عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

ورقة عمل الثاني عشر العام **8-2 المتجهات في المستوى الاحداثي**

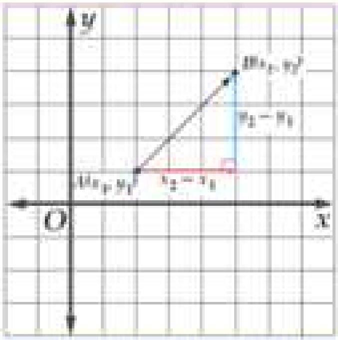
**في هذا الدرس سوف أتعلم:** 1- تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي. 2- كتابة المتجه باستخدام متجهي الوحدة.

## مفهوم أساسي

### الصورة المركَّبة للمتجه

الصورة المركَّبة لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$




**التعبير عن المتجه بالصورة (المركبة)**

أوجد الصورة (المركبة) لـ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(-2,-7)$ , $B(6,1)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 6-(-2), 1-(-7) \rangle$

$= \langle 8, 8 \rangle$

$A(0,8)$ , $B(-9,-3)$

$\overrightarrow{AB} = \langle -9-0, -3-8 \rangle$

$= \langle -9, -11 \rangle$

$A(-4,2)$ , $B(3,-5)$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$= \langle 3-(-4), -5-2 \rangle$

$= \langle 7, -7 \rangle$

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهاً، نقطة بدايته $(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $(x_2, y_2)$ ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن ، $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**إيجاد طول (مقدار) متجه**

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

$A(-2,-7)$ , $B(6,1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-(-7))^2}$

$= 8\sqrt{2} = \boxed{11.31}$

$A(0,8)$ , $B(-9,-3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-9-0)^2 + (-3-8)^2}$

$= \sqrt{202} = \boxed{14.21}$

$A(-4,2)$ , $B(3,-5)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(3-(-4))^2 + (-5-2)^2}$

$= 7\sqrt{2} = \boxed{9.9}$

## مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و $k$ عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

### العمليات على المتجهات

جد كلًا مما يأتي للمتجهات $y = \langle 2, 5 \rangle$ , $z = \langle -3, 0 \rangle$ , $w = \langle -4, 1 \rangle$ :

$w + y$

$= \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$

$= \langle -4 + 2 \, , \, 1 + 5 \rangle$

$= \langle -2 \, , \, 6 \rangle$

$z - 2y$

$= \langle -3, 0 \rangle - 2 \langle 2, 5 \rangle$

$= \langle -3, 0 \rangle - \langle 4, 10 \rangle$

$= \langle -3 - 4 \, , \, 0 - 10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$

$2w + 4y - z$

$= 2\langle -4, 1 \rangle + 4\langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$

$= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$

$= \langle -8 + 8 - (-3) \, , \, 2 + 20 - 0 \rangle = \langle 3, 22 \rangle$

**متجهات الوحدة:** يُسمى المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$ ، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$ .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

### العمليات على المتجهات

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

$\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

$|v| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$u = \dfrac{v}{|v|}$

$= \dfrac{\langle -2, 3 \rangle}{\sqrt{13}}$

$= \left\langle \dfrac{-2}{\sqrt{13}} \, , \, \dfrac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{-2\sqrt{13}}{13} \, , \, \dfrac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

$\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

$|x| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{5}$

$u = \dfrac{x}{|x|}$

$= \dfrac{\langle -4, -8 \rangle}{4\sqrt{5}}$

$= \left\langle \dfrac{-4}{4\sqrt{5}} \, , \, \dfrac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$

$= \left\langle -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \, , \, \dfrac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

$\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

$|w| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

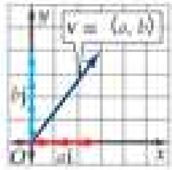
$u = \dfrac{w}{|w|}$

$= \dfrac{\langle 6, -2 \rangle}{2\sqrt{10}}$

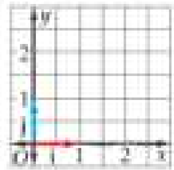
$= \left\langle \dfrac{6}{2\sqrt{10}} \, , \, -\dfrac{2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \, , \, -\dfrac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور $x$ ، والاتجاه الموجب لمحور $y$ بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمّى المتجهان $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.




الشكل 1.2.4




الشكل 1.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4
تُسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًا** للمتجهين $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ . ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$

**كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة**

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي :

$D(-6, 0), E(2, 5)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle 2-(-6) , 5-0 \rangle$

$= \langle 8 , 5 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 8i + 5j$

$D(-3, -8), E(-7, 1)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle -7-(-3) , 1-(-8) \rangle$

$= \langle -4 , 9 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = -4i + 9j$

$D(-2, 3), E(4, 5)$

الصورة المركبة

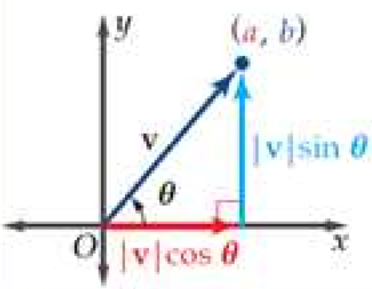
$\overrightarrow{DE} = \langle 4-(-2) , 5-3 \rangle$

$= \langle 6 , 2 \rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 6i + 2j$

يمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستخدام زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور $x$. فمن الشكل يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصور:




المركبة
الصورة الإحداثية $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$

عوّض $= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$

توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ $= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$

## إيجاد الصورة (المركبة) لمتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

أوجد الصورة المركبة للمتجه v المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

| طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي. | $\lvert \mathbf{v} \rvert = 8, \theta = 45°$ | $\lvert \mathbf{v} \rvert = 24, \theta = 210°$ |
|---|---|---|
| $V = 10\cos 120\, i + 10 \sin 120\, j$ | $V = 8 \cos 45\, i + 8 \sin 45$ | $V = 24 \cos 210\, i + 24 \sin 210\, j$ |
| $= -5 i + 5\sqrt{3}\, j$ | $= 4\sqrt{2}\, i + 4\sqrt{2}\, j$ | $= -12\sqrt{3}\, i - 12\, j$ |
| $V = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ الصورة المركبة | $V = \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$ | $V = \langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$ |
| | $= \langle 5.7, 5.7 \rangle$ | |

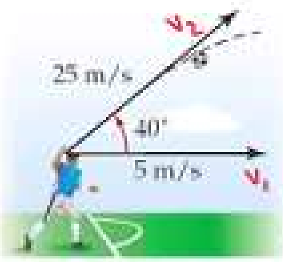
يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي بحل المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|v| \sin\theta}{|v| \cos\theta} = \frac{b}{a}$

## زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور $x$.

| $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ ① ع ر | $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$ ④ ع ر | $\langle -3, -8 \rangle$ ③ ع ر | $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ② ع ر |
|---|---|---|---|
| $\tan\theta = \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert$ | $\tan\theta = \left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert = \frac{5}{4}$ | $\tan\theta = \left\lvert \frac{-8}{-3} \right\rvert = \frac{8}{3}$ | $\tan\theta = \left\lvert \frac{2}{-6} \right\rvert = \frac{2}{6}$ |
| $\tan\theta = \frac{7}{3}$ | $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 51.3$ | $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = 69.4°$ | $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18.4°$ |
| $\theta = \tan^{-1} \frac{7}{3}$ | في الربع الرابع | الربع الثالث. | في الربع الثاني |
| $\theta = 66.8°$ | $\theta = 360 - 51.3$ <br> $= 308.7°$ | $\theta = 180 + 69.4$ <br> $= 249.4°$ | $\theta = 180 - 18.4$ <br> $= 161.6°$ |

## تطبيق العمليات على المتجهات




**كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة $5\ m/s$ ، ليرمي الكرة بسرعة $25\ m/s$ ، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

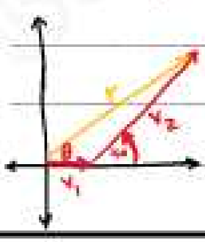
الركض للأمام $V_1 = \langle 5, 0 \rangle$

رمي الكرة $V_2 = \langle 25\cos 40, 25 \sin 40 \rangle = \langle 19.2, 16.1 \rangle$

المحصلة $r = V_1 + V_2$

$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$

$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$




مقدار السرعة $|r| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} =$

$= 29.1\ m/s$

الاتجاه $\theta = \tan^{-1} \frac{16.1}{19.2} = 33.6°$

⇐ السرعة $29.1\ m/s$ في اتجاه $33.6°$ مع الحركة الأفقية.