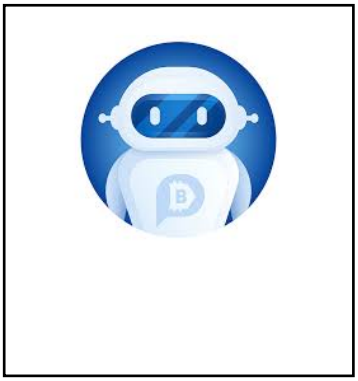
تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف أوراق عمل الدرس السادس الدوال المثلثية العكسية مع الحل

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العام



روابط مواد الصف الثاني عشر العام على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العام والمادة رياضيات في الفصل الأول

1	مراجعة عامة قبل امتحان نهاية الفصل الأول من
2	التوزيع الزمني للفصل الاول
3	الدوال من منظور التفاضل والتكامل
4	اسئلة اختيار متعدد
5	امسات رياضيات

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام

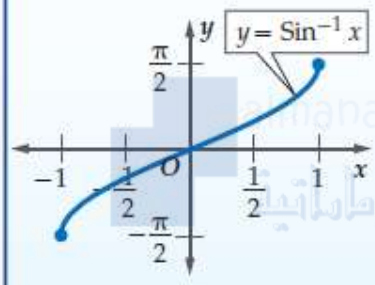
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 4-6 الدوال المثلثية العكسية | الاسم: _____

نواتج التعلّم: 1- إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانيا. 2- إيجاد تركيب الدوال المثلثية.

مفهوم أساسي — الدوالّ المثلّثية العكسية

أضف إلى مطويتك

الدالّة العكسية	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالّة الجيب العكسية $y = \text{Arcsin } x$	$y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
دالّة جيب التمام العكسية $y = \text{Arccos } x$	$y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
دالّة الظل العكسية $y = \text{Arc tan } x$	$y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$	

إرشادات للدراسة تذكّر أنه عند حسابك قيمة معكوس الدالّة المثلّثية، فإن الناتج هو قياس زاوية.

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

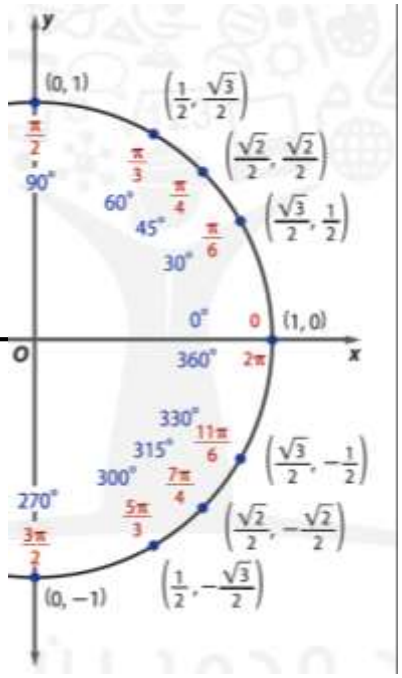
Find the exact value of each expression, if it exists.

إيجاد قيم دوال الـ $\sin^{-1}$

1) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ — $y = \frac{1}{2}$ — النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — عند الزاوية $30°$ — أو $\frac{\pi}{6}$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — عند الزاوية $-45°$ — أو $-\frac{\pi}{4}$

$\sin^{-1} 3$ — $y = 3$ — لا يوجد حل لأن مجال دالة $\sin^{-1}$ هو $-1 \le x \le 1$



$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — عند الزاوية $60°$ — أو $\frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(-2\pi)$ — $y = -2\pi$ — غير موجود لأن $-1 \le \square \le 1$

$\arcsin(-1)$ — $y = -1$ — النقطة $(0, -1)$ — عند الزاوية $-90°$ — أو $-\frac{\pi}{2}$

إيجاد قيمة دوال $\cos^{-1}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

Find the exact value of each expression, if it exists.

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

النقطة $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند الزاوية $135°$

أو $\frac{3\pi}{4}$

$\arccos(-2)$

$x = -2$

غير موجودة

مجال الدالة $y = \arccos(x)$

$-1 \le x \le 1$

$\cos^{-1} 0$

$x = 0$

النقطة $(0, 1)$

عند الزاوية $90°$

أو $\frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

النقطة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

عند الزاوية $150°$

أو $\frac{5\pi}{6}$

$\arccos 2.5$

$x = 2.5$

غير موجودة

مجال الدالة $y = \arccos x$

$-1 \le x \le 1$

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = -\frac{1}{2}$

عند النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

عند الزاوية $120°$

أو $\frac{2\pi}{3}$

إيجاد قيمة دوال معكوس ظل الزاوية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

Find the exact value of each expression, if it exists.

$\tan^{-1}\sqrt{3}$

$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$

النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

عند الزاوية $60°$

أو $\frac{\pi}{3}$

$\arctan 0$

$\frac{y}{x} = 0$

النقطة $(1, 0)$

عند الزاوية $0°$

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

عند الزاوية $-30°$

أو $-\frac{\pi}{6}$

$\tan^{-1}(-1)$

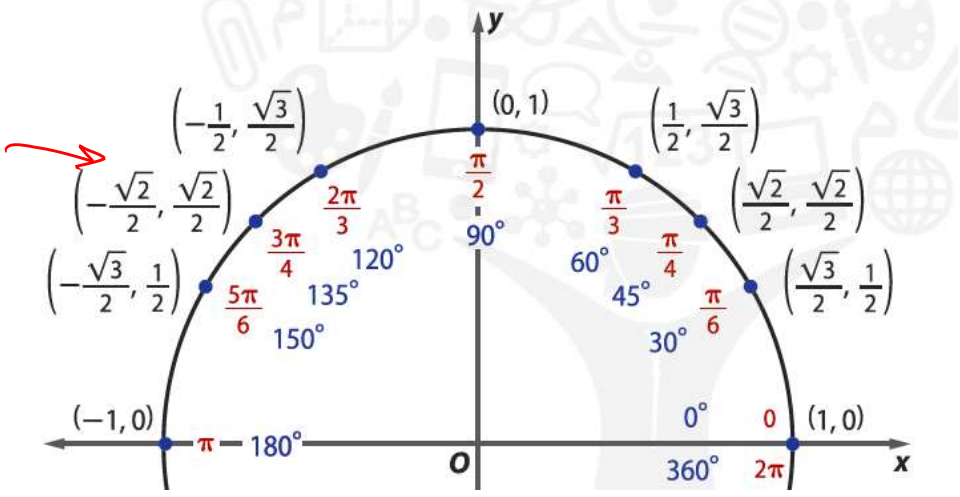
$\frac{y}{x} = -1$

النقطة $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

عند الزاوية $-45°$

أو $-\frac{\pi}{4}$

$\cos^{-1}(0)$



عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook12GEN
قناة شرح فيديو رياضيات 12 عام
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

رسم التمثيلات البيانية للدوال المثلثية العكسية

Sketch the graph of each function.

مثّل كل دالة بيانيًا.

$y = \arccos 2x$ ⇒ $\cos y = 2x$ ⇒ $x = \frac{1}{2}\cos y$

حيث $y \in [0, \pi]$

نشئ جدول

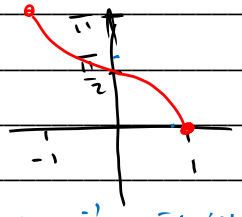
y	0	30	45	60	90	120	135	150	π
$\frac{1}{2}\cos y = x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{2}$

$y = \cos^{-1} 2x$

المجال ⇒ $-1 \le 2x \le 1$

$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

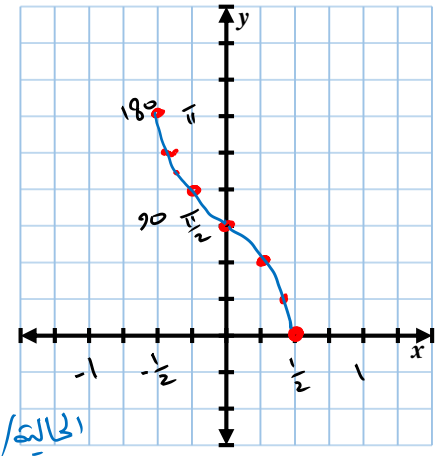
المدى ⇒ $0 \le y \le \pi$



$y = \sin^{-1} x$ الأصلية

انكماش أفقي معامله $\frac{1}{2}$

الحالية



$y = \arcsin 3x$ ⇒ $\sin y = 3x$ ⇒ $x = \frac{1}{3}\sin y$

حيث $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

نشئ جدول

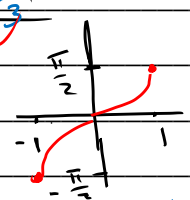
y	$-\frac{\pi}{2}$	-60	-45	-30	0	30	45	60	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{3}\sin y = x$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{3}$

$y = \sin^{-1} 3x$

المجال ⇒ $-1 \le 3x \le 1$

$-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$

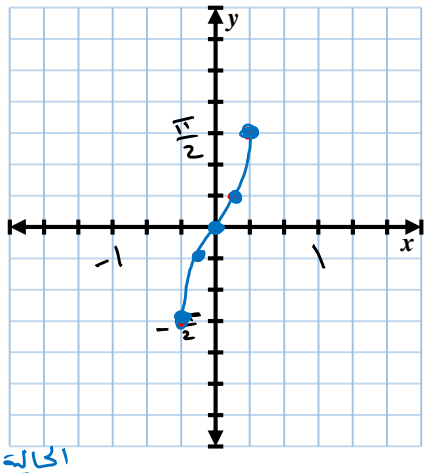
المدى ⇒ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



$y = \sin^{-1} x$ الأصلية

انكماش أفقي معامله $\frac{1}{3}$

الحالية

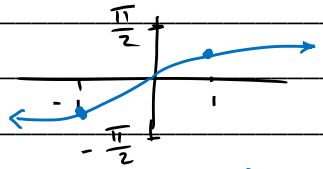


$y = \tan^{-1} 2x$ ⇒ $\tan y = 2x$ ⇒ $x = \frac{1}{2}\tan y$

المجال = $(-\infty, \infty)$

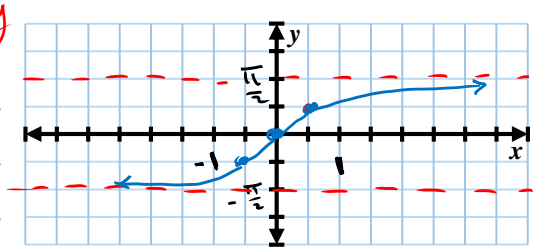
المدى ⇒ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	-45	0	45

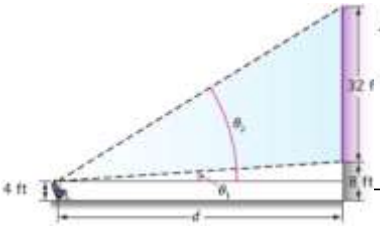


$y = \tan^{-1} x$ الأصلية

الحالية: انكماش أفقي معامله $\frac{1}{2}$



استخدام الدالة المثلثية العكسية



الأفلام في صالة السينما، تتغير زاوية رؤية المشاهد لمشاهدة الفيلم: بناءً على المكان الذي يجلس فيه في السينما.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 4ft فوق مستوى الأرض.

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

$\theta = \theta_2 - \theta_1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{36}{d} - \tan^{-1}\frac{4}{d}$ (A)

$\tan\theta_2 = \frac{36}{d}$

$\Rightarrow \theta_2 = \tan^{-1}\frac{36}{d}$

بالمثل $\Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{d}$

(B) يرسم الدالة على الآلة الحاسبة البيانية أو البرامج

ثم نجد القيم العظمى يتضح

أنه للدالة قيمة عظمى عند $d = 12$

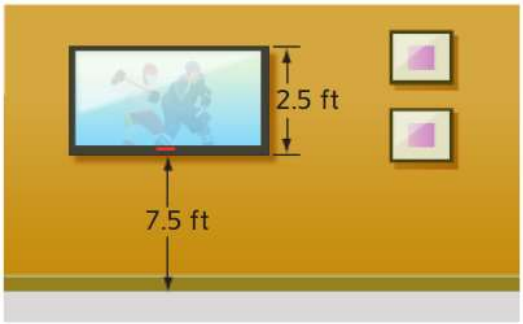
قيمتها $53.1°$

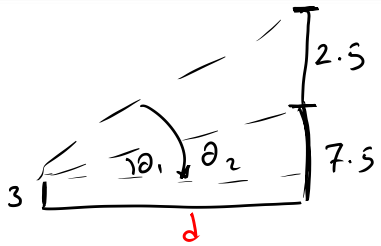
$\Leftarrow$ أقصى زاوية رؤية عند مسافة 12 ft

التلفاز اشترى أحمد شاشة تلفاز مسطحة جديدة. حتى تتمكن أسرته من مشاهدته، قرّر تعليق التلفاز على الحائط كما هو موضح.

A. اكتب دالة تمثل المسافة d التي تقع فيها أقصى زاوية رؤية θ لأحمد إذا كان مستوى عينه في أثناء الجلوس يبعد 3ft عن مستوى سطح الأرض.

B. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.





$\theta = \theta_2 - \theta_1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{d} - \tan^{-1}\frac{4.5}{d}$

بعد إدخال الدالة في البيانية أو البرامج

نحصل على أن أعظم قيمة لـ θ

عند $d = 5.6$ ft

$\theta = 0.22$ rad عند

$= 0.22 \times \frac{180}{\pi} = 12.6°$

$\Leftarrow$ المسافة التي تتوافق مع أعظم زاوية هي 5.6 ft

استخدام خصائص الدوال المثلثية العكسية

مجال تركيب الدوال المثلثية

$f[f^{-1}(x)] = x$

إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\sin(\sin^{-1} x) = x$.

إذا كان $-1 \le x \le 1$، يكون $\cos(\cos^{-1} x) = x$.

إذا كان $-\infty < x < \infty$، يكون $\tan(\tan^{-1} x) = x$.

$f^{-1}[f(x)] = x$

إذا كان $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$، يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$.

إذا كان $0 \le x \le \pi$، يكون $\cos^{-1}(\cos x) = x$.

إذا كان $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، يكون $\tan^{-1}(\tan x) = x$.

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

Find the exact value of each expression, if it exists.

1 $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{7\pi}{4}$ ← ليست ضمن مجال الدالة

نعلم أن مدى الدالة arcsin هو $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

الحل النهائي يجب أن يكون في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ الحل: $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

2 $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

أولاً / $-\frac{1}{4}$ ينتمي لمجال $\sin^{-1} x$ $(-1, 1)$

ثانياً: $= \boxed{-\frac{1}{4}}$ ← $\sin x$ عند $-\frac{1}{4}$

$[-1, 1]$

3 $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)$

أولاً / $\frac{\pi}{3}$ ينتمي لمجال $\tan^{-1} x$ $(-\infty, \infty)$

ثانياً: $\boxed{\frac{\pi}{3}}$

$\tan x$ عند $\frac{\pi}{3}$

$(-\infty, \infty)$

4 $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

غير معرفة

لأن $\tan\frac{\pi}{2}$ غير معرفة

5 $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

أولاً / $\sin x$ في مجال $\frac{2\pi}{3}$ $(-\infty, \infty)$

ثانياً / $\frac{2\pi}{3}$ لا تقع في مدى $\sin^{-1} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\frac{2\pi}{3}}$

الحل: $\frac{\pi}{3}$

$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \boxed{\frac{\pi}{3}}$

6 $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

أولاً / $\frac{3\pi}{4}$ في مجال $\cos x$ $(-\infty, \infty)$

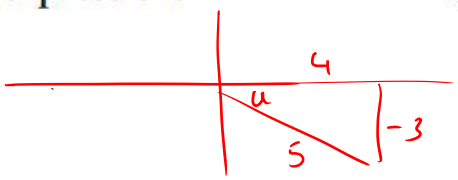
$\boxed{\frac{3\pi}{4}}$

ثانياً: $\frac{3\pi}{4}$ في مدى $\cos^{-1}$ $(0, \pi)$

إيجاد قيمة تركيب الدوال المثلثية

Find the exact value of each expression. جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

$\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$



$\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = u$ نفرض أن

$\Rightarrow \tan u = \frac{-3}{4}$

مجال $\tan^{-1}$ في الربع (1، 4)

$\tan u$ سالب فقط

u في الربع الرابع

$\Rightarrow \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

$= \cos u$ من الافتراض

$= \boxed{\frac{4}{5}}$ من المثلث

$\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

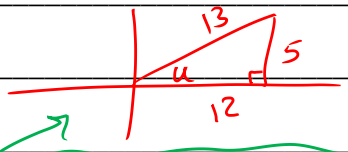
$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \boxed{30^\circ} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

$\sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$

$\arctan\frac{5}{12} = u$ نفرض

$\Rightarrow \tan u = \frac{5}{12}$



مجال $\tan^{-1}$ في الربع (1، 4)

u في الربع (1) $\leftarrow$ موجب $\tan u$

$= \sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$

$= \sin u$ من الافتراض

$= \boxed{\frac{5}{13}}$ من المثلث

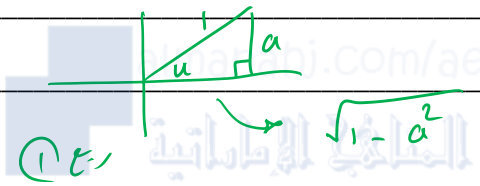
اكتب $\tan(\arcsin a)$ في صورة تعبير جبري لـ a لا يحتوي على دوال مثلثية.

Write $\tan(\arcsin a)$ as an algebraic expression of a that does not involve trigonometric functions.

نفرض أن $\arcsin a = u$

$\Rightarrow \sin u = a$

في الربع ① ، ④



$\tan(\arcsin a)$

$= \tan u$

$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \times \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}$ بتبسيط

$= \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$

اكتب كل تعبير في صورة تعبير جبري لـ x لا يحتوي على دوال مثلثية.

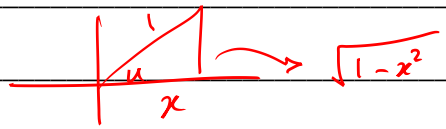
Write each expression as an algebraic expression of x that does not involve trigonometric functions.

$\sin(\arccos x)$

نفرض أن $u = \arccos x$

$\Rightarrow \cos u = x$

في الربع ① ، ②



$\sin(\arccos x)$

$= \sin(\arccos x)$

$= \sin u$

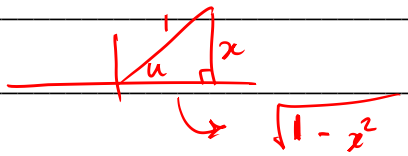
$= \sqrt{1-x^2}$

$\cot[\sin^{-1} x]$

نفرض أن $u = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \sin u = x$

في الربع ① ، ④



$\cot[\sin^{-1} x]$

$= \cos(\sin^{-1} x)$

$= \cos u$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$