تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف أوراق عمل ملزمة الوحدة السادسة أنظمة المعادلات والمصفوفات
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر العام ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العام			
روابط مواد الصف الثاني عشر العام على تلغرام			
التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العام والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
1	كل مايخص الاختبار التكويني لمادة الرياضيات للصف الثاني عشر يوم الأحد 9/2/2020
2	دليل المعلم الجزء الثاني
3	ملخص حل أنظمة المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة وطريقة كرامر بخط اليد
4	حل بعض صفحات كتاب النشاط التفاعلي
5	حل معادلات القطع الناقص بخط اليد

الوحدة السادسة

أنظمة المعادلات

050-2509447

ورقة عمل الثاني عشر العام — 6-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس.

2- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس – جوردان.

النظام في صورة نموذج درجة الصف

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 5 \\ y + 4z &= -5 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

يطلق على الخوارزمية المستخدمة لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ في صورة نموذج درجة الصف اسم **حذف جاوس** (أو اختزال جاوس)

حذف جاوس مع نظام

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حلّ النظام.

Write the system of equations in triangular form using Gaussian elimination. Then solve the system.

$$\begin{aligned} 5x - 5y - 5z &= 35 \\ -x + 2y - 3z &= -12 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 8z &= -20 \\ -x + 2y - 4z &= 18 \\ -6x + 4z &= 0 \end{aligned}$$

المصفوفة الموَسَّعة هي نظام مكون من المعاملات والحدود الثابتة للمعادلات الخطية.

كتابة مصفوفة موَسَّعة

Write the augmented matrix for the system of linear equations. اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية التالي.

$$w + 4x + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$w - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y = 9$$

$$-3w + 7x + y = 21$$
$$4w - 12y + 8z = 5$$
$$16w - 14y + z = -2$$
$$w + x + 2y = 7$$

المفهوم الأساسي نموذج درجة الصف

تكون المصفوفة في صورة نموذج درجة الصف إذا تم استيفاء الشروط التالية.

- تظهر الصفوف التي تتكون من أصفار تمامًا (إن وُجدت) في نهاية المصفوفة.
- تكون قيمة المدخلة غير الصفري الأول في الصف هي 1. ويسمى *المعامل الرئيس* 1.
- بالنسبة للصفين المتتالين اللذين يتمتعان بمدخلات غير صفرية، يكون المعامل الرئيس 1 في الصف الأعلى أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيس في الصف الأدنى.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

تحديد المصفوفة الموَسَّعة في صورة نموذج درجة الصف

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$

b. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 2 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right]$

حذف جاوس مع مصفوفة

السفر ذهب محمد إلى إيطاليا أثناء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها. اكتب نظامًا للمعادلات وجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	البندقية	روما	نابولي	الإجمالي
الفنادق	AED 60	AED 120	AED 60	AED 720
الطعام	AED 40	AED 90	AED 30	AED 490
وسائل النقل	AED 15	AED 10	AED 20	AED 130

السفر في العام التالي، سافر محمد إلى فرنسا لقضاء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها في فرنسا. اكتب نظامًا للمعادلات وأوجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	باريس	ليون	مارسيليا	الإجمالي
الفنادق	AED 80	AED 70	AED 80	AED 500
الطعام	AED 50	AED 40	AED 50	AED 330
وسائل النقل	AED 10	AED 10	AED 10	AED 70

نموذج درجة الصف المنخفض

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

يطلق على حل النظام من مصفوفة موسعة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف المنخفض اسم **حذف جاوس - جوردان**.

استخدام طريقة حذف جاوس - جوردان

جد حلاً لنظام المعادلات.

Solve each system of equations.

$$x - y + z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = -5$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

$$4x + 9y + 16z = 2$$
$$-x - 2y - 4z = -1$$
$$2x + 4y + 9z = -5$$

Solve each system of equations.

جد حلاً لنظام المعادلات.

$-5x - 2y + z = 2$

$4x - y - 6z = 2$

$-3x - y + z = 1$

$3x + 5y - 8z = -3$

$2x + 5y - 2z = -7$

$-x - y + 4z = -1$

نظام لديه عدد أقل من المعادلات مقارنة بالمتغيرات

Solve each system of equations.

جد حلاً لنظام المعادلات.

$3x - 8y + 19z - 12w = 6$

$2x - 4y + 10z = -8$

$x - 3y + 5z - 2w = -1$

$3w + x - 2y - 3z = 14$

$-w + x - 10y + z = -11$

$-2w - x + 4y + 2z = -9$

ورقة عمل الثاني عشر العام **6-2 ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات**

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- ضرب المصفوفات. 2- إيجاد معكوسات المصفوفات 2 x 2 والمصفوفات 3 x 3 .

ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 6\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.

a. ***AB***
b. ***BA***

جد ***AB*** و ***BA***؛ إن أمكن.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 5 & -7 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفة

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي كمية قياسية k. تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة $(AB)C = A(BC)$

خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

خاصية التوزيع إلى اليسار $C(A + B) = CA + CB$

خاصية التوزيع إلى اليمين $(A + B)C = AC + BC$

من الحياة اليومية: ضرب المصفوفات

التصويت توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18–25	26–40	41–50	50+
الديموقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18–25	18,500	16,000
26–40	20,000	24,000
41–50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

الشرح إن المصفوفة المحايدة ذات الـــرتبة n، المعبر عنها بواسطة I_n، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع المُدخلات الأخرى.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

معادلة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$A \quad \times X = B$

حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$$
$$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

يطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$.

فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A وتكتب بالصورة A^{-1}. إذًا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

التحقق من المصفوفة العكسية

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

$$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة

إذا كان للمصفوفة **A** معكوس. يقال إن المصفوفة **A** **قابلة للعكس أو لها معكوس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس.

ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$.

1. اكتب المصفوفة الموسعة $[A \mid I_n]$.
2. أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة A صورة مستوى الصف المنخفض.
3. قرر إن كانت A لها معكوس.
   - إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة I_n، فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة $[I_n \mid A^{-1}]$.
   - إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة I_n، فإن A مصفوفة منفردة.

جد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

المفهوم الأساسي محدد ومعكوس المصفوفة 2 × 2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$. وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ يُسمى **مُحَدِّد** المصفوفة 2 × 2 ويُعبَّر عنه بواسطة $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

محدد ومعكوس المصفوفة 2 x 2

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجدت.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3 × 3

افترض $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. إذًا $\det(A)=|A|=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

محدد ومعكوس مصفوفة 3 x 3

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوسها، إن وُجدت.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ورقة عمل الثاني عشر العام — 6-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات العكسية. 2- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**.
وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$، حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$

إيجاد حل نظام 2x2 باستخدام مصفوفة عكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

Use an inverse matrix to solve the system of equations, if possible.

$2x - 3y = -1$
$-3x + 5y = 3$

لحل نظام معادلات 3 × 3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

إيجاد حل نظام 3x3 باستخدام مصفوفة عكسية

المعرفة المالية تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الأخريين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $\det(A) = 0$، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2x2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

$$-9x + 3y = 8$$
$$2x - y = -3$$

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3x3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$-x - 2y = -4z + 12$$
$$3x - 6y + z = 15$$
$$2x + 5y + 1 = 0$$

$$8x + 12y - 24z = -40$$
$$3x - 8y + 12z = 23$$
$$2x + 3y - 6z = -10$$

ورقة عمل الثاني عشر العام **6-4 نمذجة الحركة باستخدام المصفوفات**

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- استخدام المصفوفات لتحديد إحداثيات المضلعات في تحويل معطى.

مصفوفة الإزاحة

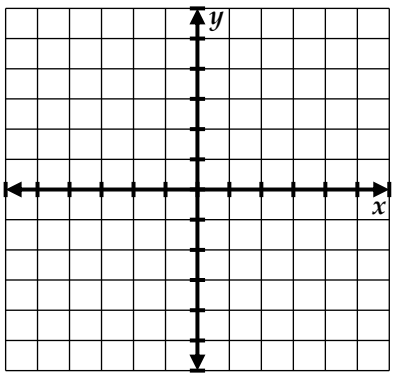
على فرض الشكل الرباعي ABCD له الرؤوس $A(-1, 1)$ و $B(4, 0)$ و $C(4, -5)$ و $D(1, -3)$ تم ازاحته بمقدار وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى الأعلى.

a. مثّل رؤوس الشكل الرباعي كمصفوفة.

b. اكتب مصفوفة الإزاحة.

c. استخدم مصفوفة الإزاحة لإيجاد رؤوس $A'B'C'D'$، صورة الشكل الرباعي A,B,C,D بالازاحة

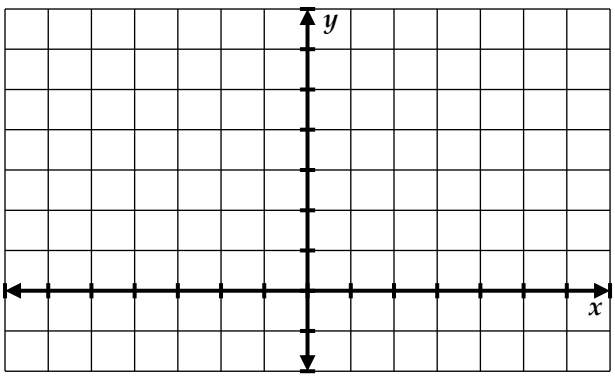
d. ارسم الشكل الرباعي ABCD وصورته.



مصفوفات الانعكاس		
للانعكاس في:	يرمز إليها بـ:	اضرب مصفوفة الرأس في:
المحور x	المحور R_x	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
المحور y	المحور R_y	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
لمستقيم $y = x$	$R_{y=x}$	$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

مصفوفة الانعكاس

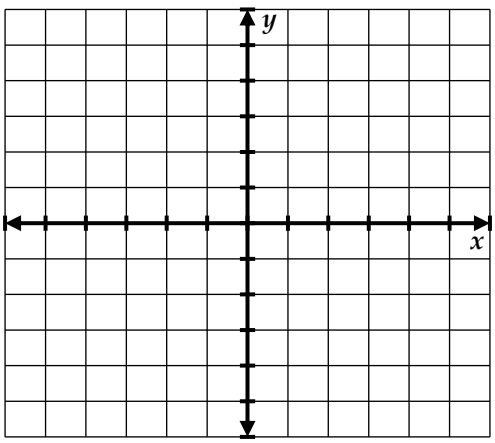
الرسوم المتحركة لإنشاء صورة تظهر معكوسة في المرآة، ستستخدم الرسوم المتحركة مصفوفة لعكس صورة في المحور y. استخدم مصفوفة انعكاس لإيجاد إحداثيات رؤوس نجمة معكوسة في المرآة (المحور y) إذا كانت إحداثيات النقاط المرتبطة لإنشاء النجمة هي $(-2, 4)$ و $(-3.5, 4)$ و $(-4, 5)$ و $(-4.5, 4)$ و $(-6, 4)$ و $(-5, 3)$ و $(-5, 1)$ و $(-4, 2)$ و $(-3, 1)$ و $(-3, 3)$.



مصفوفات الدوران		
للدوران باتجاه معاكس لعقارب الساعة حول نقطة الأصل لـ	يرمز إليها بـ:	اضرب مصفوفة الرأس في:
90°	Rot_{90}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
180°	Rot_{180}	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
270°	Rot_{270}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

مصفوفة الدوران

الرسوم المتحركة على فرض أنّه يتم رسم الشكل المتحرّك لكي يدور حول نقطة معينة. إنّ صور الدوران المتعدد ضرورية من أجل تسهيل تحريك الصورة. إذا كانت الصورة تحتوي على نقاط رئيسية عند $(1, 1)$ و $(-1, 4)$ و $(-2, 4)$ و $(-2, 3)$ والدوران مرتبط بنقطة الأصل، جد موقع هذه النقاط عند $90°$ و $180°$ و $270°$ والدورانات باتجاه معاكس لعقارب الساعة.



التمدد (التكبير أو التصغير)

شبه منحرف رؤوسه النقاط $L(-4, 1)$ و $M(1, 4)$ و $N(7, 0)$ و $P(-3, -6)$. جـد إحداثيات شبه المنحرف $L'M'N'P'$ صورة شبه المنحرف $LMNP$ لمعامل المقياس 0.5 صف التمدد