

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية



الملف أوراق عمل الاتصال والسلوك الطرقي والنهيات مع الحل

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر العام ← رياضيات ← الفصل الأول

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العام



روابط مواد الصف الثاني عشر العام على تلغرام

[الرياضيات](#)

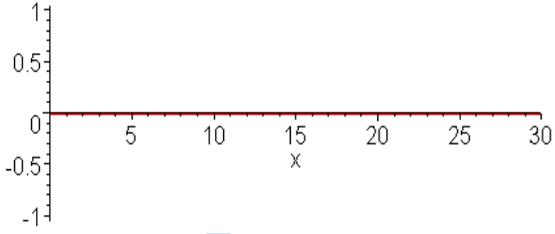
[اللغة الانجليزية](#)

[اللغة العربية](#)

[التربية الاسلامية](#)

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العام والمادة رياضيات في الفصل الأول

مراجعة عامة قبل امتحان نهاية الفصل الأول من	1
التوزيع الزمني للفصل الاول	2
الدوال من منظور التفاضل والتكامل	3
اسئلة اختبار متعدد	4
امسات رياضيات	5



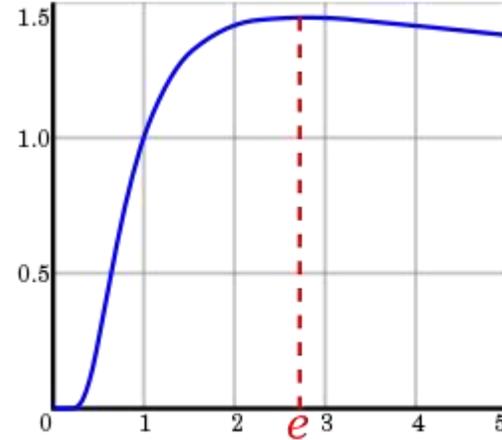
الوحدة: الأولى

الحادي عشر المتقدم

الثاني عشر العام

11

3



12

عنوان الدرس: الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

نواتج التعلم

في نهاية هذا الدرس ستكون قادراً على :

1. استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة

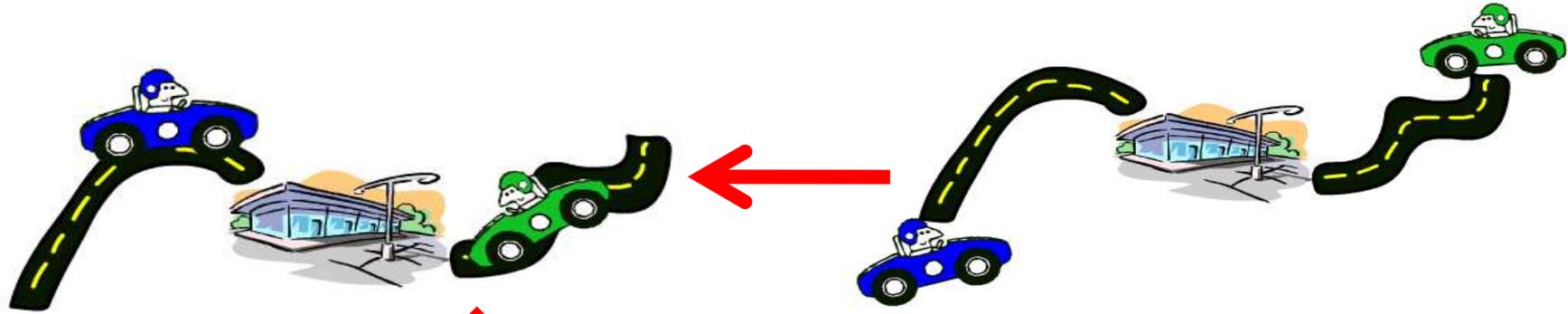


المتوسطة على الدوال المتصلة.

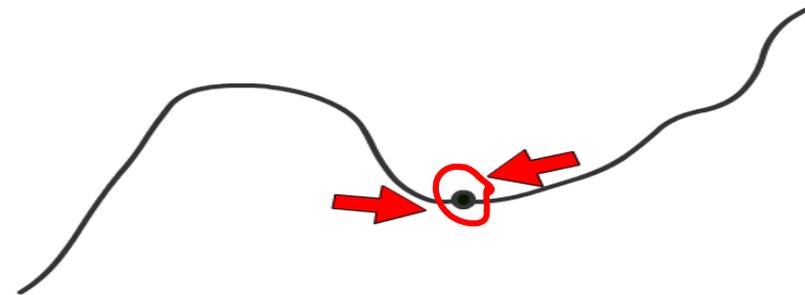
2. استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.



AMR MATH



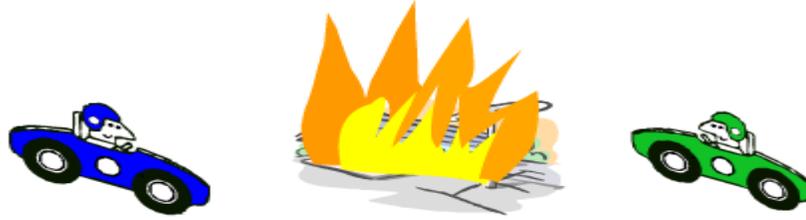
almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية



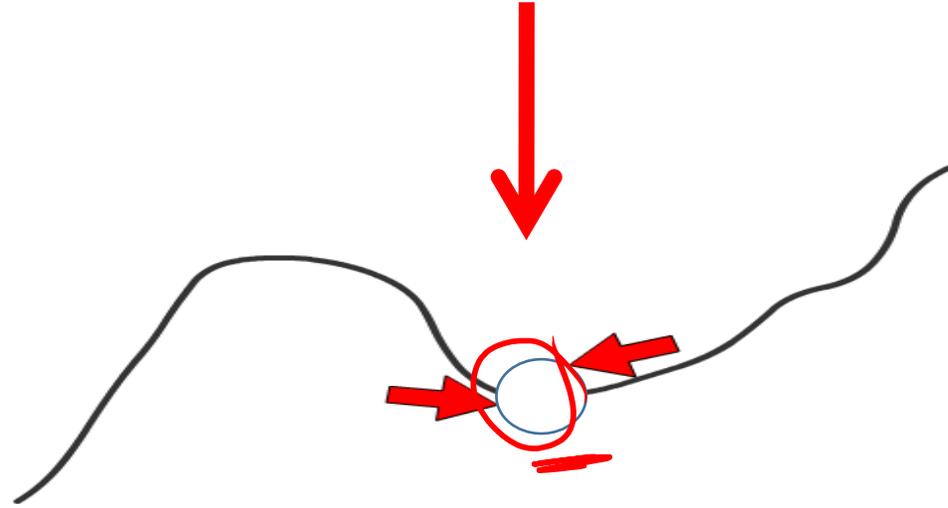
0544560575

أ. عمرو البيومي

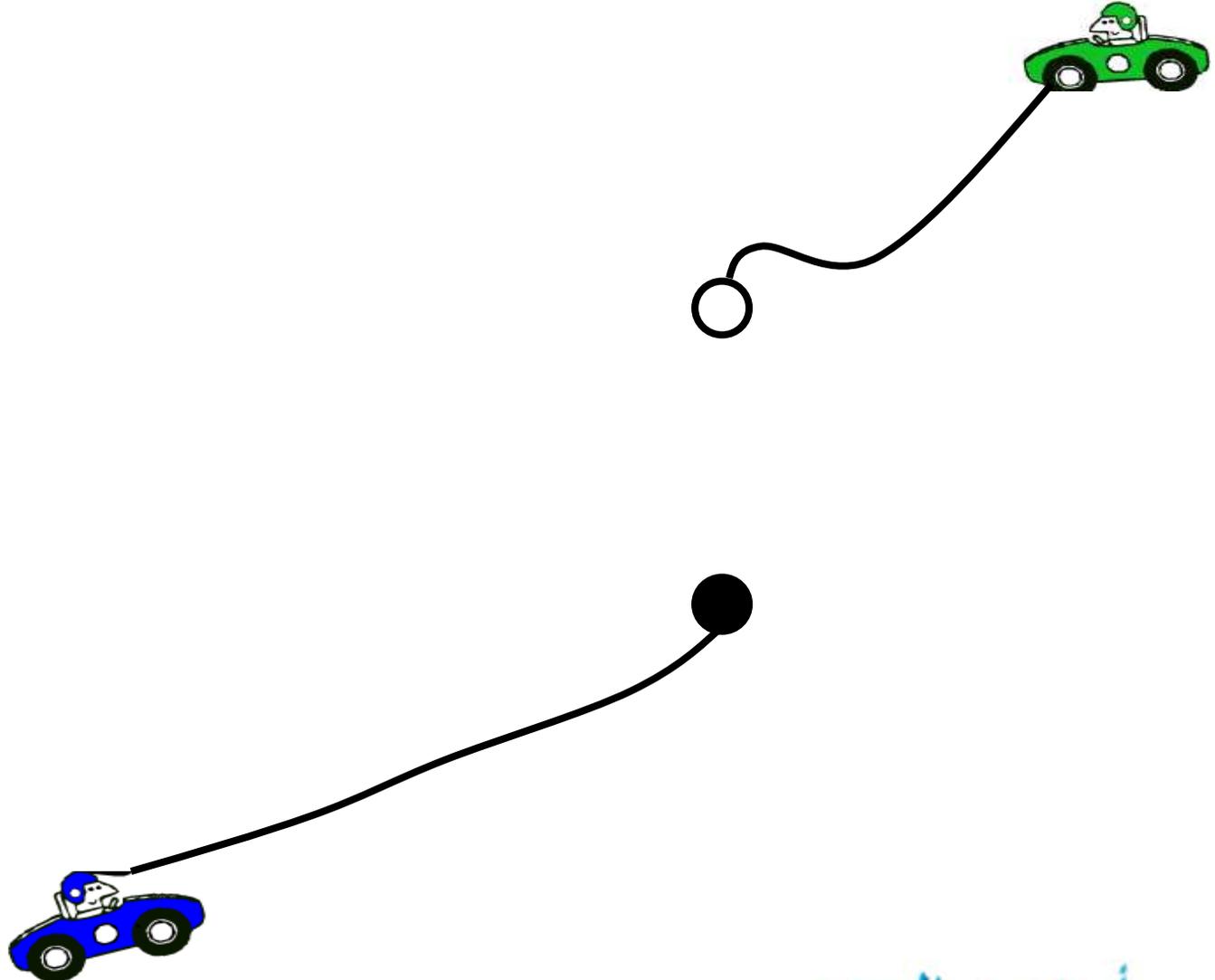
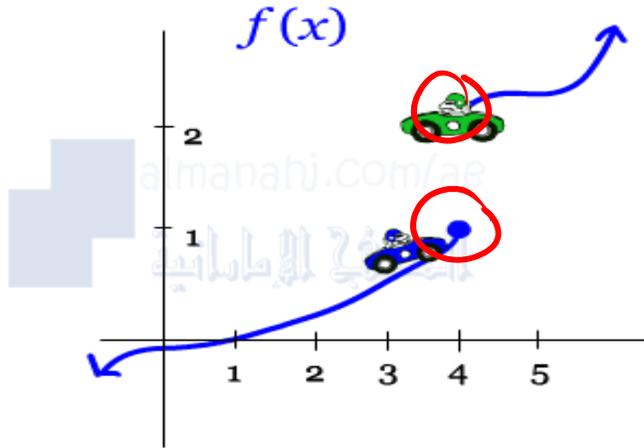
استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

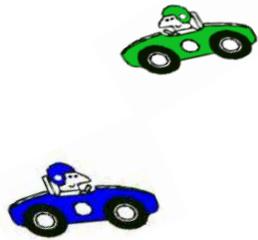
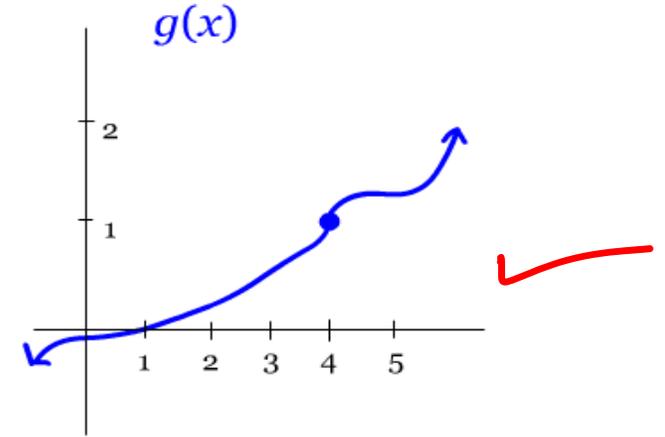
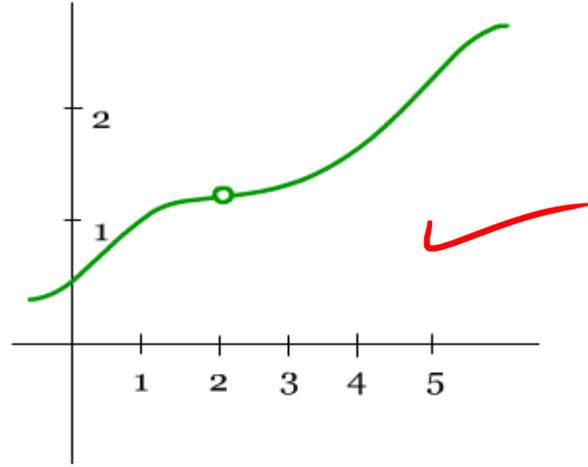
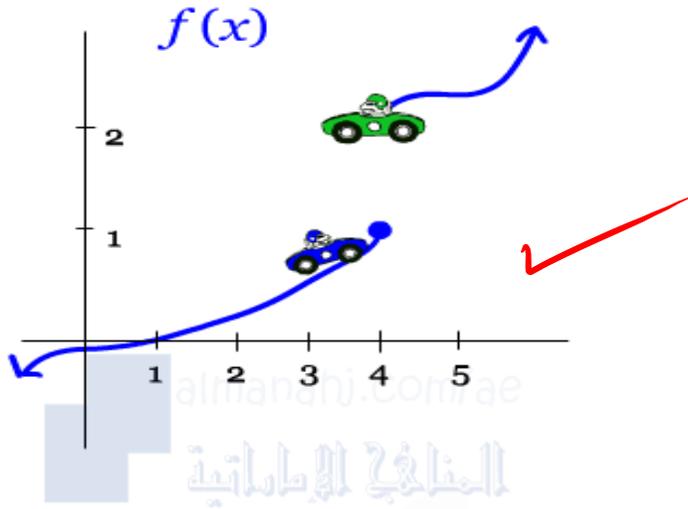


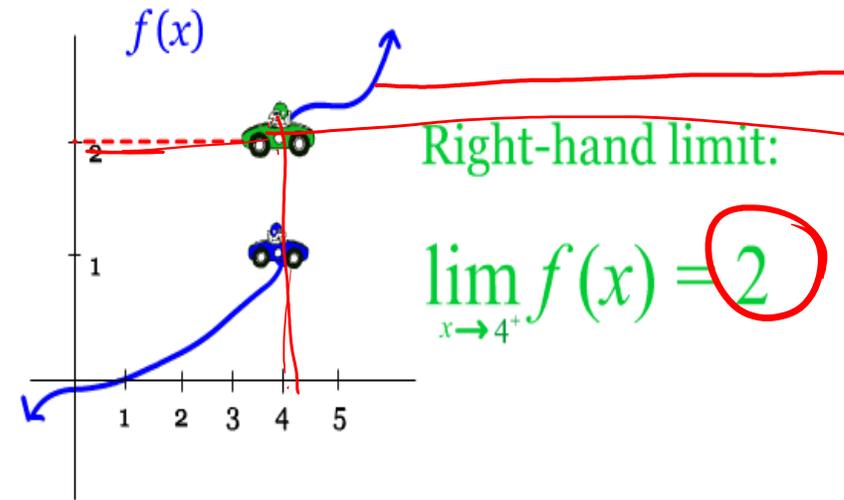
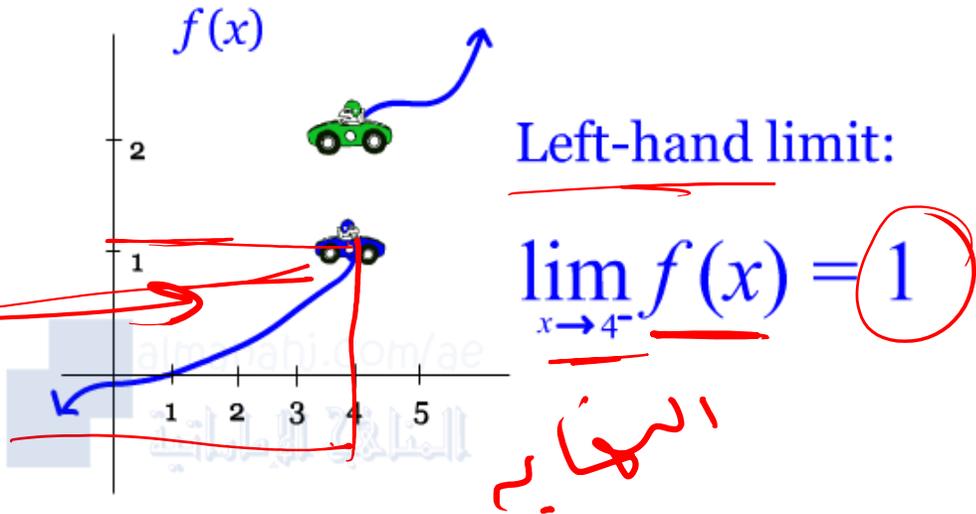
almanahj.com/ae
المنهج الإماراتية



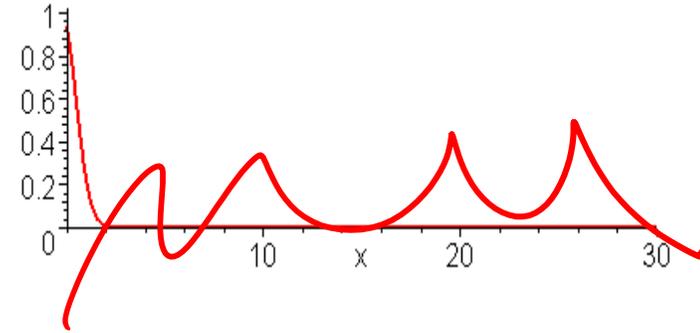
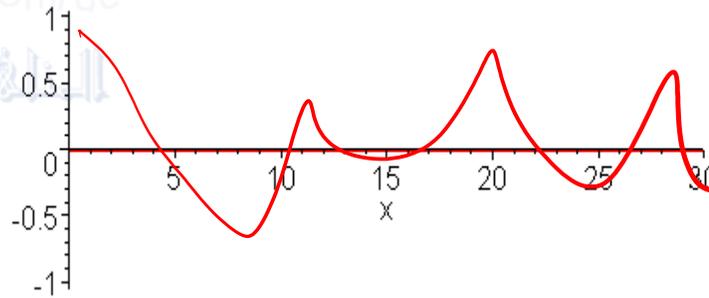
استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما







AMR MATH

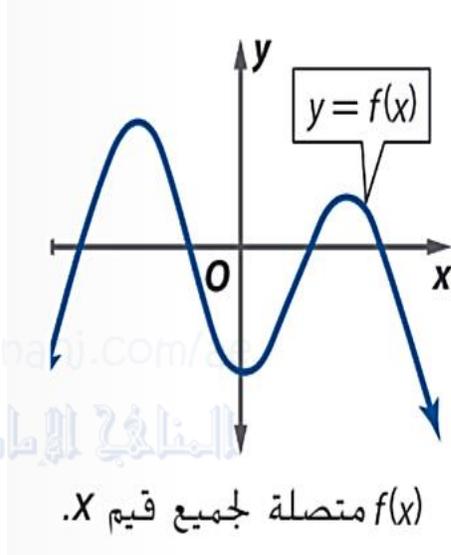


المفهوم الهندسي للاتصال

يقال إن الدالة $f(x)$ متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

0544560575

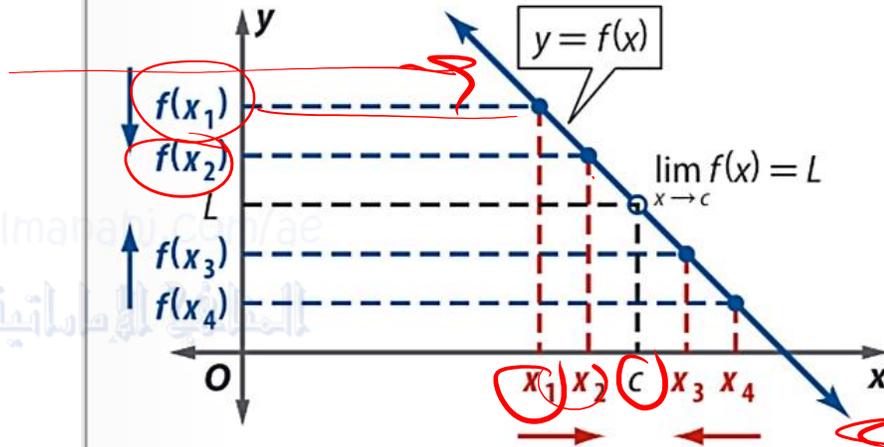
أ. عمرو البيومي



1 الاتصال التمثيل البياني **لدالة متصلة** لا يحتوي على فواصل أو فجوات أو فراغات. ويمكن تتبع التمثيل البياني لدالة متصلة دون رفع القلم الرصاص عن الورقة. أحد شروط اتصال الدالة $f(x)$ عند $x = c$ هو أن الدالة يجب أن تقترب من إحدى قيمها الفريدة عند اقتراب قيم x من c من الجانبين الأيسر والأيمن. ومفهوم الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة يُسمى نهاية.

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

المفهوم الأساسي النهايات



الشرح
إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من قيمة وحيدة L عندما تقترب x من c من كل جانب، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

الرموز
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ والتي تعني نهاية $f(x)$ مع اقتراب x من القيمة c هي L .

من اليسار x_1, x_2

من اليمين x_3, x_4

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

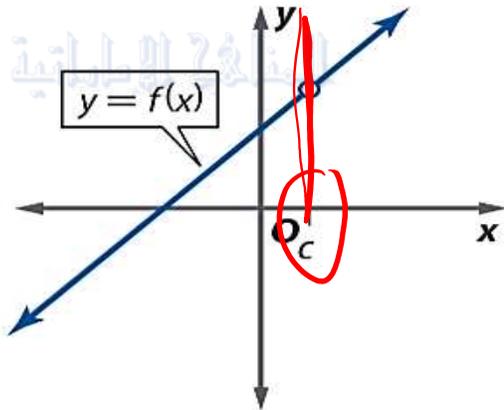
لفهم ما تعنيه الدالة المتصلة من منظور جبري، سيكون من المفيد فحص التمثيلات البيانية **للدوال غير المتصلة** أو الدوال التي ليست متصلة. ويمكن أن تتصف الدوال بأنواع مختلفة من الانفصال.

المفهوم الأساسي أنواع الانفصال

①

يكون للدالة **انفصال قابل للإزالة** عندما تكون الدالة متصلة في كل مكان باستثناء فجوة عند $X = C$.

مثال

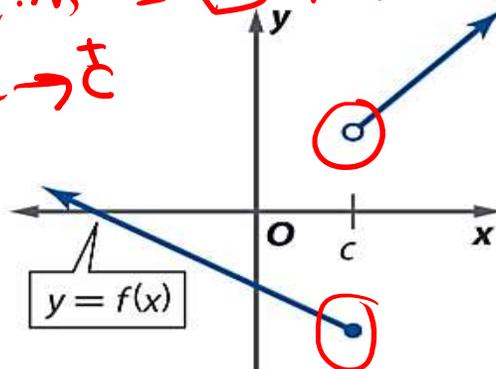


②

يكون لدالة **انفصال قفزي** عند $X = C$ في حالة وجود نهايتين للدالة بينما تقترب X من C من اليسار واليمين ولكن بقيمتين مختلفتين.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \square \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \square$$



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \square \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \square$$

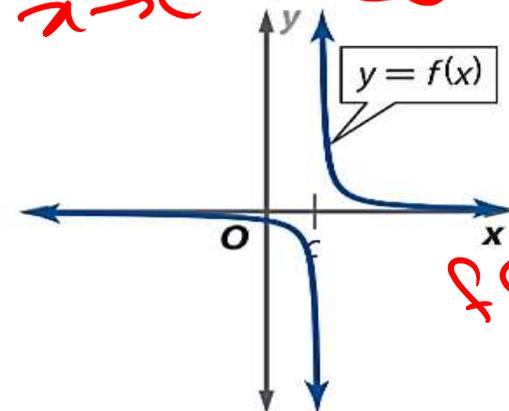
③

يكون لدالة **انفصال لا نهائي** عند $X = C$ إذا زادت قيمة الدالة أو تناقصت بشكل لا نهائي مع اقتراب X من C من اليسار واليمين.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

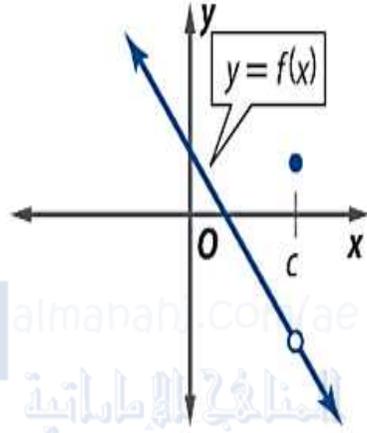


$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

منه
توجه
ملاحظة

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

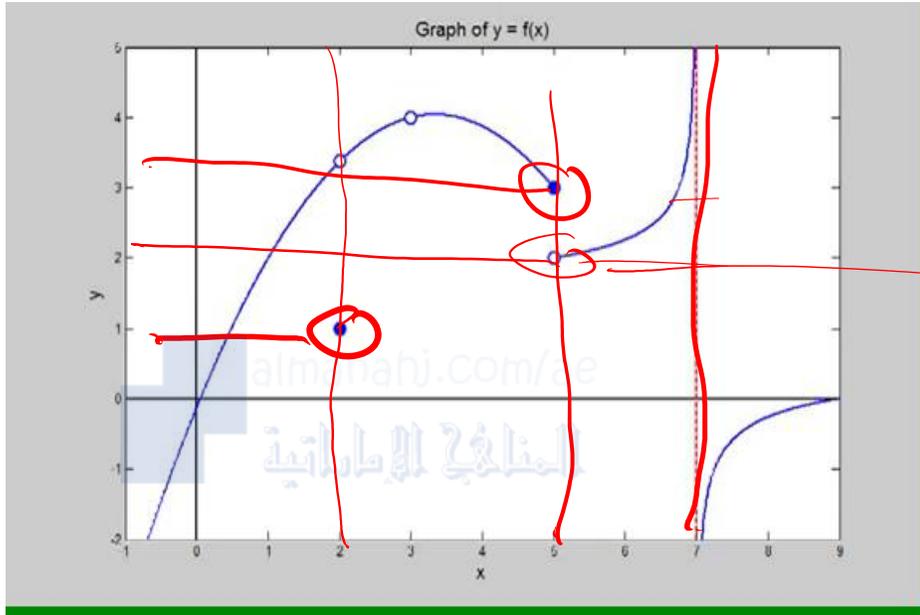


لاحظ أنه بالنسبة إلى التمثيلات البيانية للدوال التي لها انفصال قابل للإزالة، توجد نهاية $f(x)$ عند النقطة c ولكن إما أن تكون قيمة الدالة عند c غير معرفة، أو لا تكون قيمة $f(c)$ هي نفسها قيمة النهاية عند النقطة c . كما هو الحال مع التمثيل البياني الموضح.

نصيحة دراسية

النهايات إن وجود قيمة لـ $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها لا يؤثر على وجود نهاية لـ $f(x)$ مع اقتراب x من c .

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما



ملخص المفهوم

اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

$$f(5) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3$$

أنواع عدم الاتصال

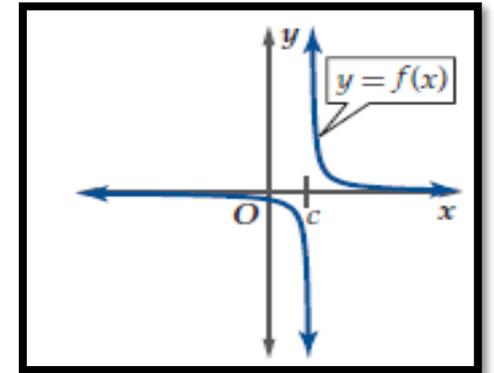
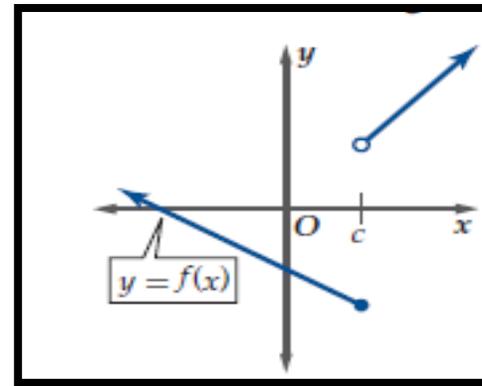
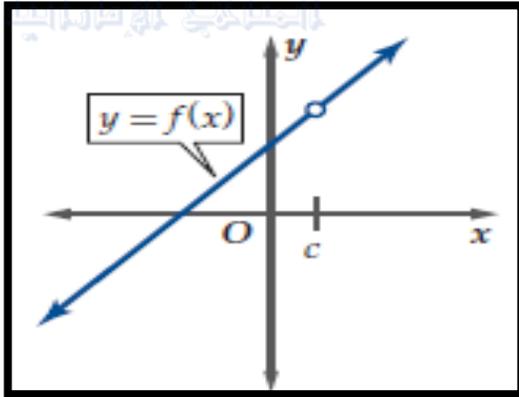
انفصال قابل للإزالة

انفصال غير قابل للإزالة

فجوة

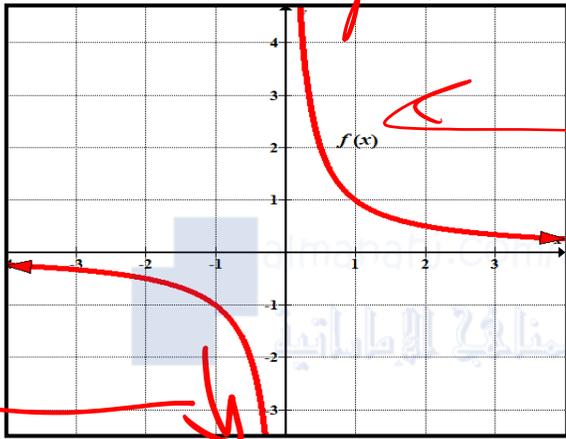
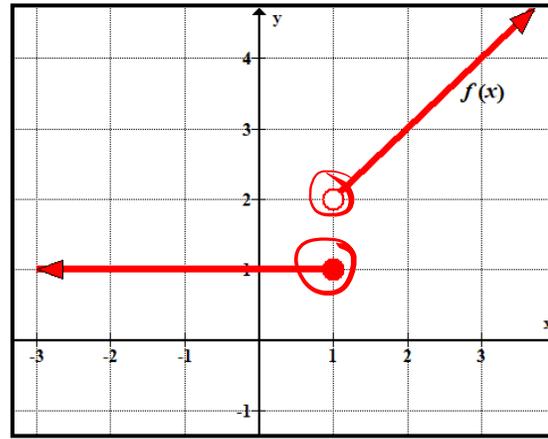
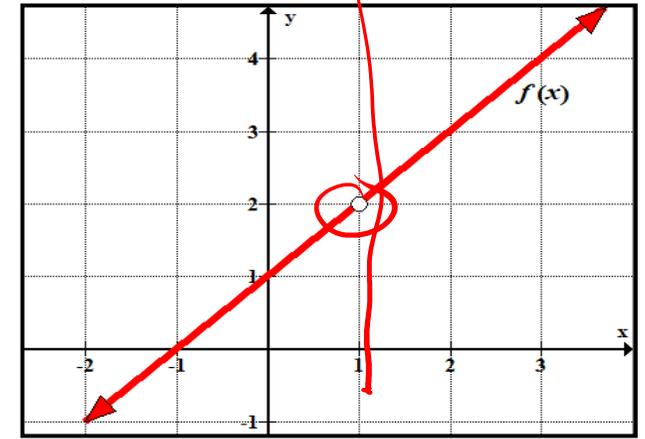
قفزي

لا نهائي



استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

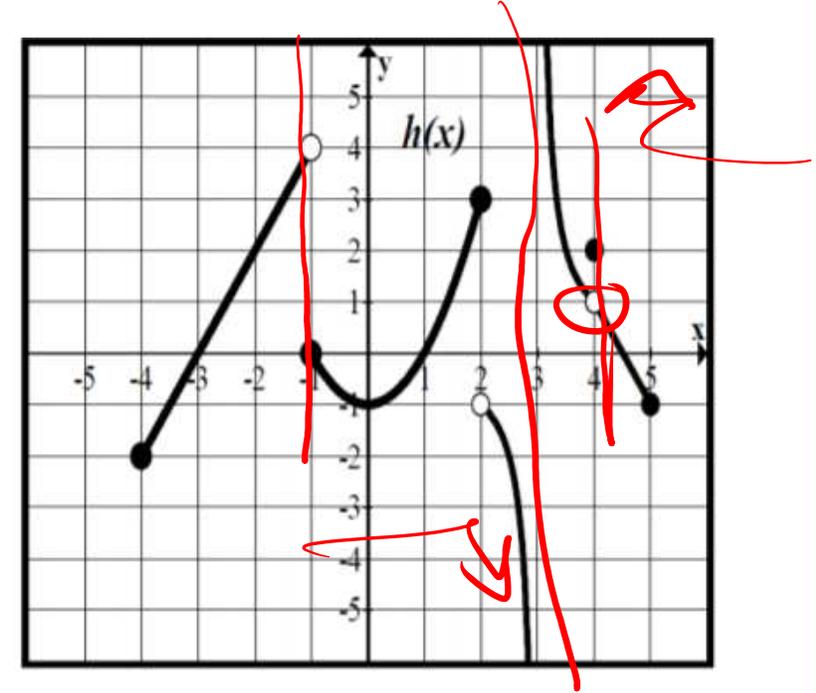
حدد نوع الانفصال ونقاط الانفصال لكل دالة مما يلي:

انفصال لا نهائي
 $x = 0$ انفصال قفزي
 $x = 1$ انفصال قابل للإزالة (فجوة)
 $x = 1$

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

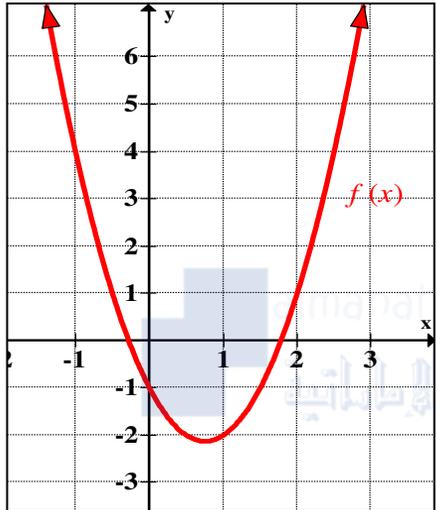
اعتماداً على الرسم البياني للدالة $h(x)$ ، حدد نقاط الانفصال ونوعها:

نقاط الانفصال	نوع الانفصال
$x = -1$	انفصال قفزي (غير قابل للإزالة)
$x = 2$	انفصال قفزي (غير قابل للإزالة)
$x = 3$	انفصال قفزي (غير قابل للإزالة)
$x = 4$	انفصال قفزي (غير قابل للإزالة)



AMR MATH

مثال: حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.



(1) هل $f(2)$ موجودة؟ $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 1 = 1$

x تقترب من 2

x تقترب من 2

x	1.9	<u>1.99</u>	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

1

1

=

إذاً، الدالة متصلة عند $x = 2$

(2) هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجودة؟ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

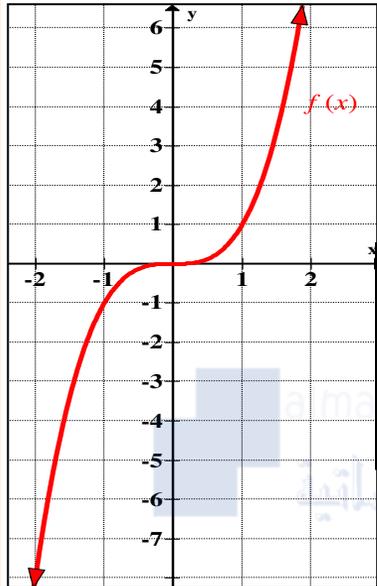
0544560575

(3) هل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$ ؟

أ. عمرو الأيوبي

AMR MATH

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$. بر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.



(1) هل $f(0)$ موجودة؟ $f(0) = (0)^3 = 0$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}		1×10^{-9}	1×10^{-6}	0.001

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(2) هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجودة؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

(3) هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ؟

إذاً، الدالة متصلة عند $x = 0$

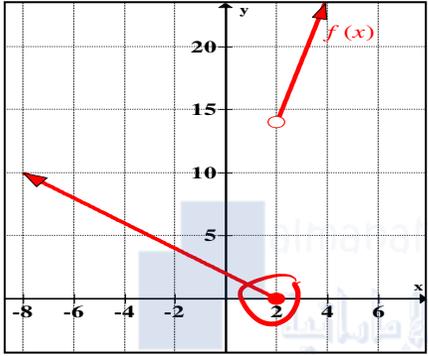
054 1560575

أ. عمرو البيومي

AMR MATH

حدد ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة عند قيم x المحددة أم لا. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال:

$$b) f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , x > 2 \\ 2 - x & , x \leq 2 \end{cases} \text{ عند } x = 2$$



x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.1	0.01	$1 \times 10^{-3} = 0.001$		14.005	14.05	14.5

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

0

\neq

14

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 14$$

$$\triangleright f(2) = 2 - 2 = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{غير موجودة}$$

إذاً، الدالة غير متصلة عند $x = 2$ ، نوع الانفصال: انفصال قفزي

054 1560575

أ. عمرو البيومي

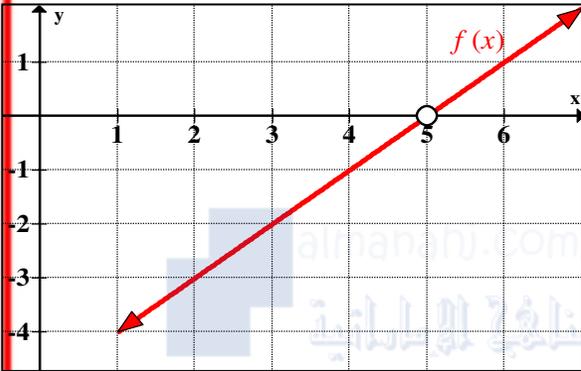
AMR MATH

حدد ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة عند قيم x المحددة أم لا. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال:

c) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$, عند $x = -5$

$\rightarrow f(-5) = \frac{(-5)^2 - 25}{-5 + 5} = \frac{0}{0}$

غير معرفة



x	-5.1	-5.01	-5.001	-5	-4.999	-4.99	-4.9
$f(x)$	-10.1	-10.01	-10.001		-9.999	-9.99	-9.9

$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = -10$ $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -10$

$f(-5)$ غير موجودة، إذًا الدالة منفصلة عند $x = -5$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -10$

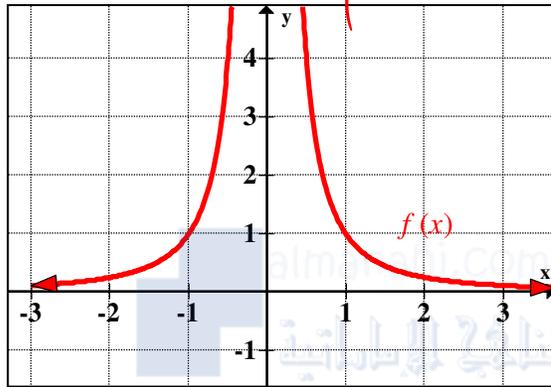
نوع الانفصال: انفصال قابل للإزالة (فجوة) ، إذًا الدالة منفصلة عند $x = -5$

AMR MATH

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ عند $x = 0$

➤ $f(0) = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$

غير معرفة



x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

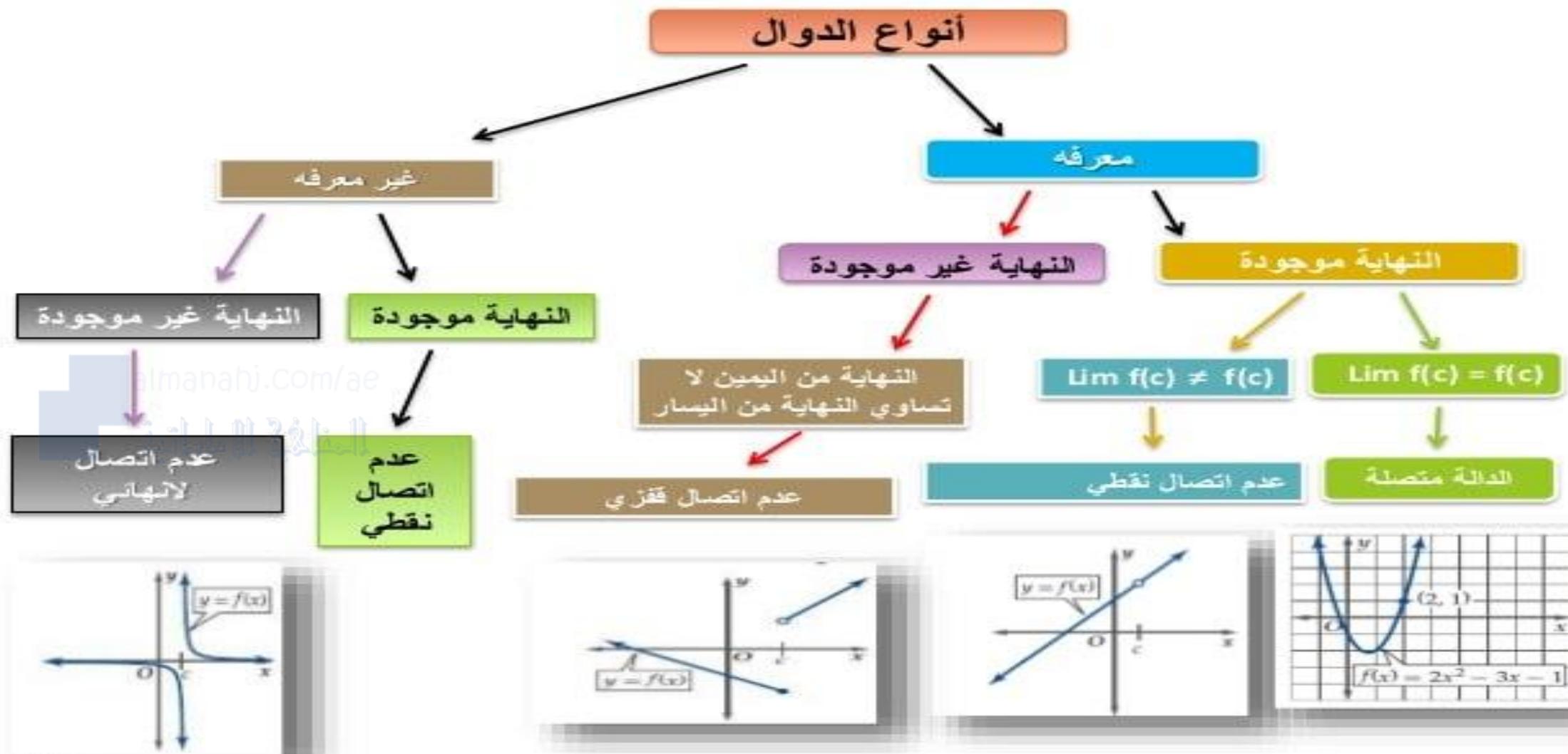
➤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

$f(0)$ غير موجودة، إذاً الدالة منفصلة عند $x = 0$

إذاً، الدالة منفصلة عند $x = 0$ ، نوع الانفصال: انفصال لا نهائي

0544560575

أ. عمرو البيومي

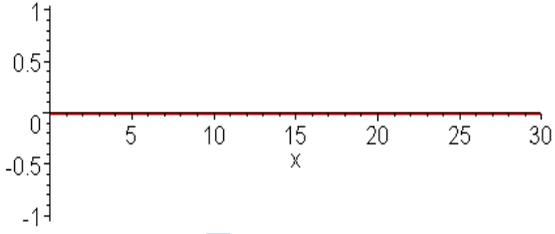


AMR MATH



0544560575

أ. عمرو البيومي



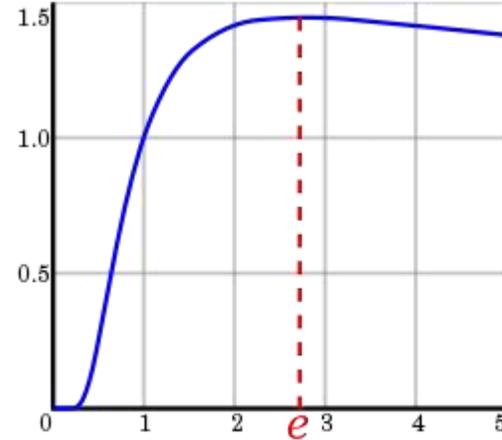
الوحدة: الأولى

الحادي عشر المتقدم

الثاني عشر العام

11

3



12

عنوان الدرس: الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

نواتج التعلم

في نهاية هذا الدرس ستكون قادراً على :

1. تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

2. استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

نظرية القيمة المتوسطة

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة .

نظرية القيمة المتوسطة

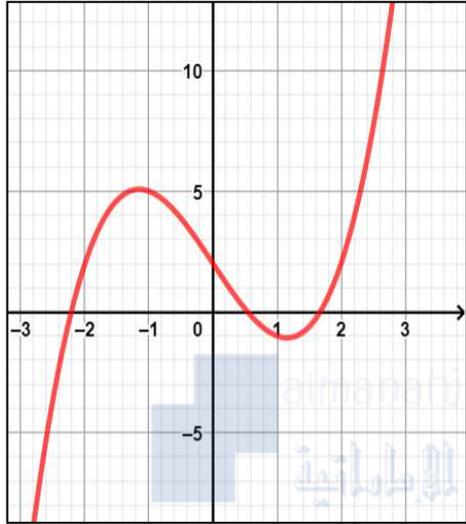
إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b ، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .

AMR MATH

مثال: حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

$$f(x) = x^3 - 4x + 2 ; [-4, 4]$$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

①

②

③

✓ للدالة صفر حقيقي بين $-3, -2$

✓ للدالة صفر حقيقي بين $0, 1$

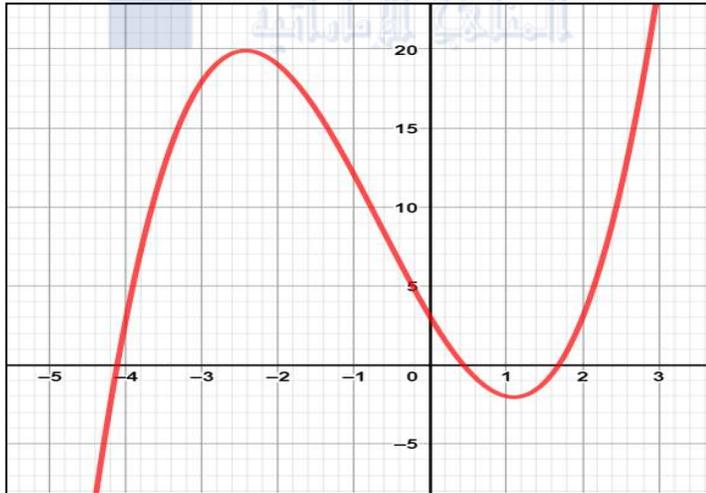
✓ للدالة صفر حقيقي بين $1, 2$

AMR MATH

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3 ; [-6, 4]$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67



✓ للدالة صفر حقيقي بين -4, -5

✓ للدالة صفر حقيقي بين 0, 1

✓ للدالة صفر حقيقي بين 1, 2

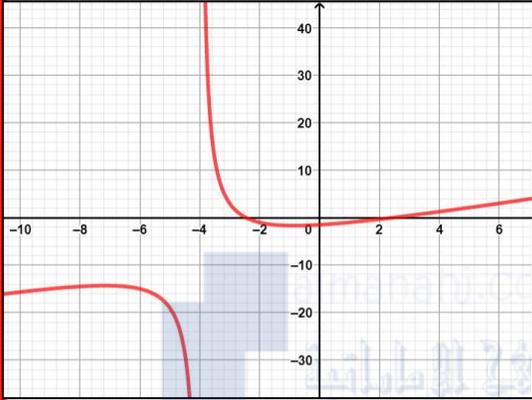
0544560575

أ. عمرو البيومي

AMR MATH

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

$$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}; [-3, 4]$$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	-1.67	-1.5	-1	-0.33	0.43	1.25

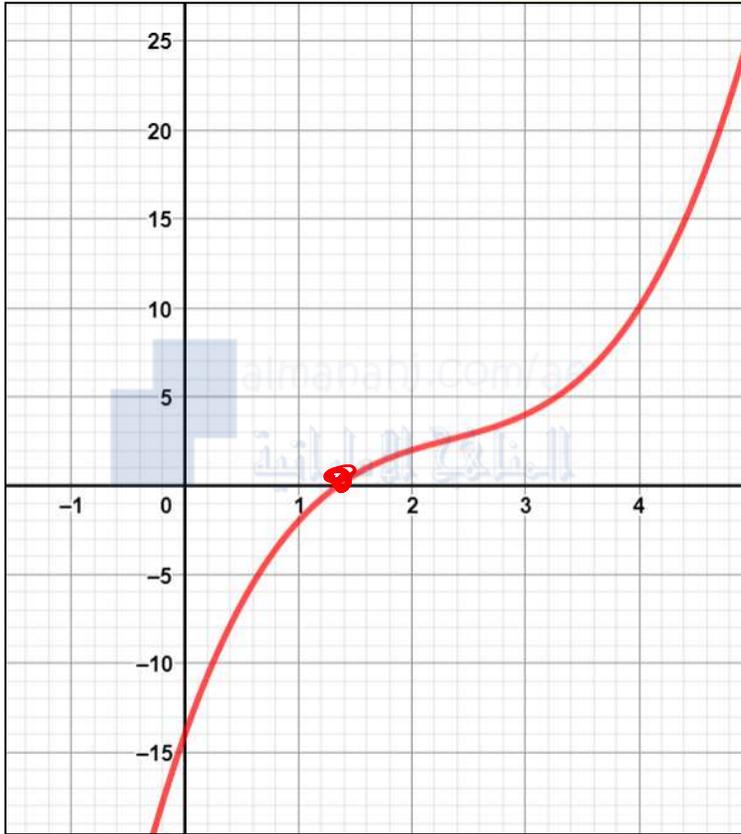
✓ للدالة صفر حقيقي بين 2, 3

✓ للدالة صفر حقيقي بين -2, -3

AMR MATH

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

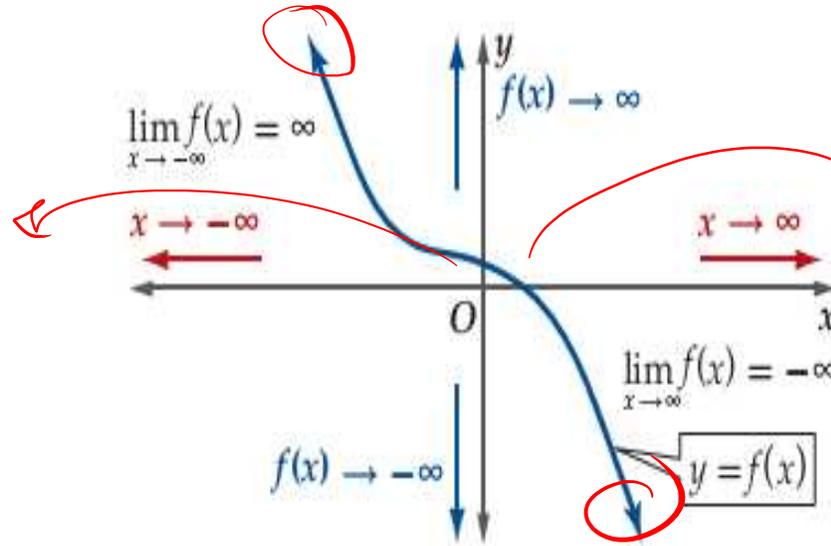
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14 ; [0, 4]$$



x	0	1	2	3	4
$f(x)$	<u>-14</u>	-2	2	4	10

✓ للدالة صفر حقيقي بين 1, 2

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف سلوك طرفي التمثيل البياني شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.



سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

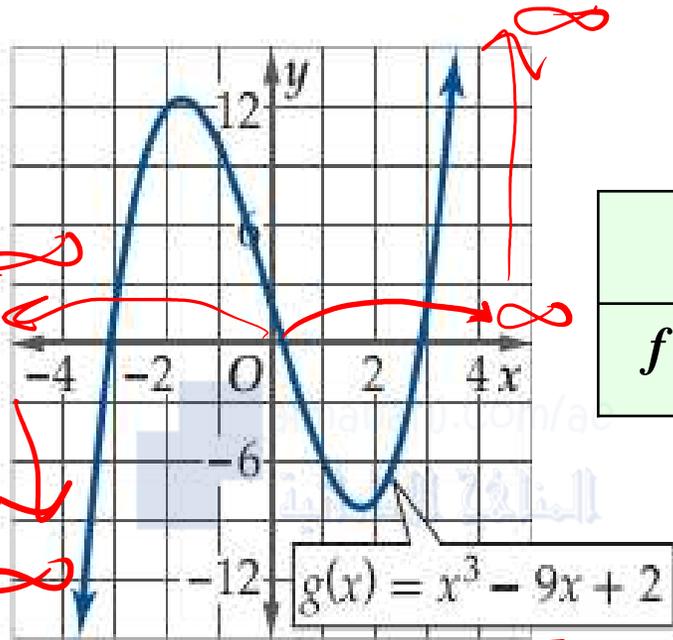
قراءة الرياضيات

النهايات:

تقرأ العبارة $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.



x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	-9.9×10^{11}	-999990998	-999098	2	999102	999991002	9.9×10^{11}

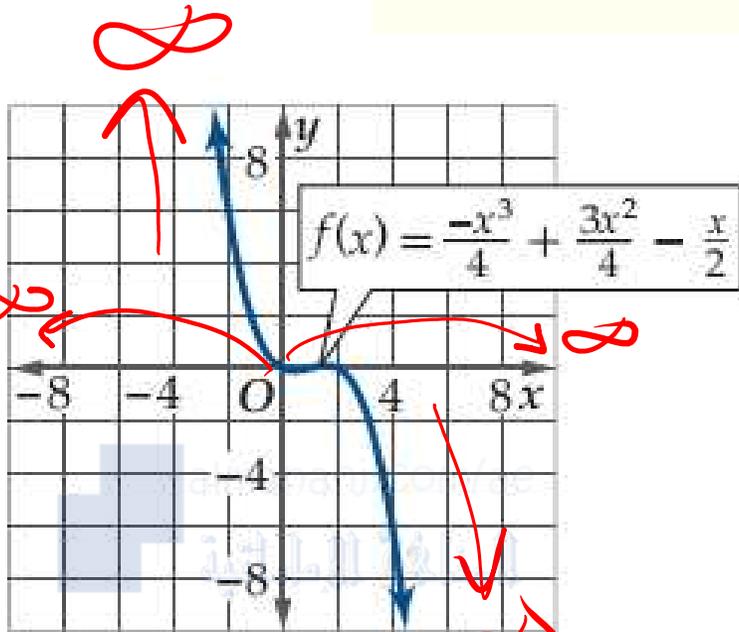
عددياً:

الطرف الأيمن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underline{\underline{\infty}}$ بيانياً:

الطرف الأيسر : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.



الطرف الأيمن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

بيانياً:

الطرف الأيسر : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

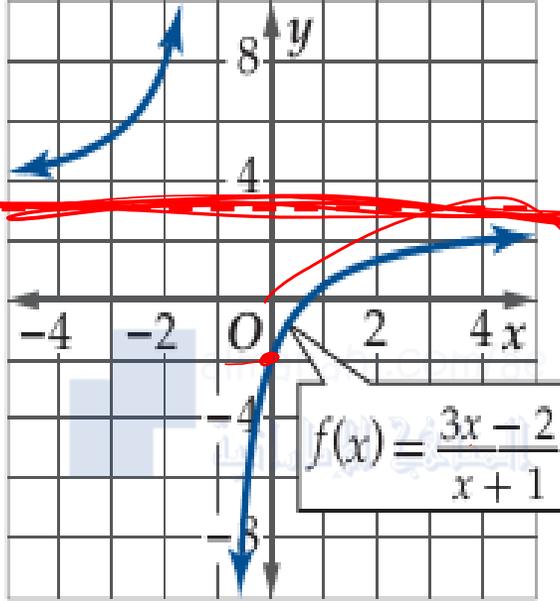
x	f(x)
-10,000	$2.5 \cdot 10^{11}$
-1000	$2.5 \cdot 10^8$
0	0
1000	$-2.5 \cdot 10^8$
10,000	$-2.5 \cdot 10^{11}$

عددياً:

AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.

عددياً:



x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	3.0005	3.005	3.05	-2	2.95	2.995	2.999

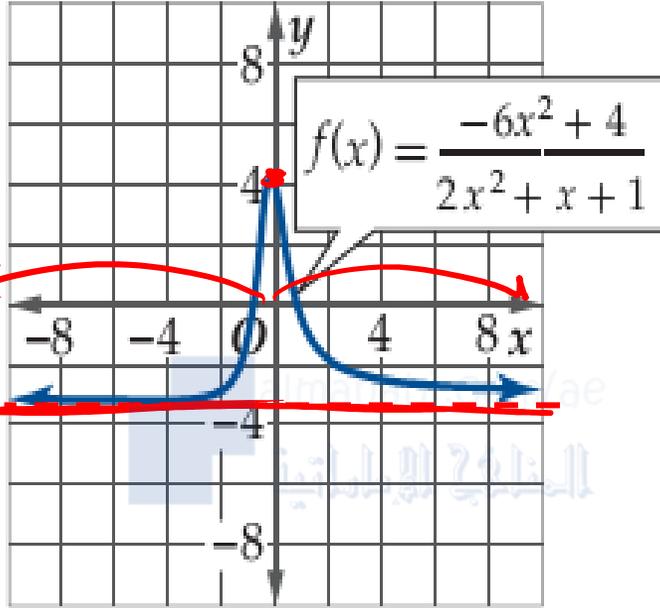
الطرف الأيمن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

بيانياً:

الطرف الأيسر : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.



الطرف الأيمن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$ بيانياً:

الطرف الأيسر : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

x	f(x)
-10,000	-3.0001
-1000	-3.001
0	4
1000	-2.998
10,000	-2.9998

عددياً:

AMR MATH



0544560575

أ. عمرو البيومي

الرياضيات (الثاني عشر عام)

عنوان الدرس

1-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

نتائج الدرس

-استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
-استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

عنوان النشاط

التطبيق الالكتروني المستخدم

التهيئة الحافزة

jigsawplanet-

-استكشاف عنوان الدرس من خلال لعبة التركيب.

اسم الاستراتيجية

التطبيق الالكتروني المستخدم

استراتيجية التعلم

livework sheet-

- lms
منصة التيمز

-الحوار والمناقشة.
-الاستقراء.
-الاستنتاج

إجراءات الدرس

- عرض عدة صور لتوضيح مفهوم الاتصال.
- عرض قصة للوصول لمفهوم النهاية وأنواع عدم الاتصال.
- تقديم المفهوم الأساسي لأنواع الانفصال ومناقشة مثال عليها ثم توجيه الطالبات لحل تمرين على الورقة التفاعلية (liveworksheet).
- تقديم المفهوم الأساسي لاختبار الاتصال ثم مناقشة مثال 1 صفحة 25 وتوجيه الطالبات لحل التمارين الموجهة.
- مناقشة مثال 2 صفحة 26 وتكليف الطالبات بحل التمارين الموجهة.
- عرض نظرية القيمة المتوسطة ومناقشة مثال 3 صفحة 27 ثم تكليف الطالبات بحل التمارين الموجهة.
- توجيه الطالبات لحل تمارين (المستويات) على الورقة التفاعلية (liveworksheet).
- مناقشة السلوك الطرفي للدوال وعرض أمثلة الكتاب 4 و 5 صفحة 28-29 وتكليف الطالبات بحل التمارين الموجهة.
- التقييم الختامي على الورقة التفاعلية (liveworksheet) و استطلاع على بوابة التعلم الذكي.

التأمل في الدرس

- الأهداف واضحة ومتسقة مع الأمثلة.

0544560575

-مواضيع الدرس ممتعة وعرضها مناسب.

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

مثال 2

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهاضي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > -3 \\ 2 - x, & x \leq -3 \end{cases} \quad (a)$$

$$f(-3) = 5 \text{ موجودة؛ لأن } f(-3) = 5. \quad (1)$$

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

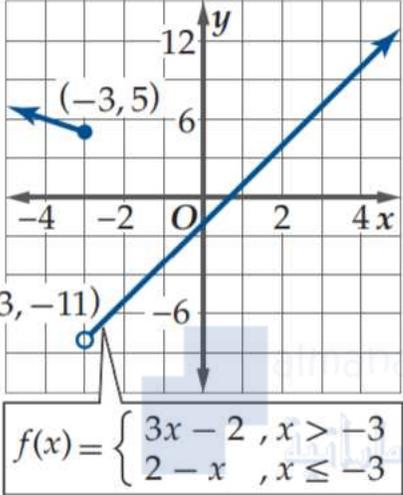
5

≠

-11

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{غير موجودة}$$

للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x = -3$.



$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > -3 \\ 2 - x, & x \leq -3 \end{cases}$$

الشكل 1.3.2

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$$(b) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2-9} \quad \text{عند } x = -3, x = 3.$$

عند $x = 3$

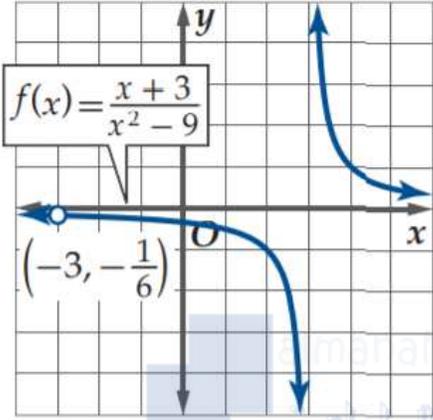
$$(1) \quad f(3) = \frac{6}{0} \quad \text{وهي غير معرفة، أي أن } f(3) \text{ غير موجودة، وعليه تكون } f(x) \text{ غير متصلة عند } x = 3.$$

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

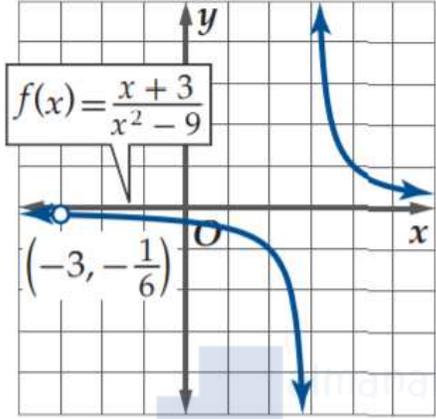
يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ غير موجودة.

(3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x = 3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.



الشكل 1.3.3

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.



الشكل 1.3.3 المنحني الإطباتي

(b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = 3, x = -3$.

عند $x = -3$

(1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \approx -0.167 \approx -\frac{1}{6}$$

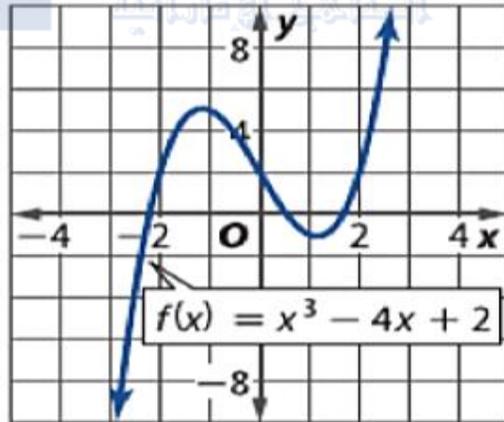
(3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضح المنحني في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

مثال 3 الأصفار التقريبية

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

a. $f(x) = x^3 - 4x + 2; [-4, 4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50



لأن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، حسب مبدأ تحديد الموقع، $f(x)$ لها صفر بين -3 و -2 . وتتغير علامة قيمة $f(x)$ أيضا بالنسبة إلى $0 \leq x \leq 1$ و $1 \leq x \leq 2$ ويشير هذا إلى وجود أصفار حقيقية في هاتين الفترتين.

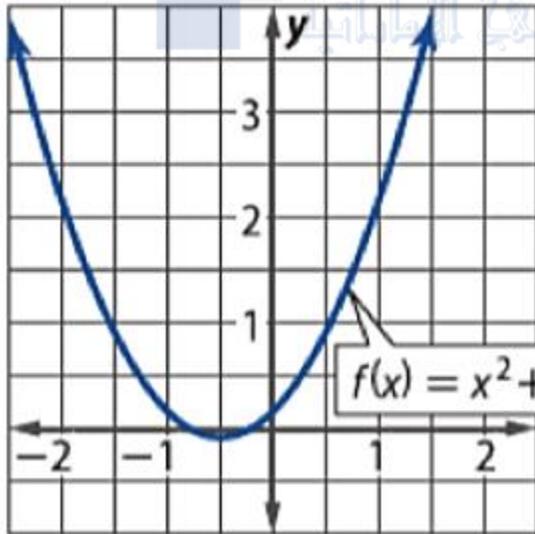
ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ الموضح على اليسار استنتاج أن هناك أصفارًا حقيقية بين -3 و -2 ، 0 و 1 و 1 و 2 و 2 و 3 .

مثال 3 الأصفار التقريبية

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

b. $f(x) = x^2 + x + 0.16; [-3, 3]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

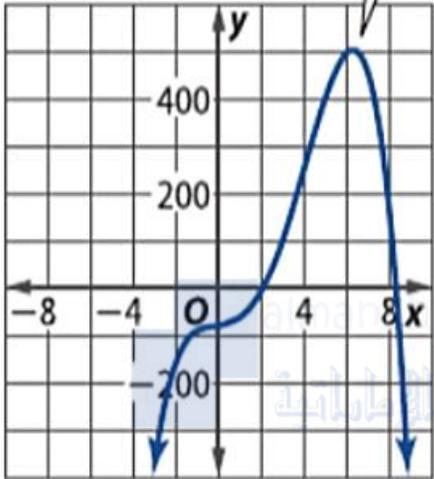


لا تتغير علامة قيم $f(x)$ بالنسبة إلى قيم x المستخدمة. على الرغم من ذلك، بينما تقترب قيم x من -1 من اليسار، تتناقص $f(x)$ ثم تبدأ في التزايد عند $x = 0$. إذا، ربما توجد أصفار حقيقية بين العددين الصحيحين المتتابعين -1 و 0 . مثل الدالة بيانًا للتحقق.

يقطع التمثيل البياني لـ $f(x)$ محور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$. وبذلك توجد أصفار حقيقية بين -1 و 0 .

مثال 4 التمثيلات البيانية التي تقترب من ما لانهاية

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$$



استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوكها الطرفي. ادعم فرضيتك بالأرقام.

التحليل بيانياً

في التمثيل البياني لـ $f(x)$ يظهر أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

الدعم بالأرقام

ضع جدولاً بالقيم لاستكشاف قيم الدالة مع تزايد $|x|$. بمعنى، استكشف قيمة $f(x)$ بينما تصبح x أكبر وأكبر أو تصبح سالبة بدرجة أكبر.

← x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞ →

x	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^8$	-80	$-1 \cdot 10^8$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

← →

يشير نمط المخرجات إلى أنه مع اقتراب x من $-\infty$ ، فإن $f(x)$ تقترب من $-\infty$ ومع اقتراب x من ∞ ، فإن $f(x)$ تقترب من $-\infty$. ويدعم هذا الفرضية.

مثال 5 التمثيلات البيانية التي تقترب من قيمة محددة

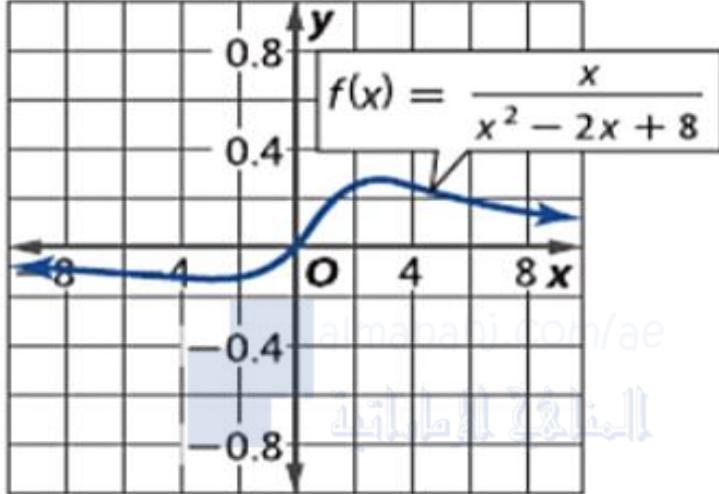
استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوكها الطرفي.
ادعم الفرضية بالأرقام.

التحليل بيانياً

في التمثيل البياني لـ $f(x)$ يظهر أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

الادعم بالأرقام



← x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞ →

x	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

← →

يشير نمط المخرجات إلى أنه مع اقتراب x من $-\infty$ ، فإن $f(x)$ تقترب من 0 ومع اقتراب x من ∞ ، فإن $f(x)$ تقترب من 0. ويدعم هذا الفرضية.

تعليم متمايز

نكتب جملة الأصفار
الحقيقية من اليسار لليمين
نقرب الأعداد لأقرب جزء
من مئة إذا لزم الأمر



