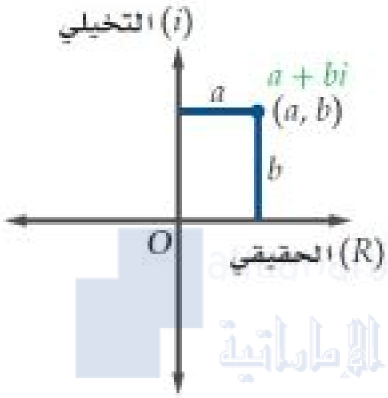
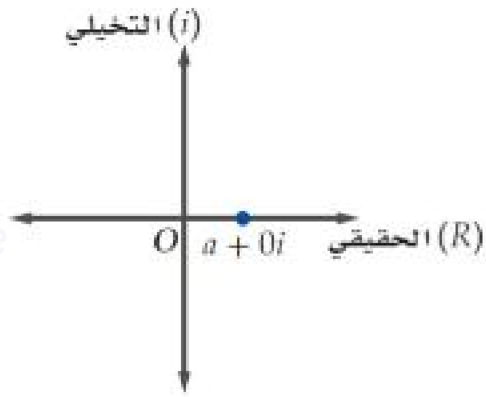
ورقة عمل الثاني عشر العام 9-3 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

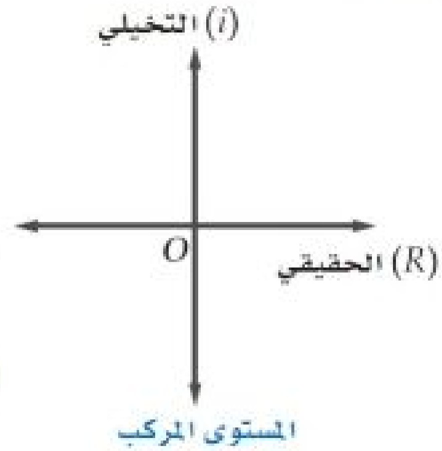
في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.

2- إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وقواها وجذورها في الصورة القطبية.



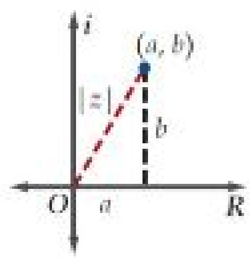




مفهوم أساسي القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

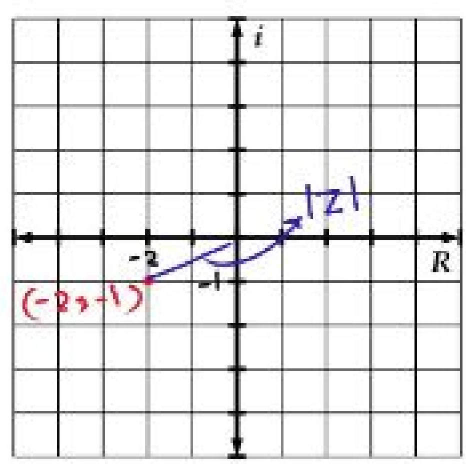
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركّب، وأوجد قيمته المطلقة:

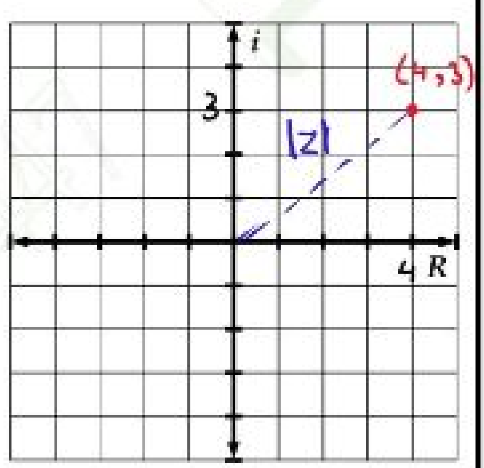
$z = -2 - i$



$|z| = |-2 - i|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

$z = 4 + 3i$



$|z| = |4 + 3i|$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \boxed{5}$

مفهوم أساسي — الصورة القطبية لعدد مركب

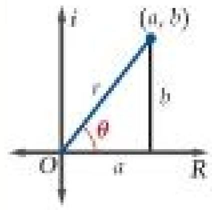
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$.

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

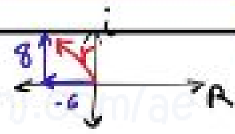
أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$-6 + 8i$



الصورة القطبية للعدد ← $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow \theta' = \tan^{-1}\frac{8}{6} \approx 53°$

الربع الثاني ⇐ $\theta = 180 - 53 = 127° \approx 2.21$ rad

العدد في الصورة القطبية هو ⇐

$\Rightarrow Z = 10(\cos 127° + i \sin 127°)$

$Z = 10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$

$4 + \sqrt{3}i$

الصورة القطبية للعدد ← $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{19} \approx 4.36$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow \theta' = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 23.4°$

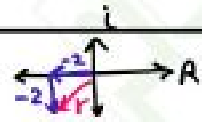
الربع الأول ⇐ $\theta = \theta' = 23.4° \approx 0.41$ rad

العدد في الصورة القطبية هو ⇐

$\Rightarrow Z = \sqrt{19}(\cos 23.4° + i \sin 23.4°)$

$= \sqrt{19}(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$

$-2 - 2i$



الصورة القطبية للعدد ← $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} = 2.83$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow \theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = 45°$

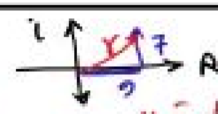
في الربع الثالث ⇐ $\theta = 180 + \theta' = 180 + 45 = 225° = \frac{5\pi}{4}$

العدد في الصورة القطبية هو

$Z = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$9 + 7i$



الصورة القطبية للعدد ← $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9^2+7^2} = \sqrt{130} \approx 11.4$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| \Rightarrow \theta' = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) = 37.9°$

في الربع الأول ⇐ $\theta = \theta' = 37.9° \approx 0.66$ rad

العدد في الصورة القطبية هو

$Z = \sqrt{130}(\cos 37.9° + i \sin 37.9°)$

$= \sqrt{130}(\cos 0.66 + i \sin 0.66)$

تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

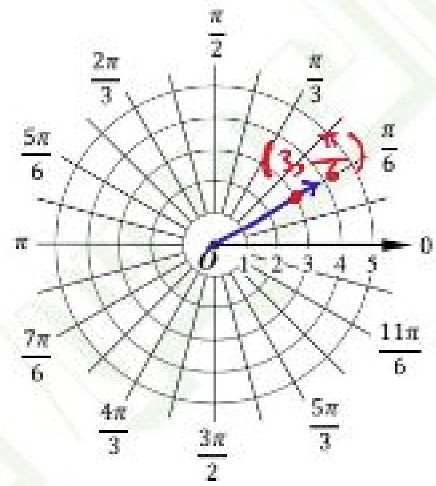
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$r = 3$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

للتعبير عن الصورة الديكارتية للعدد المركب نوجد قيم النسب المثلثية ونبسطها.

$Z = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$Z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ← الصورة الديكارتية



$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

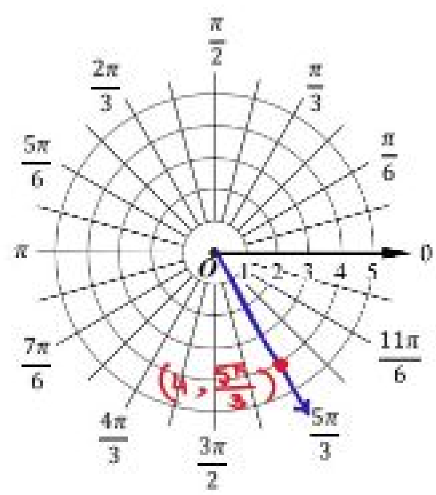
$r = 4$, $\theta = \frac{5\pi}{3}$

نوجد قيم النسب المثلثية ونبسطها

$\Rightarrow Z = 4\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

$Z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ ← الصورة الديكارتية



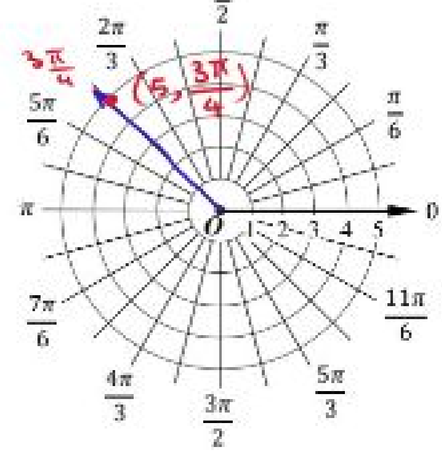
$z = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$r = 5$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

نوجد النسب المثلثية ونبسطها

$Z = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$Z = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$ ← الصورة الديكارتية



مفهوم أساسي ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍ مما يأتي:

Z_1 Z_2

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$Z_1Z_2 = 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ ← الصورة القطبية لناتج الضرب

$Z_1Z_2 = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$Z_1Z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$ ← الصورة الديكارتية لناتج الضرب

$$3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$= 15\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ← الصورة القطبية لناتج الضرب

$Z_1Z_2 = 15(-0.26 + i(0.97)) = -3.88 + 14.49i$ ← الصورة الديكارتية لناتج الضرب

$$-6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$= -12\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= -12\left[\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right]$ ← الصورة القطبية لناتج الضرب

$Z_1Z_2 = 3.11 + 11.59i$ ← الصورة الديكارتية لناتج الضرب

الكهرباء إذا كان الجهد الكهربائي لدائرة كهربائية E يساوي 150 والمعاوقة Z تساوي $6 - 3j$ أوم. فجد شدة التيار I بالأمبير في الدائرة الكهربائية في الصورة الديكارتية. استخدم $E = I \cdot Z$.

نكتب E في الصورة القطبية

$E = 150 + 0j$

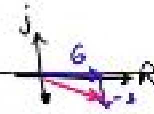
$r_1 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{150^2+0^2} = 150$

$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{0}{150} = 0$

$\Rightarrow E = r[\cos\theta + j\sin\theta]$

$= 150[\cos 0 - j\sin 0]$

نكتب Z في الصورة القطبية



$Z = 6 - 3j$

$r_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{6^2+(-3)^2} = 3\sqrt{5}$

$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 0.46 \text{ rad}$

ع١ / ع٤ $\rightarrow \theta = 2\pi - 0.46 = 5.82 \text{ rad}$

$\Rightarrow Z = 3\sqrt{5}[\cos 5.82 + j\sin 5.82]$

$I = \frac{E}{Z} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)]$

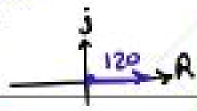
$= \frac{150}{3\sqrt{5}}[\cos(0-5.82) + j\sin(0-5.82)]$

$= 10\sqrt{5}[\cos(-5.82) + j\sin(-5.82)]$ ← التيار في الصورة القطبية

$I = 20 + 10j$ ← التيار في الصورة الديكارتية

الكهرباء دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي 120 فولت وتبلغ شدة تيارها $8 + 6j$ amps. جد معاوقة الدائرة في الصورة الديكارتية.

نكتب E في الصورة القطبية



$E = 120 + 0j$

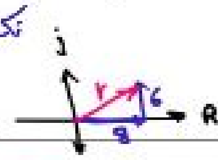
$r_1 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{120^2+0^2} = 120$

$\theta_1 = 0$

$\Rightarrow E = r(\cos\theta - j\sin\theta)$

$= 120[\cos 0 - j\sin 0]$

نكتب I في الصورة القطبية



$I = 8 + 6j$

$r_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{6}{8} = 0.64 \text{ rad}$

$\Rightarrow I = r[\cos\theta + j\sin\theta]$

$= 10[\cos 0.64 + j\sin 0.64]$

$Z = \frac{E}{I} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$= \frac{120}{10}[\cos(0-0.64) + j\sin(0-0.64)]$

$= 12[\cos(-0.64) + j\sin(-0.64)]$ ← المعاوقة في الصورة القطبية

$Z = 9.6 - 7.1j$ ← المعاوقة في الصورة الديكارتية

نظرية

نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

نظرية ديموافر

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية:

$(4 + 4\sqrt{3}i)^6$

في البداية نكتب العدد في الصورة القطبية

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$\theta = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3}$

$Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$= 8[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}]$

$Z^6 = 8^6[\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}]$

$= 262144[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$

$= 262144[1 + 0i]$

$= \boxed{262144}$

$(2\sqrt{3} - 2i)^8$

في البداية نكتب العدد في الصورة القطبية

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$

$\theta = \tan^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-\pi}{6}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 4(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})$

$Z^8 = 4^8(\cos\frac{-8\pi}{6} + i\sin\frac{-8\pi}{6})$

$= 4^8(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3})$

$= 65536(-\frac{1}{2} - i(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$= \boxed{-32768 + 32768\sqrt{3}i}$

$(1 + \sqrt{3}i)^4$

في البداية نكتب العدد في الصورة القطبية

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

$Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$= 2[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}]$

$Z^4 = 2^4[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}]$

$= 16[-\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2})]$

$= \boxed{-8 - 8\sqrt{3}i}$

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن استعمال الصيغة الآتية التي استنتجها العلماء من نظرية ديموافر:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

جذور العدد المركب

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4 - 4i$.

في الرابع نكتب العدد بالصورة القطبية

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi \rightarrow$ لأن $a < 0$ $\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow Z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$

الجذور الرباعية $n = 4$

$Z^{\frac{1}{4}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right]$

الجذر الأول $\rightarrow k = 0 \Rightarrow Z^{\frac{1}{4}} = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{5\pi/4}{4} + i\sin\frac{5\pi/4}{4}\right]$

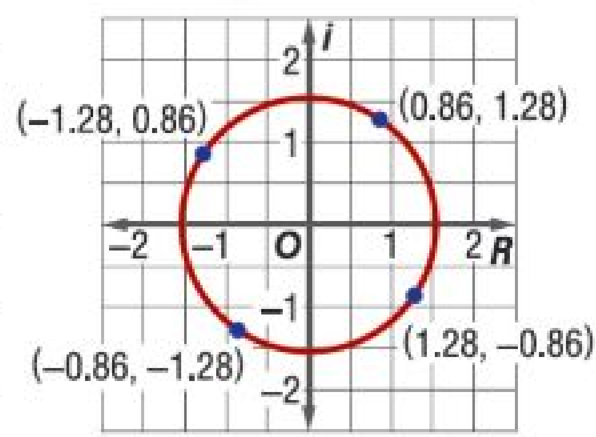
$= (4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right]$

$= 0.86 + 1.28i$

الجذر الثاني $\rightarrow k = 1 \Rightarrow Z^{\frac{1}{4}} = -1.28 + 0.86$

الجذر الثالث $\rightarrow k = 2 \Rightarrow Z^{\frac{1}{4}} = -0.86 - 1.28i$

الجذر الرابع $\rightarrow k = 3 \Rightarrow Z^{\frac{1}{4}} = 1.28 - 0.86$



أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب $2 + 2i$.

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$

$Z = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$

الجذور التكعيبية $n = 3$

$Z^{\frac{1}{3}} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right]$

الجذر الأول $k = 0 \Rightarrow Z^{\frac{1}{3}} = 1.37 + 0.36i$

الجذر الثاني $k = 1 \Rightarrow Z^{\frac{1}{3}} = -1 + i$

الجذر الثالث $k = 2 \Rightarrow Z^{\frac{1}{3}} = -0.37 - 1.37i$

الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثّمانيّة للعدد واحد.

$Z = 1 + 0i$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\theta = \tan^{-1} \frac{0}{1} = 0$

$Z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$

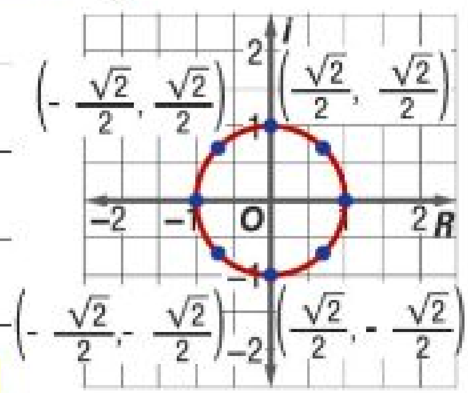
$= 1\,(\cos 0 + i \sin 0)$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$

$n = 8$ الجذور الثمانية

$Z^{\frac{1}{8}} = 1^{\frac{1}{8}}\left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{8} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{8}\right)$

$= \cos \frac{\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi k}{4}$



الجذر الأول $k=0 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = 1$

الجذر الثاني $k=1 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = 0.71 + 0.71i$

الجذر الثالث $k=2 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = i$

الجذر الرابع $k=3 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = -0.71 + 0.71i$

الجذر الخامس $k=4 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = -1$

الجذر السادس $k=5 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = -0.71 - 0.71i$

الجذر السابع $k=6 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = -i$

الجذر الثامن $k=7 \longrightarrow Z^{\frac{1}{8}} = 0.71 - 0.71i$