ورقة عمل الثاني عشر العام **1-3** **الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات** **الاسم:**____________

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة الوسطية على الدوال المتصلة.

2- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

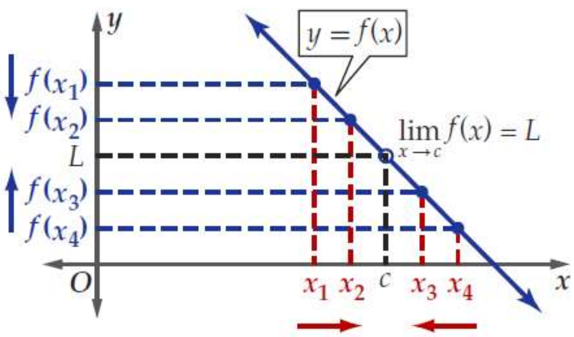
الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

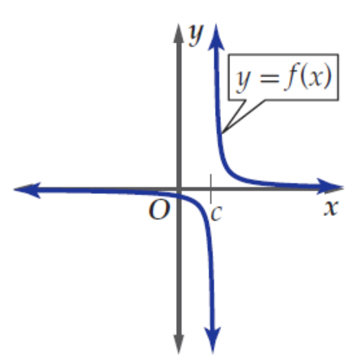
الرموز: نقول: إن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



مفهوم أساسي — أنواع الانفصال

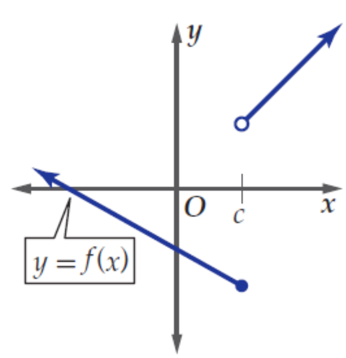
للدالة **انفصال لا نهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



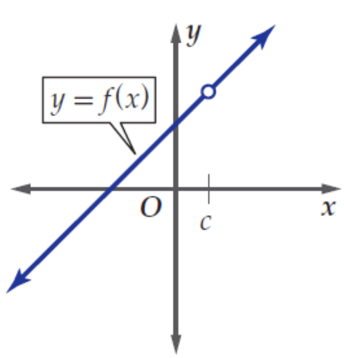
للدالة **انفصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



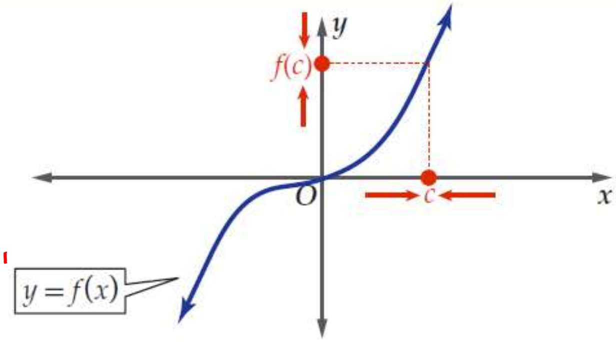
للدالة **انفصال قابل للإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



تحديد نقطة اتصال

ملخص المفهوم — اختبار الاتصال



1 • $f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.

2 • $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.

3 • $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

نتحقق من الشروط الثلاثة للاتصال:

① $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 1 = \boxed{1}$

② $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة ←

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	0.950	0.995	1	1.005	1.050

يتضح من الجدول كلما اقتربت x إلى 2 من اليسار واليمين تقترب $f(x)$ من $\boxed{1}$ ⇐ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \boxed{1}$

③ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \boxed{1}$ ⇐ الدالة متصلة عند $\boxed{x=2}$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

$f(x) = x^3$

نتحقق من الشروط الثلاثة للاتصال:

① $f(0) = (0)^3 = 0$ موجودة

②

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}	0	1×10^{-9}	1×10^{-6}

كلما اقتربت x من 0 من اليسار، ومن اليمين تقترب $f(x)$ من 0 ⇒ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

③ $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{0}$ → الدالة متصلة عند $\boxed{x=0}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

① $f(0) = 0$ → موجودة

②

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-100	-1000	0	0.001	0.01

عندما تقترب x من 0 من اليمين تقترب $f(x)$ من 0

وعندما تقترب x من 0 من اليسار، تقترب $f(x)$ إلى $-\infty$

⇐ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ غير موجودة

الدالة غير متصلة عند $\boxed{x=0}$

تحديد نقاط الانفصال

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$ عند $x = -3$.

① $f(-3) = 2-(-3) = \boxed{5}$ موجودة

②

x	-3.01	-3.001	-3	-2.99	-2.90
$f(x)$	5.01	5.001	5	-10.97	-10.7

كلما اقتربت x من -3 من اليسار، اقتربت $f(x)$ لـ 5

كلما اقتربت x من -3 من اليمين اقتربت $f(x)$ لـ -11 $\Leftarrow$ $\lim_{x\to -3} f(x) =$ غير موجودة

الدالة غير متصلة عند $\boxed{x=-3}$

نوع عدم الاتصال (انفصال قفزي)

$f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3$, $x = 3$.

عند $\boxed{x=-3}$

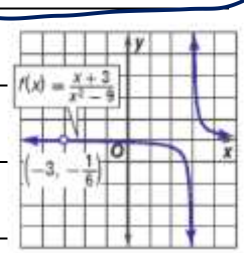
① $f(-3) = \dfrac{(-3)+3}{(-3)^2-9} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ غير موجودة

②

x	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.1663	-0.166		-0.16669	-0.1669	-0.1694

كلما اقتربت x من -3 من اليسار، أو اليمين اقتربت $f(x)$ من $1.\bar{6}$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to -3} f(x) = 1.\bar{6}$

الدالة انفصال قابل للإزالة عند $\boxed{x=-3}$



عند $x = 3$

① $f(3) = \dfrac{(3)+3}{3^2-9} = \dfrac{6}{0} \rightarrow$ غير معرفة

②

x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-100	-1000		1000	100

كلما اقتربت x من 3 من اليمين تقترب $f(x)$ من ∞

كلما اقتربت x من 3 من اليسار، تقترب $f(x)$ من $-\infty$

الدالة انفصال لانهائي عند $\boxed{x=3}$

$f(x) = \begin{cases} 5x+4 & , \quad x > 2 \\ 2-x & , \quad x \le 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

① $f(2) = 2-(2) = 0$

②

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	0.01	0.001	0	14.005	14.05

كلما اقتربت x من 2 من اليمين اقتربت $f(x)$ من 14

كلما اقتربت x من 2 من اليسار، اقتربت $f(x)$ من 0

الدالة غير متصلة عند $x = 2$

نوع عدم الاتصال / انفصال قفزي

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

① $f(0) = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} \rightarrow$ غير معرفة

②

x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	10,000	1000,000		1,000,000	10,000

كلما اقتربت x من 0 من اليمين واليسار، تقترب $f(x)$ من ∞

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \infty$

الدالة غير متصلة عند $x = 0$

نوع الانفصال [انفصال لا نهائي]

إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x=4$.

① $f(4)=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{0}{0}$ غير موجودة

②

x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	7.99	7.999	$\times$	8.001	8.01

الدالة تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من اليمين واليسار

$\Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=8$

إعادة كتابة تعريف الدالة التي تكون متصلة عند $x=4$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4} & , x\neq 4\\ 8 & , x=4\end{cases}$$

الآن تصبح الدالة متصلة عند $x=4$ لأن النهاية $=8$ والقيمة $=8$ عند $\boxed{x=4}$

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$؛ لتصبح متصلة عند $x=1$.

① $f(1)=\frac{(1)^2-1}{(1)-1}=\frac{0}{0}\rightarrow$ غير موجودة

②

x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	1.99	1.999	$\times$	2.001	2.01

الدالة تقترب من 2 عندما x تقترب من 1 من اليمين واليسار $\Leftarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\boxed{2}$

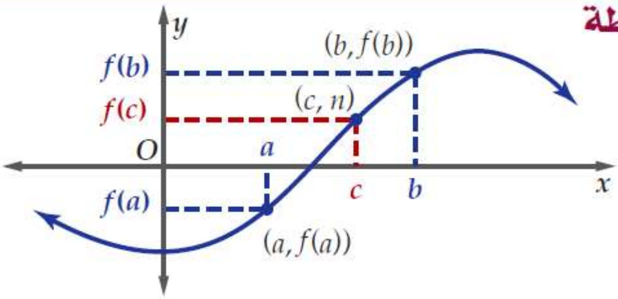
إعادة كتابة تعريف الدالة التي تكون متصلة عند $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & , x\neq 1\\ 2 & , x=1\end{cases}$$

الأصفار التقريبية

نظرية — نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b، بحيث $f(c) = n$.



حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

$f(x) = x^3 - 4x + 2$، $[-4, 4]$.

لأن الدالة $f(x)$ كثيرة الحدود فهي متصلة على الفترة $[-4, 4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50
	-	-	+	+	+	-	+	+	+

هناك صفر حقيقي بين -3 و -2

وصفر حقيقي بين 0 , 1

وصفر حقيقي بين 1 , 2

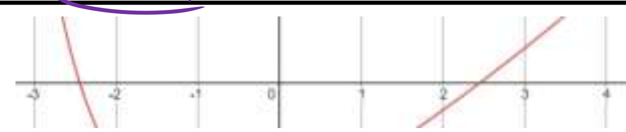
$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$، $[-6, 4]$

لأن الدالة $f(x)$ كثيرة حدود فهي متصلة على الفترة $[-6, 4]$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67
	-	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+

الأصفار الحقيقية تقع بين $-5, -4$ $0, 1$ $1, 2$

$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$، $[-3, 4]$



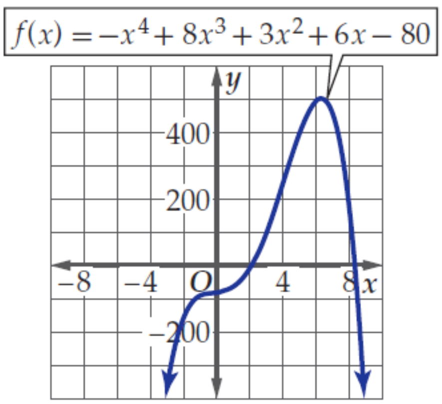
الدالة غير متصلة عند $x = -4$ ولكن متصلة في الفترة $[-3, 4]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	$-1.\bar{6}$	-1.5	-1	$-0.\bar{3}$	0.4285	1.25
	+	-	-	-	-	-	+	+

هناك صفران حقيقيان بين $-3, -2$, $2, 3$

التمثيلات البيانية التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



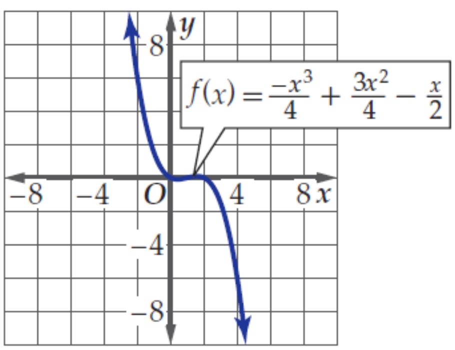
من الرسم /

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

* $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-1×10^{16}	-1×10^{12}	-1×10^{12}	-1×10^{16}
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$



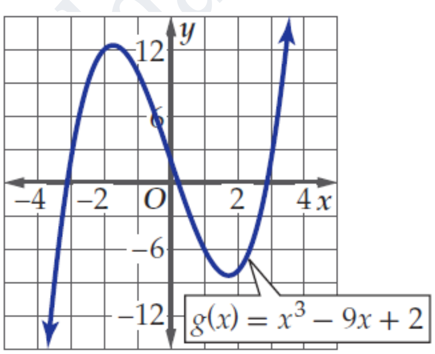
من الرسم /

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

* $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	2.5×10^{11}	2.5×10^{8}	-2.5×10^{8}	-2.5×10^{11}
	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$



من الرسم /

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

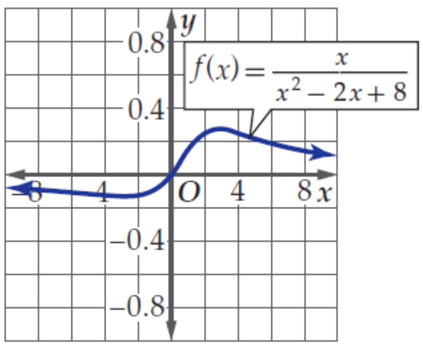
* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-10×10^{11}	-10×10^{8}	10×10^{8}	10×10^{11}
	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞

التمثيلات البيانية التي تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



من الرسم /

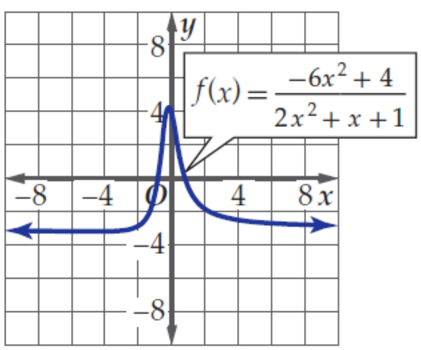
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

التعزيز العددي/ :

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-10×10^{-5}	-10×10^{-4}	1×10^{-3}	1×10^{-4}

0 0 0 0



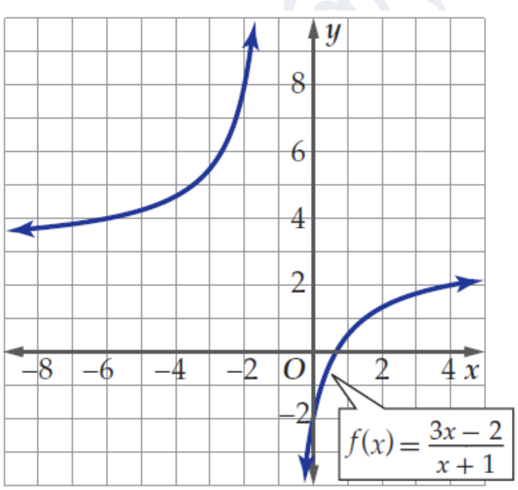
من الرسم /

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	-3	-3	-2.998	-2.999



من الرسم /

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

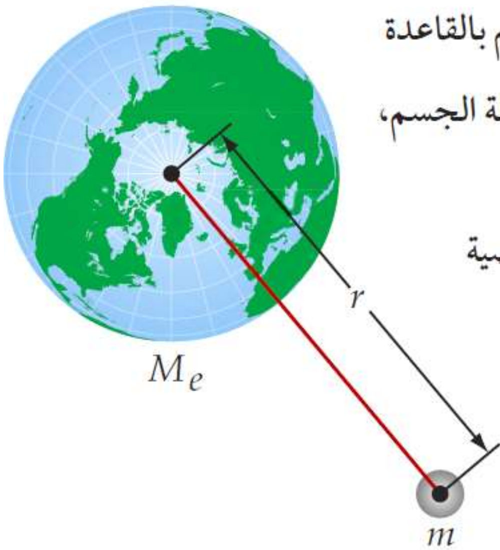
* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$

التعزيز العددي /

x	-10000	-1000	1000	10000
$f(x)$	3.0005	3.005	2.995	2.9995

تطبيق السلوك الطرفي

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



عندما تزداد r كثيراً ← $\lim\limits_{r \to \infty} U(r)$

في الدالة G ، m ، M_e ثوابت

وكلما زادت r (المقام) بطريقة كبيرة جداً يقترب الكسر (الدالة) للصفر

$\Rightarrow \lim\limits_{r \to \infty} U(r) = 0$

معنى ذلك أن طاقة الوضع تقترب كثيراً للصفر

فيزياء: الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$ ، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تستمر v في التزايد $\lim\limits_{v \to \infty} q(v) = ...$

في الدالة ρ ثابتة

وعندما تزداد v^2 إلى ما لا نهاية يكبر الكسر بصورة كبيرة جداً

(البسط)

$\Rightarrow \lim\limits_{v \to \infty} q(v) = \infty$

معنى ذلك أن الضغط الديناميكي سوف يزداد بصورة كبيرة للغاية.