

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية



*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

<https://almanahj.com/ae>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العام اضغط هنا

<https://almanahj.com/ae/12>

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر العام في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

<https://almanahj.com/ae/12>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العام في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

<https://almanahj.com/ae/12>

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر العام اضغط هنا

<https://almanahj.com/ae/grade12>

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

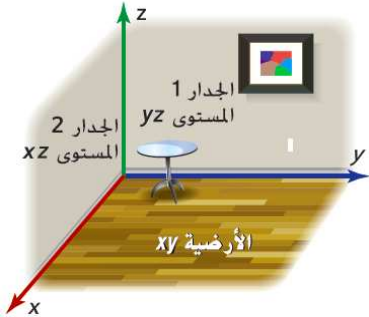
https://t.me/almanahj_bot

8-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

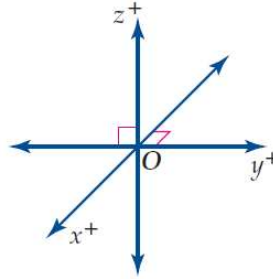
ورقة عمل الثاني عشر العام

1- تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. 2- التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا وإجراء العمليات عليها.

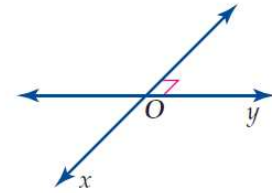
في هذا الدرس سوف نتعلم:



الشكل 1.4.3



الشكل 1.4.2

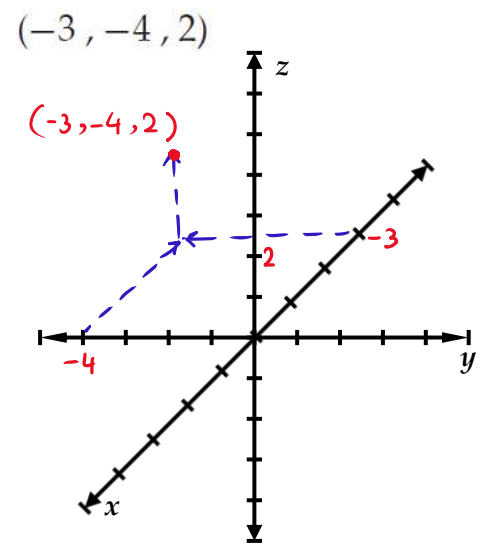
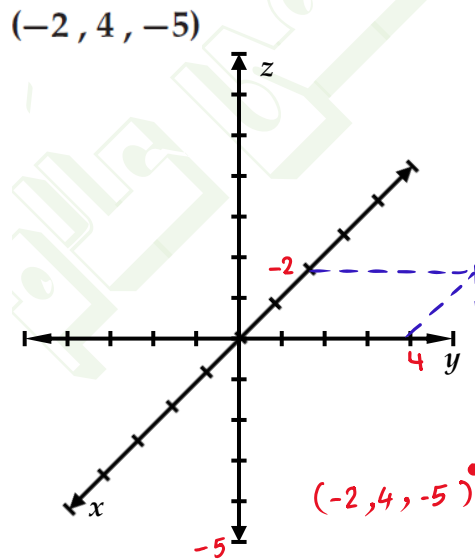
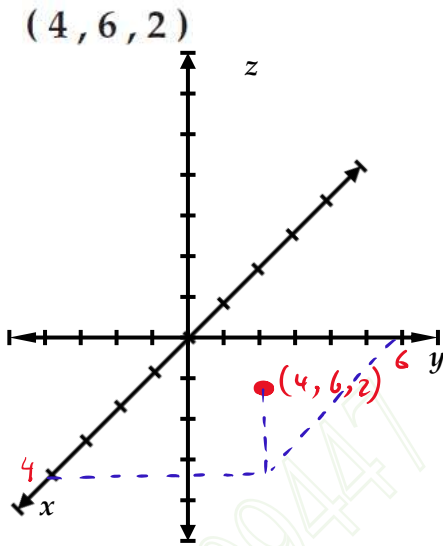


الشكل 1.4.1

تمثل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية (x, y, z) ، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولاً النقطة (x, y) في المستوى xy ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثلها z .

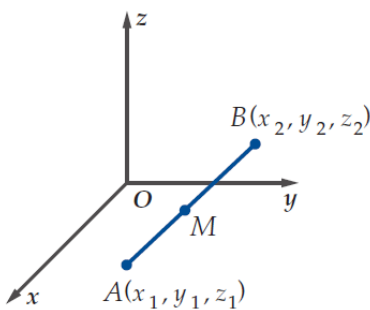
تعيين نقطة في الفضاء

عيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:



صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

مفهوم أساسي



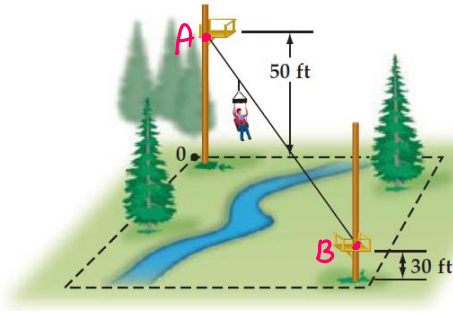
تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطي نقطة المنتصف M لـ \overline{AB} بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$ ، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

(a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصتين إلى أقرب قدم.

(b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين.

$$\boxed{a} \quad AB = \sqrt{(70-10)^2 + (92-12)^2 + (30-50)^2} = 20\sqrt{26} = 102 \text{ ft} \quad \text{تقريباً}$$

$$\boxed{b} \quad \text{نقطة } AB = \left(\frac{70+10}{2}, \frac{92+12}{2}, \frac{30+50}{2} \right) = (40, 52, 40)$$

الطائرات تتطلب لوائح السلامة أن تكون الطائرات على بعد 0.8 km على الأقل عند وجودها في السماء. تطير طائرتان أعلى دبي بالإحداثيات $(90, 45, 9000)$ و $(135, -75, 8400)$. حيث يتم قياس الإحداثيات بالأمتار.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

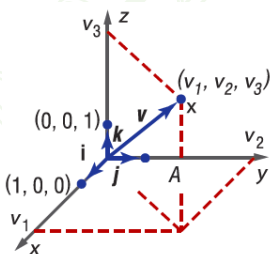
B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة، فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟

$$\boxed{A} \quad \text{المسافة بين الطائرتين} = \sqrt{(135-90)^2 + (-75-45)^2 + (8400-9000)^2} = 613.5 \text{ m}$$

$$613.5 \text{ m} \Rightarrow 0.6135 \text{ km}$$

الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة لأن المسافة بينها أقل من 0.8 km.

$$\boxed{B} \quad \text{نقطة المنتصف للطائرتين} = \left(\frac{135+90}{2}, \frac{-75+45}{2}, \frac{8400+9000}{2} \right) = (112.5, -15, 8700)$$



المتجهات في الفضاء إذا كان v متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر

عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\langle 0, 0, 0 \rangle$ ،

وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\langle 1, 0, 0 \rangle$ ، $\langle 0, 1, 0 \rangle$ ، $\langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في

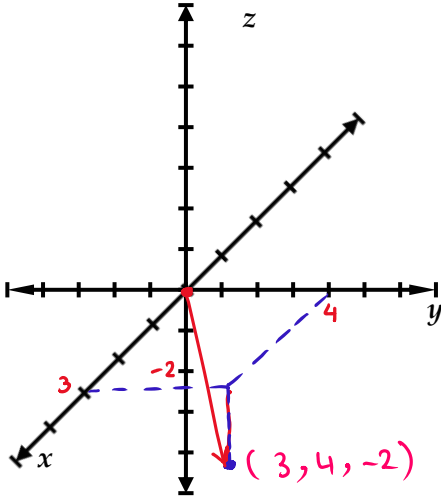
الشكل 1.4.4، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه v على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة i, j, k

كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1i + v_2j + v_3k$.

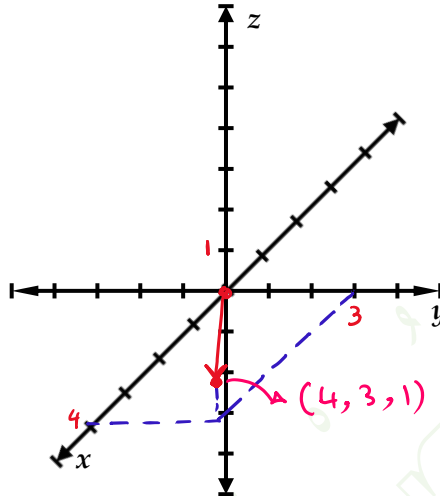
تعيين متجه في الفضاء

مثل بيانياً كلاً من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

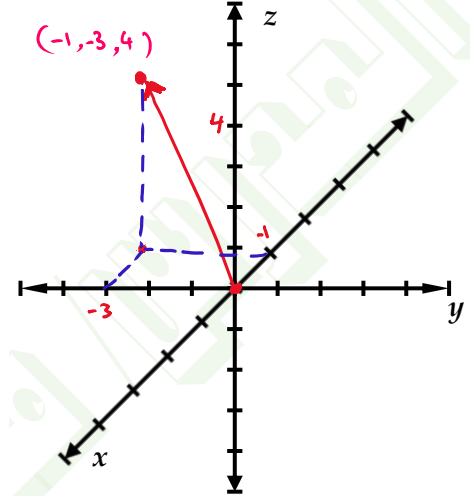
$$\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$$



$$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$



التعبير عن المتجهات في الفضاء جبرياً

جد الصورة المركبة وطول \overline{AB} (مقدار) المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه \overline{AB} في كلٍ مما يأتي:

$$A(-4, -2, 1), B(3, 6, -6)$$

$$A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$$

$$A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle -1 - (-2), 4 - (-5), -2 - (-5) \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 - (-1), 3 - 4, 8 - 6 \rangle$$

$$= \langle 3 - (-4), 6 - (-2), -6 - 1 \rangle$$

$$= \langle 1, 9, 3 \rangle$$

$$= \langle 4, -1, 2 \rangle$$

$$= \langle 7, 8, -7 \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 9^2 + 3^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$= 9\sqrt{2} = \boxed{12.7}$$

$$= \sqrt{91} = \boxed{9.5}$$

$$= \sqrt{21} = \boxed{4.6}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\langle 1, 9, 3 \rangle}{\sqrt{91}}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\langle 4, -1, 2 \rangle}{\sqrt{21}}$$

$$= \left\langle \frac{7}{9\sqrt{2}}, \frac{8}{9\sqrt{2}}, \frac{-7}{9\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}, \frac{3}{\sqrt{91}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$$

العمليات على المتجهات في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle \quad \text{جمع متجهين}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle \quad \text{طرح متجهين}$$

$$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle \quad \text{ضرب متجه في عدد حقيقي}$$

العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ ، $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:
 $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ (a)

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$

$$= \langle 4(3) + 2(-2), 4(-6) + 2(0), 4(2) + 2(5) \rangle$$

$$= \langle 8, -24, 18 \rangle$$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$ (b)

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$

$$= \langle 2(-1) - (-2) + 3(3), 2(4) - 0 + 3(-6), 2(-4) - 5 + 3(2) \rangle$$

$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ ، $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

$4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ (a)

$$4\mathbf{w} - 8\mathbf{z} = 4\langle -1, 4, -4 \rangle - 8\langle -2, 0, 5 \rangle$$

$$= \langle 4(-1) - 8(-2), 4(4) - 8(0), 4(-4) - 8(5) \rangle$$

$$= \langle 12, 16, -56 \rangle$$

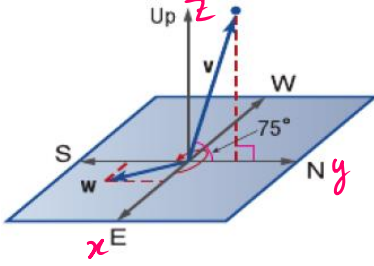
$3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ (b)

$$3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w} = 3\langle 3, -6, 2 \rangle + 3\langle -2, 0, 5 \rangle - 6\langle -1, 4, -4 \rangle$$

$$= \langle 3(3) + 3(-2) - 6(-1), 3(-6) + 3(0) - 6(4), 3(2) + 3(5) - 6(-4) \rangle$$

$$= \langle 9, -42, 45 \rangle$$

استخدام المتجهات في الفضاء



الصواريخ بعد انطلاق صاروخ نموذجي متجه نحو الشمال بزاوية صعود 75° بالنسبة إلى المركبة الأفقية بسرعة 320 km/h . فإذا هب الرياح من الاتجاه الشمالي الغربي بسرعة 8 km/h ، جد متجها يعبر عن سرعة الصاروخ الناتجة بالنسبة إلى نقطة الانطلاق.

$$v = \langle 0, 320 \cos 75, 320 \sin 75 \rangle$$

$$v = \langle 0, 82.8, 309.1 \rangle$$

اتجاه الرياح مع محور x الموجب = 315°

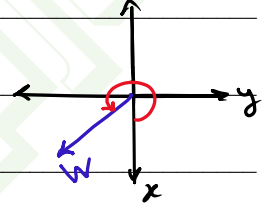
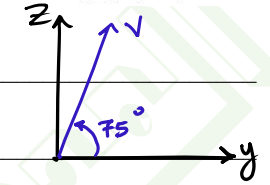
$$\Rightarrow w = \langle 8 \cos 315, 8 \sin 315, 0 \rangle$$

$$w = \langle 5.7, -5.7, 0 \rangle$$

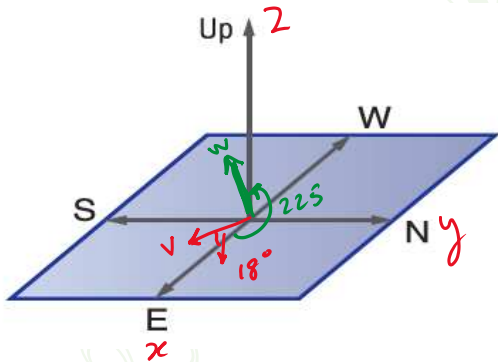
متجه الطول بعد تأثير الرياح = $v + w$

$$\text{النسبة لنقطة الانطلاق} = \langle 0, 82.8, 309.1 \rangle + \langle 5.7, -5.7, 0 \rangle$$

$$= \langle 5.7, 77.1, 309.1 \rangle$$



الطيران بعد إقلاع طائرة، تتجه شرقاً وتستمر في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمركبة الأفقية. تبلغ سرعة طيرانها 400 km/h . إذا كانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 16 km/h ، فجد المتجه الذي يمثل سرعة الطائرة الناتجة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. وافترض أن i يتجه نحو الشرق و j يتجه نحو الشمال و k يتجه لأعلى.

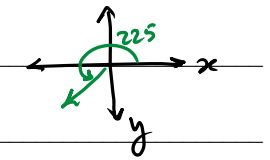
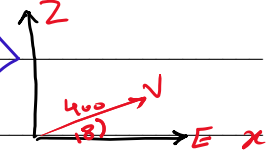


$$v = \langle 400 \cos 18, 0, 400 \sin 18 \rangle$$

$$v = \langle 380.4, 0, 123.6 \rangle$$

$$w = \langle 16 \cos 225, 16 \sin 225, 0 \rangle$$

$$w = \langle -11.3, -11.3, 0 \rangle$$



متجه السرعة الناتجة الطائرة = $v + w$

$$= \langle 380.4, 0, 123.6 \rangle + \langle -11.3, -11.3, 0 \rangle$$

$$= \langle 369.1, -11.3, 123.6 \rangle$$