ورقة عمل الثاني عشر العام 9-2 الصور القطبية والديكارتية للمعادلات

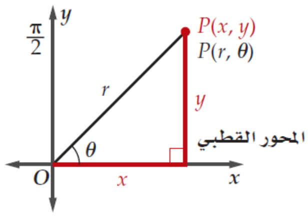
في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية. 2- تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

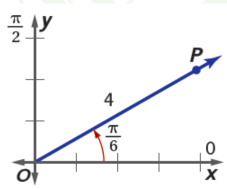
حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

$P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

$x = r\cos\theta$
$= 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= 2\sqrt{3}$
≈ 3.46

$y = r\sin\theta$
$= 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$= 2$

$P(3.46, 2)$

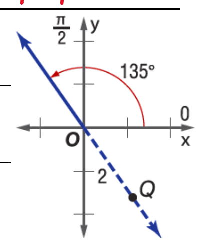


$Q(-2, 135°)$

$x = r\cos\theta$
$= -2\cos 135$
$= \sqrt{2}$
≈ 1.4

$y = r\sin\theta$
$= -2\sin 135$
$= -\sqrt{2}$
≈ -1.4

$Q(1.4, -1.4)$

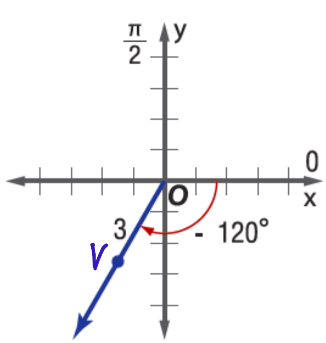


$V(3, -120°)$

$x = r\cos\theta$
$= 3\cos(-120)$
$= -1.5$

$y = r\sin\theta$
$= 3\sin(-120)$
$= \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2.6$

$V(-1.5, -2.6)$

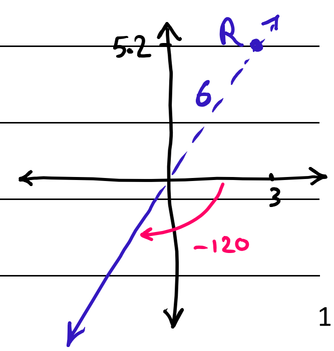


$R(-6, -120°)$

$x = r\cos\theta$
$= -6\cos(-120)$
$= 3$

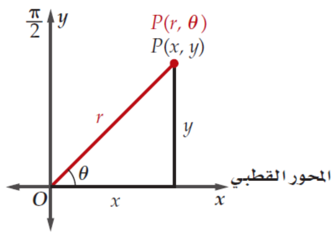
$y = r\sin\theta$
$= -6\sin(-120)$
$= 3\sqrt{3} \approx 5.2$

$R(3, 5.2)$



عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية



إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

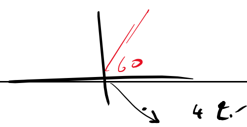
وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

$S(1, -\sqrt{3})$



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$= 2$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right|$

$\tan\theta' = \sqrt{3}$

$\theta' = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$\theta' = 60$

النقطة في الربع 4

$\theta = 360 - 60 = 300°$

$\theta = 300 - 360 = -60°$

$S(2, 300°)$ أو

$S(2, -60°)$ أو

$S(-2, 120°), S(-2, -240°)$

$T(-3, 6)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$

$= 3\sqrt{5} \approx 6.71$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right|$

$\tan\theta' = \left|\frac{6}{-3}\right| = 2$

$\theta' = \tan^{-1} 2$

$\theta' = 63.4°$

النقطة في الربع 2

$\theta = 180 - 63.4° = 116.6°$

$\theta = 116.6 - 360 = -243.4°$

$T(6.71, 116.6°)$ أو

$T(6.71, -243.4°)$ أو

$T(-6.71, 296.6)$ أو

$T(-6.71, -63.4°)$

$V(8, 10)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{8^2 + 10^2}$

$= 12.81$

$\tan\theta' = \left|\frac{10}{8}\right|$

$\theta' = \tan^{-1}(\frac{10}{8})$

$\theta' = 51.3°$

النقطة في الربع (1)

$\theta = 51.3°$

$V(12.81, 51.3°)$ أو

$V(12.81, -308.7°)$ أو

$V(-12.81, 231.3°)$ أو

$V(-12.81, -128.7°)$

$W(-9, -4)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-9)^2 + (-4)^2}$

$= 9.85$

$\tan\theta' = \left|\frac{-4}{-9}\right|$

$\theta' = \tan^{-1}(\frac{4}{9})$

$\theta' = 24°$

النقطة في الربع 3

$\theta = 180 + 24 = 204°$

$W(9.85, 204°)$ أو

$W(9.85, -156°)$ أو

$W(-9.85, 24°)$ أو

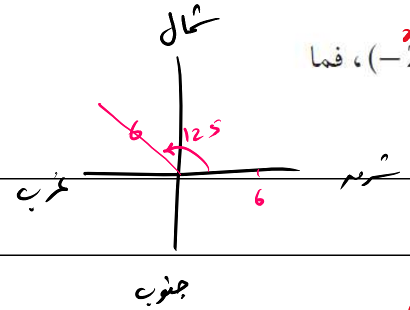
$W(-9.85, -336°)$

من واقع الحياة: التحويل بين الإحداثيات

صيد الأسماك: يُستعمل جهاز رصد مثبت في قارب صيد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء.
افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.
$r \quad \theta$

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟
$x \quad y$



(A

$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 6\cos 125 = -3.44$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 6\sin 125 = 4.91$

الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك $(-3.44, 4.91)$

(B

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \boxed{6.32}$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = 3$

$\theta' = \tan^{-1} 3$

$\theta' = 71.57°$

النقطة في الربع 2

$\Rightarrow \theta = 180 - 71.57 = 108.43°$

من أجد الإحداثيات القطبية $\Leftarrow$ $(6.32, 108.43°)$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$، ثم نبسِّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

$$y = x^2$$

$r\sin\theta = (r\cos\theta)^2$

$r\sin\theta = r^2\cos^2\theta \quad \div r$

$\sin\theta = r\cos^2\theta$

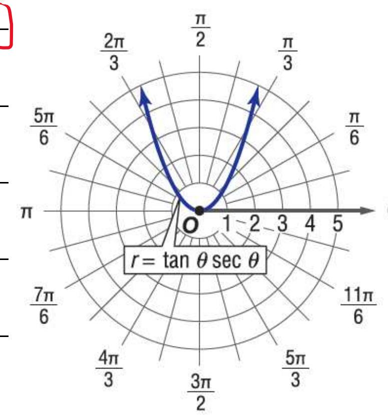
$\Rightarrow r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$\Rightarrow \boxed{r = \tan\theta\sec\theta}$

الرسم/ قطع مكافئ

مركزه (0,0) فتحته

للأعلى.



$$(x-4)^2 + y^2 = 16$$

$(r\cos\theta - 4)^2 + (r\sin\theta)^2 = 16$

$r^2\cos^2\theta - 8r\cos\theta + 16 + r^2\sin^2\theta = 16$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 8r\cos\theta = 16 - 16$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 8r\cos\theta = 0$

$r^2(1) - 8r\cos\theta = 0 \quad \div r$

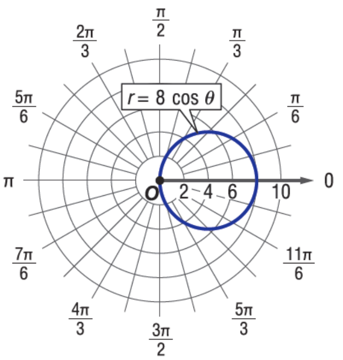
$r - 8\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{r = 8\cos\theta}$

الرسم/

دائرة نصف قطرها 4

مركزها (4,0)



$$x^2 + (y-3)^2 = 9$$

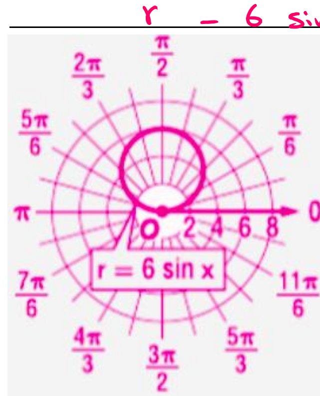
$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta - 3)^2 = 9$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\sin\theta + 9 = 9$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 6r\sin\theta = 9 - 9$

$r^2(1) - 6r\sin\theta = 0 \quad \div r$

$r - 6\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{r = 6\sin\theta}$



دائرة مركزها (0,3)

ونصف قطرها 3

$$x^2 - y^2 = 1$$

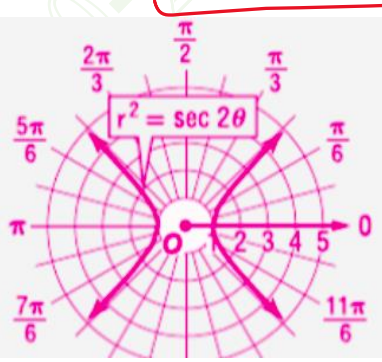
$(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 1$

$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$

$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$

$r^2\cos 2\theta = 1 \Rightarrow r^2 = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$

$\Rightarrow \boxed{r^2 = \sec 2\theta}$



قطع زائد أفقي

مركزه (0,0)

$a = 1$

$b = 1$

عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2 = x^2 + y^2 \,,\ \tan\theta = \frac{y}{x} ,\ x = r\cos\theta \,,\ y = r\sin\theta \ .$$

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

$r = 7$

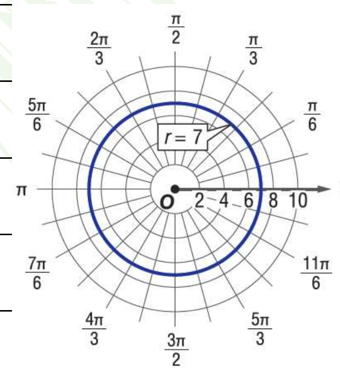
$x^2+y^2=r^2$

$x^2+y^2=7^2$

$x^2+y^2=49$

دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 7



$\theta = \frac{\pi}{6}$

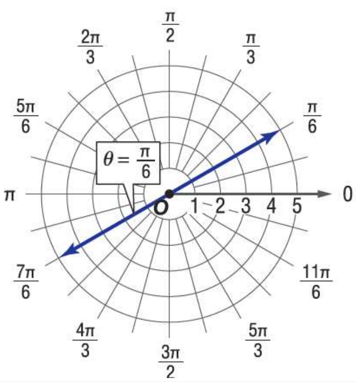
$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $\frac{\sqrt{3}}{3}$



$r = 3\cos\theta$ $\times r$

$r^2 = 3r\cos\theta$

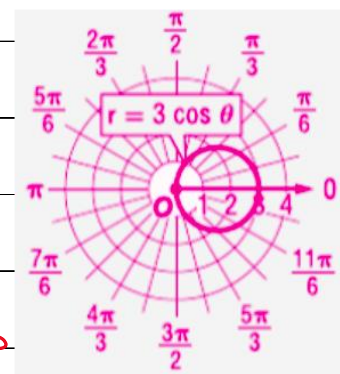
$x^2+y^2=3x$

$x^2-3x+y^2=0$

$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

دائرة مركزها $\left(\frac{3}{2},0\right)$ ، $r=\frac{3}{2}$



$r = -5\sin\theta$ $\times r$

$r^2 = -5r\sin\theta$

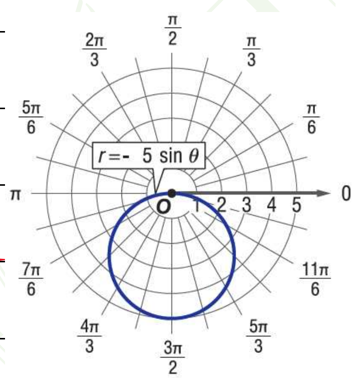
$x^2+y^2=-5y$

$x^2+y^2+5y=0$

$x^2+y^2+5y+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

دائرة مركزها $\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ ، $r=\frac{5}{2}$



$r = -3$

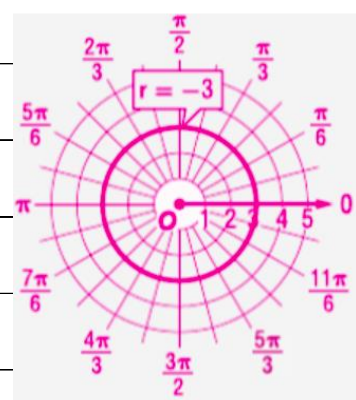
$x^2+y^2=r^2$

$x^2+y^2=(-3)^2$

$x^2+y^2=9$

دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 3



$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$

$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y = \sqrt{3}\,x$

مستقيم يمر بنقطة الأصل

وميله $\sqrt{3}$