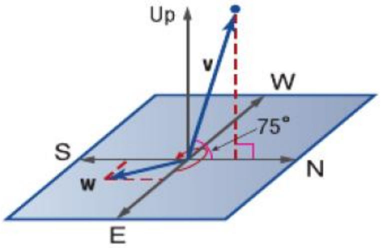
b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

b) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

استخدام المتجهات في الفضاء



الصواريخ بعد انطلاق صاروخ نموذجي متجه نحو الشمال بزاوية صعود 75° بالنسبة إلى المركبة الأفقية بسرعة 320 km/h. فإذا هبت الرياح من الاتجاه الشمالي الغربي بسرعة 8 km/h، جد متجهًا يعبر عن سرعة الصاروخ الناتجة بالنسبة إلى نقطة الانطلاق.

الطيران بعد إقلاع طائرة، تتجه شرقًا وتستمر في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمركبة الأفقية. تبلغ سرعة طيرانها 400 km/h. إذا كانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 16 km/h، فجد المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة الناتجة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. وافترض أن i يتجه نحو الشرق و j يتجه نحو الشمال و k يتجه لأعلى.

ورقة عمل الثاني عشر العام 8-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي في الفضاء

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين متجهات في الفضاء.

2- إيجاد قيمة ناتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء واستخدامه في إيجاد المساحة والحجم.

مفهوم أساسي الضرب النقطي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعَرَّف الضرب **النقطي** للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

إيجاد الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب النقطي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

$\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

$\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

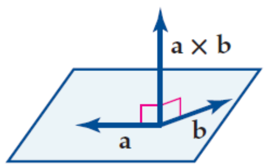
الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ إلى أقرب جزء من عشرة:

$\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$

الضرب المتجهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب النقطي، فإن الضرب المتجهي لمتجهين a , b هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز a x b ، ويقرأ a cross b ، ويكون المتجه a x b عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين a , b



مفهوم أساسي الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة **i, j, k** في الصف 1
بوضع إحداثيات **a** في الصف 2
بوضع إحداثيات **b** في الصف 3

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

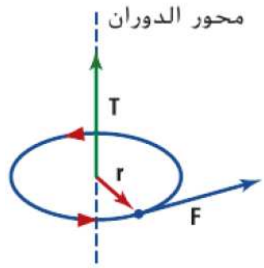
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

إيجاد الضرب المتجهي لمتجهين في الفضاء

أوجد الضرب المتجهي للمتجهين u , v في كلٍّ مما يأتي، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلًّا من u , v :

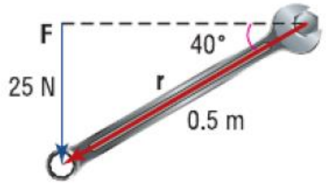
$\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

$\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$



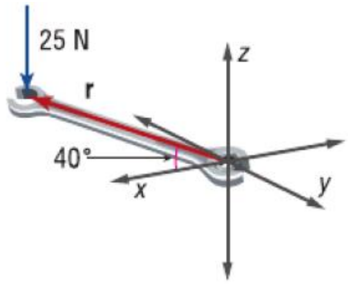
يمكنك استخدام ناتج الضرب المتجهي لإيجاد كمية المتجه المسمى **العزم**. ويقيس العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره. يكون متجه العزم **T** عموديًا على المستوى الذي يحتوي على المسافة الموجهة **r** من محور الدوران إلى نقطة القوة المبذولة ونقطة القوة المبذولة **F** كما هو موضح. وبالتالي، متجه العزم يساوي $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ويقاس بالنيوتن متر $(N \cdot m)$.

العزم باستخدام الضرب المتجهي

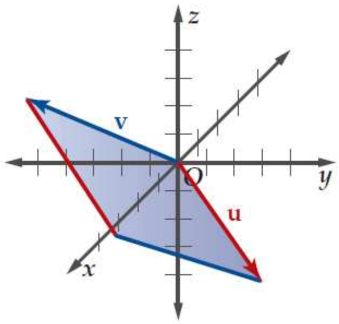


إصلاح السيارات **يستخدم طارق مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 cm أو 0.5 m. جد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 N لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون 40° أسفل محور x الموجب كما هو موضح.**

إصلاح السيارات جـــد مقدار العزم إذا بذل طارق نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشر عندما يكوّن ذراع التوجيه زاوية $40°$ أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل.



عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447



مقدار المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ أو المقدار $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل .

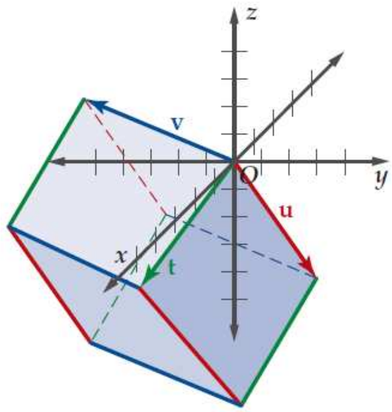
مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

$u = 2i + 4j - 3k \quad , v = i - 5j + 3k$

$u = -6i -2j + 3k \quad , v = 4i +3j + k$

إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تُكَوِّن أحرفًا متجاورةً لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجه، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل المجاور، إن القيمة المطلقة للضرب النقطي لهذه المتجهات هو عدد يمثِّل حجم متوازي السطوح.



مفهوم أساسي **الضرب النقطي الثلاثي**

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب **النقطي** الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه t , u , v أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي:

$t = 4i - 2j - 2k \quad , u = 2i + 4j - 3k \quad , v = i - 5j + 3k$

$t = 2j - 5k \quad , u = -6i - 2j + 3k \quad , v = 4i + 3j + k$

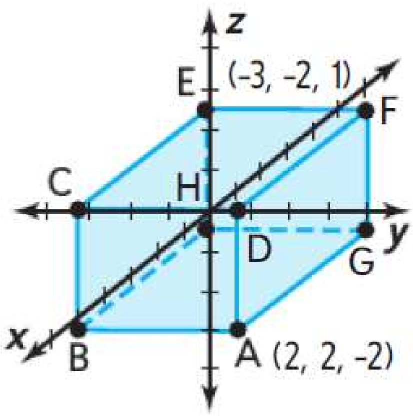
ورقة عمل الثاني عشر العام **8-6** **مصفوفات التحويلات في الفضاء ثلاثي الأبعاد**

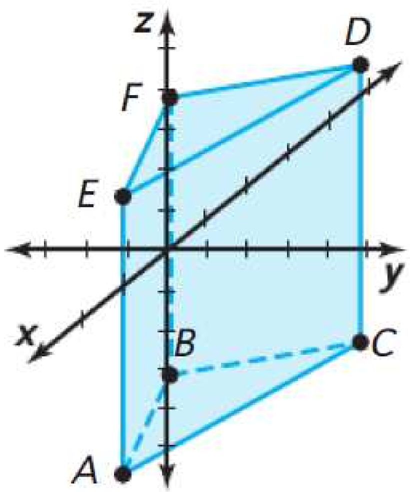
في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- تحويل الأشكال ثلاثية الأبعاد باستخدام عمليات المصفوفات لوصف التحويل.

إيجاد إحداثيات الرؤوس وتمثيلها في صورة مصفوفة الرؤوس

جــد إحداثيات رؤوس المنشور المستطيل ومثّلها في صورة مصفوفة الرؤوس.





تحتاج إلى إزاحة منشور باستخدام المتجه $\vec{a} = \langle 3, 3, 0 \rangle$.
لدى رؤوس المنشور الإحداثيات التالية.

$A(2, 1, -4)$ $\quad$ $B(-1, -1, -4)$ $\quad$ $C(-2, 3, -4)$

$D(-2, 3, 3)$ $\quad$ $E(2, 1, 3)$ $\quad$ $F(-1, -1, 3)$

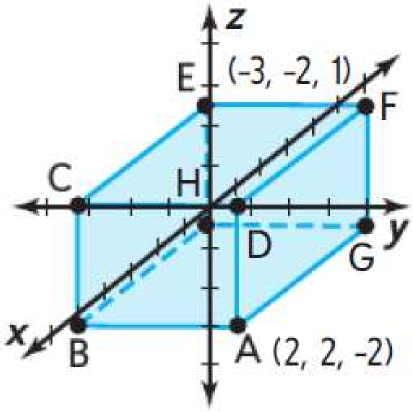
a. اكتب مصفوفة سيكون لديها مثل ذلك التأثير على الشكل.

b. جـد إحداثيات رؤوس الصورة المزاحة.

c. مثّل الصورة المزاحة بيانيًا.

افترض أن M يمثل مصفوفة رأس المنشور المستطيل المجاور:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

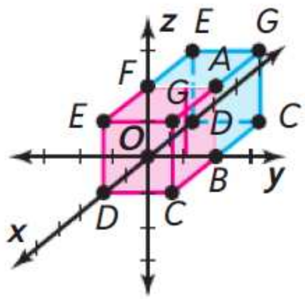
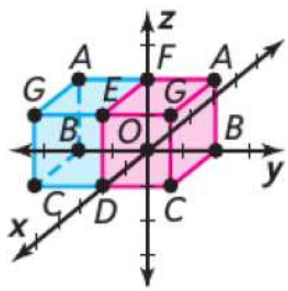
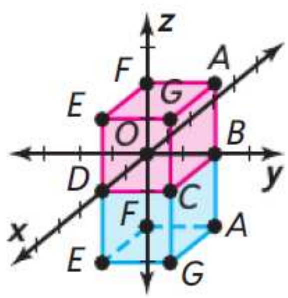


a. جـد TM إذا كان $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b. مثّل الصورة الناتجة بيانيًا.

c. صِف التحويل الذي تمثله المصفوفة T.

يتم تلخيص مصفوفات تحويلات الانعكاسات عبر المستويات yz , xz , xy في المخطط التالي:

مصفوفات الانعكاس		
بالنسبة لانعكاس على:	**اضرب مصفوفة الرؤوس في:**	**الصورة الناتجة**
المستوى yz	$R_{yz\text{-المستوى}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
المستوى xz	$R_{xz\text{-المستوى}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
المستوى xy	$R_{xy\text{-المستوى}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	

يمكن تمثيل تغيير الأبعاد بمعامل مقياس k، عند $k \neq 0$ ، من خلال المصفوفة D

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

الرسوم المتحركة الحاسوبية (تغيير الأبعاد ـ التمدد)

متوازي المستطيلات هو منشور تكون جميع وجوهه متوازيات أضلاع كما هو موضح في التمثيل البياني.

a. جــد مصفوفة الرؤوس للتحويل D حيث $k = 2$.

b. ارسم تمثيلًا بيانيًا للشكل الناتج.

c. ما التأثير الذي يحدثه D على الشكل الأصلي؟