ورقة عمل الثاني عشر العام 2-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود الاسم:____________

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود. 2- إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

توضح **نظرية الصفر النسبي** كيف يمكن استخدام معامل الحد الرئيس والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

p ← عوامل الحد الثابت
q ← عوامل الحد الرئيس

معامل الحد الرئيس يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

$f(x) = x^3 + 2x + 1$ ← $q = 1$ ، $p = 1$

الأصفار الممكنة $= \pm \frac{p}{q} \Rightarrow 1 , -1$

نستخدم التعويض المباشر لاختبار كل صفر ممكن

$(1)^3 + 2(1) + 1 = 4 \Rightarrow$ 1 ليس صفر

$(-1)^3 + 2(-1) + 1 = -2 \Rightarrow$ -1 ليس صفر

← نظرية الصفر النسبي ⇐ لا يوجد صفر نسبي لهذه الدالة.

ملحوظة: الدالة ذات الدرجة الفردية لابد أن يكون لها صفر واحد حقيقي على الأقل وفي هذا الفرع يوجد صفر حقيقي ولكنه غير نسبي.

$g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$ ← $q = 1$ ، $p = 1, 3, 9$

الأصفار الممكنة ← $\pm 1 , \pm 3 , \pm 9$

نختبر الصفر $\boxed{1}$ باستخدام التعويض التركيبي

1	1	4	0	-12	-9
		1	5	5	-7
	1	5	5	-7	-16

⇐ 1 ليس صفر لأن الباقي ≠ 0

نختبر الصفر $\boxed{-1}$ باستخدام التعويض التركيبي

-1	1	4	0	-12	-9
		-1	-3	3	9
	1	3	-3	-9	0

⇐ -1 صفر للدالة لأن الباقي = 0

نختبر -3 على الدالة كثيرة حدود المنخفضة

-3	1	3	-3	-9
		-3	0	9
	1	0	-3	0

-3 صفر للدالة لأن الباقي = 0

$\Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

ولكن $\pm\sqrt{3}$ أصفار غير نسبية

الأصفار النسبية للدالة هي -1 و -3 فقط

$h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30$ ← $q = 1$ ، $p = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

الأصفار النسبية الممكنة ← $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

نختبر 2 ←

2	1	3	-7	9	-30
		2	10	6	30
	1	5	3	15	0

لأن الباقي = 0 ← 2 صفر من أصفار الدالة

نختبر -5 في كثيرة الحدود المخفضة ←

-5	1	5	3	15
		-5	0	-15
	1	0	3	0

لأن الباقي = 0 فإن -5 صفر من أصفار الدالة

$x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3}$ ← غير نسبي غير حقيقي

الأصفار النسبية هي -5 و 2 فقط

$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$ ← $q = 1$ ، $p = 1, 2$

الأصفار النسبية الممكنة ← $\pm 1 , \pm 2$

نختبر 1 ←

1	1	5	-4	-2
		1	6	2
	1	6	2	0

لأن الباقي 0 ← 1 صفر من أصفار الدالة

$x^2 + 6x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{7}$

أصفار غير نسبية

الصفر النسبي الوحيد للدالة هو $\boxed{1}$

معامل الحد الرئيس لا يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

$q: 1, 3$

$h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8 \rightarrow P = 1, 2, 4, 8$

الأصفار النسبية الممكنة ← $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 8, \pm \frac{8}{3}$

بعد اختبار بعض الأصفار إلى أن نصل للصفر -2 ← باستخدام التعويض التركيبي

-2 صفر نسبي للدالة لأن الباقي = 0

$$\begin{array}{r|rrr|r} -2 & 3 & -7 & -22 & 8 \\ & & -6 & 26 & -8 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array}$$

$3x^2 - 13x + 4 = 0$

$(3x - 1)(x - 4) = 0$

$x = \frac{1}{3}, \quad x = 4$

$\Rightarrow$ الأصفار النسبية للدالة هي

$-2, \frac{1}{3}, 4$

$q = 1, 2$

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 18x - 36 \rightarrow P = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

الأصفار النسبية الممكنة ← $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm 12, \pm 18, \pm 36$

بعد تجريب اختبارات الأصفار نجد الصفر 2 باستخدام التعويض التركيبي ←

$$\begin{array}{r|rrr|r} 2 & 2 & -4 & 18 & -36 \\ & & 4 & 0 & 36 \\ \hline & 2 & 0 & 18 & 0 \end{array}$$

لأن الباقي = 0 ← 2 صفر من أصفار الدالة

$2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \longrightarrow$ غير حقيقي

الصفر النسبي الوحيد لهذه الدالة هو $\boxed{2}$

$1, 3$

$f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21 \rightarrow P: 1, 3, 7, 21$

الأصفار النسبية الممكنة ← $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 3, \pm 7, \pm \frac{7}{3}, \pm 21$

بعد اختبار كل هذه الأصفار نجد أن جميع هذه الأصفار ليست أصفاراً للدالة

وبذلك نستنتج أن هذه الدالة ليس لها أصفار نسبية.

حل معادلة كثيرة الحدود

الأعمال بعد أول نصف ساعة، يمكن تمثيل عدد ألعاب الفيديو التي باعتها الشركة في تاريخ الإصدار كما يلي $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المبيعة بالمئات و x عدد الساعات بعد الإصدار. ما الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة؟

400 لعبة ⇐ $g(x) = 4$ ← 4 تعني 400 لعبة

$\Rightarrow 2x^3 + 4x^2 - 2x = 4$

$2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$

حسب نظرية الصفر النسبي فإن الأصفار النسبية الممكنة هي

$\frac{1, 2, 4}{1, 2} \Rightarrow \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4,$

مع اختبار هذه الأصفار نجد أن 1 ← صفر من أصفار الدالة لأن الباقي = 0

1	2	4	-2	-4
		2	6	4
	2	6	4	0

$\Rightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0 \quad (\div 2)$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x+1)(x+2) = 0$

$x = -1 \quad , \quad x = -2 \rightarrow$ (لا يوجد زمن بالسالب) مرفوضة

الأصفار هي $1 , -2 , -1$
ولكن الحل الوحيد المناسب لعدد الساعات هو 1
يستغرق ساعة زمن لبيع 400 لعبة.

الكرة الطائرة فيما يلي التمثيل البياني لكرة طائرة عادت بعد ضربها بسرعة أولية 40 مترًا في الثانية بارتفاع 4 مترًا $f(t) = 4 + 40t - 16t^2$، بحيث $f(t)$ يمثل ارتفاع الكرة بالقدم و t يمثل الزمن بالثواني. ما الزمن الذي ستصل به الكرة إلى ارتفاع 20 ~~مترًا~~ قدم؟

$f(t) = 20$ ft

$\Rightarrow -16t^2 + 40t + 4 = 20$

$-16t^2 + 40t - 16 = 0 \rightarrow \div(-8)$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$(2t - 1)(t - 2)$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2} \quad , \quad t = 2$

تصل الكرة إلى ارتفاع 20 ft بعد مرور $\frac{1}{2}$ ثانية وبعد مرور 2 ثانية

استخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

اختبارات القيمتين العظمى والصغرى لأصفار الدالة

لنفرض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية ومعامل الحد الرئيس موجب. لنفرض أن $f(x)$ تمت قسمته على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب وغير موجب، فإن c هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية للدالة f
- إذا كان $c \geq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن c هي قيمة عظمى للأصفار الحقيقية للدالة f

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

$h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$

من خلال رسم الدالة بيانياً بالآلة ← نجد أن الأصفار الحقيقية تقع في الفترة $[-1, 7]$

* نختبر -1 ← باستخدام التعويض التركيبي ←

-1	2	-11	2	-44	-24
		-2	13	-15	59
	2	-13	15	-59	35

→ لأن $c = -1$ ليس موجب والسطر الأخير تبادل بين سالب مع غير موجب

تكون $c = -1$ هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية.

* نختبر $+7$ ← باستخدام التعويض التركيبي ←

7	2	-11	2	-44	-24
		14	21	161	819
	2	3	23	117	795

لأن $c = 7$ ليس سالب والسطر الأخير كله غير سالب

تكون $c = 7$ هي القيمة العظمى للأصفار الحقيقية.

حسب نظرية الصفر النسبي ← الأصفار النسبية الممكنة هي

$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ / $1, 2$

$\Rightarrow \mp 1 \,/\, \mp \frac{1}{2} \,/\, \mp 2 \,/\, \mp \frac{3}{2} \,/\, \mp 3 \,/\, \mp 4 \,/\, \mp 6 \,/\, \mp 8 \,/\, \mp 12 \,/\, \mp 24$

ولكن الأصفار تقع بين $[-1, 7]$ يعني أننا نستطيع تضييق قائمة الأصفار النسبية الممكنة لـ

$\mp 1 \,/\, \mp \frac{1}{2} \,/\, 2 \,/\, \frac{3}{2} \,/\, 3 \,/\, 4 \,/\, 6$

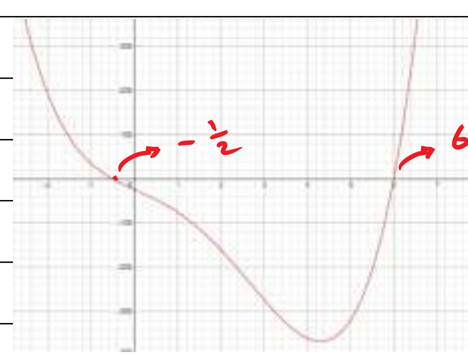
من الرسم يبدو الأصفار عند 6 ، $-\frac{1}{2}$

نختبر $\boxed{6}$ نختبر $-\frac{1}{2}$

6	2	-11	2	-44	-24
		12	6	48	24
	2	1	8	4	0

$\Rightarrow$

$-\frac{1}{2}$	2	1	8	4
		-1	0	-4
	2	0	8	0



$\Rightarrow f(x) = (x-6)(x+\frac{1}{2})\underbrace{(2x^2+8)}$

هذا العامل لا يوجد أصفار حقيقية خاصة به لأن $2x^2 = -8 \Rightarrow x = \mp\sqrt{-4}$

لذلك الدالة لها صفران نسبيان وهما 6 ، $-\frac{1}{2}$

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

$$f(x) = 10x^5 - 50x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 41x + 30$$

من خلال رسم الدالة بالآلة الحاسبة نجد أن الأصفار الحقيقية في الفترة $[-2, 6]$.

نختبر $c = -2$

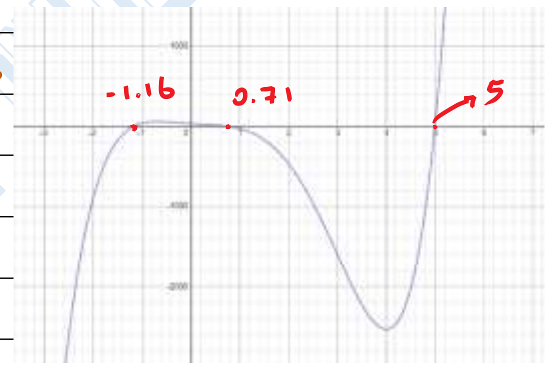
-2	10	-50	-3	22	-41	30
		-20	140	-274	504	-926
	10	-70	137	-252	463	-896

لأن السطر الأخير يتبادل ما بين غير سالب وغير موجب $c \le 0$ فإن $c = -2$ قيمة صغرى للأصفار الحقيقية

نختبر $c = 6$

6	10	-50	-3	22	-41	30
		60	60	342	2184	12858
	10	10	57	364	2143	12828

لأن السطر الأخير كله غير سالب و $c > 0$ فإن $c = 6$ قيمة عظمى للأصفار الحقيقية.



من نظرية الصفر النسبي من الأصفار النسبية الممكنة هي $\frac{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}{1, 2, 5, 10}$

$\Rightarrow \pm 1 \mid \pm\frac{1}{2} \mid \pm\frac{1}{5} \mid \pm\frac{1}{10} \mid \pm 2 \mid \pm\frac{2}{5} \mid \pm 3 \mid \pm\frac{3}{2} \mid \pm\frac{3}{5} \mid \pm\frac{3}{10}$

$\pm 5 \mid \pm\frac{5}{2} \mid \pm 6 \mid \pm\frac{6}{5} \mid \pm 10 \mid \pm 15 \mid \pm\frac{15}{2} \mid \pm 30$

نفحص الأصفار في الفترة $[-2, 6]$

$\Rightarrow \mid \pm 1 \mid \pm\frac{1}{2} \mid \pm\frac{1}{5} \mid \pm\frac{1}{10} \mid \pm 2 \mid \pm\frac{2}{5} \mid 3 \mid \pm\frac{3}{2} \mid \pm\frac{3}{5} \mid$

$\mid \pm\frac{3}{10} \mid 5 \mid \frac{5}{2} \mid 6 \mid \pm\frac{6}{5} \mid$

يتضح من الرسم أن 5 صفر من الأصفار، نختبر $\boxed{5}$

5	10	-50	-3	22	-41	30
		50	0	-15	35	-30
	10	0	-3	7	-6	0

الصفر $\boxed{5}$ من أصفار الدالة

من الرسم أقرب صفر يسار 1- هو $-\frac{6}{5}$ نختبر $-\frac{6}{5} = -1.2$

-1.2	10	-50	-3	22	-41	30
		-12	74.4	-85.68	76.416	-42.4992
	10	-62	71.4	-63.68	35.416	-12.4992

الصفر النسبي الوحيد للاقتران $\boxed{5}$ لأنه إذا قمنا باختبار جميع الأصفار الممكنة في التعويض التركيبي لا يكون الباقي = 0

الأصفار الأخرى من خلال الرسم هي

-1.16 و 0.71

قاعدة ديكارت للإشارات

Describe the possible real zeros of each function. وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.

$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$

تغيرات الإشارات: $g(x) \to - \quad + \quad - \quad -$ الأصفار الموجبة: 2 أو 0

تغيرات الإشارات: $g(-x) \to + \quad + \quad + \quad -$ الأصفار السالبة: 1

عدد الأصفار الموجبة / 2 أو 0

عدد الأصفار السالبة / 1

عدد الأصفار التخيلية / 0 / 2

$h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$

تغيرات الإشارات: $h(x) \to + \quad + \quad - \quad -$ 1 +

تغيرات الإشارات: $h(-x) \to - \quad + \quad + \quad -$ 0 2 −

عدد الأصفار الموجبة / 1

عدد الأصفار السالبة / 2 أو 0

عدد الأصفار التخيلية / 2 أو 4

$f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$

تغيرات الإشارات: $f(x) \to - \quad + \quad + \quad - \quad +$ 1 3 +

تغيرات الإشارات: $f(-x) \to - \quad - \quad + \quad + \quad +$ 1 −

عدد الأصفار الموجبة / 3 أو 1

عدد الأصفار السالبة / 1

عدد الأصفار التخيلية / 0 أو 2

إيجاد دالة كثيرة الحدود أصفارها معلومة

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية مع الأصفار الموضحة.

Write a polynomial function of least degree with real coefficients in standard form with the given zeros.

$-2, 4$, and $(3 - i) \rightarrow (3 + i)$

$(x+2)(x-4)(x-(3-i))(x-(3+i))$

$=(x^2-2x-8)(x-3+i)(x-3-i)$

$=(x^2-2x-8)(x^2-3x-\cancel{xi}-3x+9+\cancel{3i}+\cancel{xi}-\cancel{3i}-i^2)$

$=(x^2-2x-8)(x^2-6x+9-(-1))$

$=(x^2-2x-8)(x^2-6x+10)$

$=(x^4-6x^3+10x^2-2x^3+12x^2-20x-8x^2+48x-80$

$=x^4-8x^3+14x^2+28x-80$

$\Rightarrow f(x)=x^4-8x^3+14x^2+28x-80$

-3, 1 (multiplicity: 2), $4i \rightarrow -4i$

$(x+3)(x-1)(x-1)(x-4i)(x+4i)$

$=(x^2+2x-3)(x-1)(x^2-16i^2)$

$=(x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3)(x^2-16(-1))$

$=(x^3+x^2-5x+3)(x^2+16)$

$=x^5+x^4-5x^3+3x^2+16x^3+16x^2-80x+48$

$=x^5+x^4+11x^3+19x^2-80x+48$

$\Rightarrow f(x)=x^5+x^4+11x^3+19x^2-80x+48$

$2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, (1+i) \rightarrow (1-i)$

$(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x-(1+i))(x-(1-i))$

$=(x^2-4(3))(x-1-i)(x-1+i)$

$=(x^2-12)(x^2-x-\cancel{xi}-x+1+\cancel{i}+\cancel{xi}-\cancel{i}-i^2)$

$=(x^2-12)(x^2-2x+1-(-1))$

$=(x^2-12)(x^2-2x+2)$

$=x^4-12x^2-2x^3+24x+2x^2-24$

$=x^4-2x^3-10x^2+24x-24$

$\Rightarrow f(x)=x^4-2x^3-10x^2+24x-24$

(x^2-3) عامل تربيعي ؛ أي لكنه قابل للاختزال

(x^2+8) عامل تربيعي غير قابل للاختزال

تحليل أصفار الدالة كثيرة الحدود وإيجادها

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج ضرب العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و (b) ناتج ضرب العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.

Write each function as (a) the product of linear and irreducible quadratic factors and (b) the product of linear factors. Then (c) list all of its zeros.

$k(x) = x^5 - 18x^3 + 30x^2 - 19x + 30$

$\frac{p}{q}$: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 ⇒ $\pm1 / \pm2 / \pm3 / \pm5 / \pm6 / \pm10 / \pm15 / \pm30$ ⇐ الأصفار النسبية الممكنة

$k(x) \to + \; - \; + \; - \; +$: تغيرات الإشارة = 4 ⇐ الأصفار الموجبة 4 أو 2 أو 0

$k(-x) \to - \; + \; + \; + \; +$: تغيرات الإشارة = 1 ⇐ الأصفار السالبة 1

من خلال الرسم بالآلة نجد أن 5- صفر حقيقي سالب للدالة ⇐

أيضاً من خلال رسم الآلة نجد أن 2 ، 3 أصفار

-5	1	0	-18	30	-19	30
		-5	25	-35	25	-30
	1	-5	7	-5	6	0

2	1	-5	7	-5	6
		2	-6	2	-6
	1	-3	1	-3	0

3	1	-3	1	-3
		3	0	3
	1	0	1	0

⇒ $x^2 + 1 = 0$

⇒ $k(x) = (x+5)(x-2)(x-3)(x^2+1)$ ← $\boxed{a}$

$k(x) = (x-5)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i)$ ← $\boxed{b}$

$f(x) = x^4 + x^3 - 26x^2 + 4x - 120$

من خلال رسم الدالة نجد أن 6- ، 5 أصفار الدالة

5	1	1	-26	4	-120
		5	30	20	120
	1	6	4	24	0

-6	1	6	4	24
		-6	0	-24
	1	0	4	0

$x^2 + 4 = 0$

⇒ $f(x) = (x+6)(x-5)(x^2+4)$ ⇒ $\boxed{a}$

$f(x) = (x+6)(x-5)(x-2i)(x+2i)$ ⇒ $\boxed{b}$

$f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 99x + 108$

من خلال الرسم البياني بالآلة نجد أن 4 ، 1 ، 3- أصفار حقيقية ⇐

-3	1	-2	-2	-6	-99	108
		-3	15	-39	135	-108
	1	-5	13	-45	36	0

1	1	-5	13	-45	36
		1	-4	9	-36
	1	-4	9	-36	0

4	1	-4	9	-36
		4	0	36
	1	0	9	0

$x^2 + 9 = 0$

⇒ $f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)(x^2+9)$ ← $\boxed{a}$

⇒ $f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)(x-3i)(x+3i)$ ← $\boxed{b}$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام

https://t.me/alllaaam82

قناة ملازم وامتحانات رياضيات

إيجاد أصفار الدالة كثيرة الحدود بمعلومية واحد منها

لكل دالة، استخدم الصفر الموضح لإيجاد جميع الأصفار المركبة للدالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة.

For each function, use the given zero to find all the complex zeros of the function. Then write the linear factorization of the function.

$p(x) = x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 22x - 13$, $2-3i$

استخدم التعويض التركيبي للصفر $2-3i$

طريقة استخدام الآلة الحاسبة في الضرب والجمع

$2-3i$	1	-6	20	-22	-13
		$2-3i$	$-17+6i$	$24+3i$	13
	1	$-4-3i$	$3+6i$	$2+3i$	0

لأن $2-3i$ صفر للدالة فإن $2+3i$ صفر أيضاً

$2+3i$	1	$-4-3i$	$3+6i$	$2+3i$
		$2+3i$	$-4-6i$	$-2-3i$
	1	-2	-1	0

$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$ لا تحلل $\Rightarrow$ نستخدم القانون $\Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2 \mp 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 1 \mp \sqrt{2}$

أصفار الدالة الأربعة هي $\leftarrow$ $1-\sqrt{2}$ / $1+\sqrt{2}$ / $2+3i$ / $2-3i$

تحليل الدالة إلى العوامل الخطية $\leftarrow$

$p(x) = (x - (1-\sqrt{2}))(x - (1+\sqrt{2}))(x - (2+3i))(x - (2-3i))$

$g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10$; $2+\sqrt{3}$

نستخدم التعويض التركيبي

$2+\sqrt{3}$	1	-10	35	-46	10
		$2+\sqrt{3}$	$-13-6\sqrt{3}$	$26+10\sqrt{3}$	-10
	1	$-8+\sqrt{3}$	$22-6\sqrt{3}$	$-20+10\sqrt{3}$	0

$2-\sqrt{3}$	1	$-8+\sqrt{3}$	$22-6\sqrt{3}$	$-20+10\sqrt{3}$
		$2-\sqrt{3}$	$-12+6\sqrt{3}$	$20-10\sqrt{3}$
	1	-6	10	0

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x = \dfrac{6 \mp \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x = 3 \pm i$

أصفار الدالة الرباعية

$2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $3+i$, $3-i$

تحليل الدالة إلى العوامل الخطية $\leftarrow$

$g(x) = (x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))(x-(3+i))(x-(3-i))$

$h(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 8x - 95;\ 1 - \sqrt{6}$

نستخدم التعويض التركيبي ⟸

$1-\sqrt{6}$	1	-8	26	-8	-95
		$1-\sqrt{6}$	$-1+6\sqrt{6}$	$-11-19\sqrt{6}$	95
	1	$-7-\sqrt{6}$	$25+6\sqrt{6}$	$-19-19\sqrt{6}$	0

$1+\sqrt{6}$	1	$-7-\sqrt{6}$	$25+6\sqrt{6}$	$-19-19\sqrt{6}$
		$1+\sqrt{6}$	$-6-6\sqrt{6}$	$19+19\sqrt{6}$
	1	-6	19	0

$x^2 - 6x + 19 = 0$

$x = \dfrac{6 \mp \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(19)}}{2(1)}$

$= \dfrac{6 \mp \sqrt{-40}}{2}$

$= \dfrac{6 \mp 2\sqrt{10}\, i}{2}$

$= 3 \pm \sqrt{10}\, i$

* الأصفار الأربعة هي

$1-\sqrt{6}$ / $1+\sqrt{6}$ / $3+\sqrt{10}\, i$ / $3-\sqrt{10}\, i$

* تحليل الدالة إلى العوامل الخطية

$h(x) = (x-(1-\sqrt{6}))(x-(1+\sqrt{6}))(x-(3+\sqrt{10}\, i))(x-(3-\sqrt{10}\, i))$