الملف أوراق عمل الضرب النقطي ومساقط المتجهات مع الحل
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر العام ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلَّام
050-2509447

ورقة عمل الثاني عشر العام — 8-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين. واستخدامه لإيجاد الزاوية بينهما. 2- إيجاد مسقط متجه على آخر.

يعرَّف **الضرب النقطي** للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle , b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$$

يكون المتجهان غير الصفريين a , b **متعامدين**، إذا وفقط إذا كان $a \cdot b = 0$

الضرب النقطي لـ a و b، ويرمز إليه a • b ويمكن قراءته على النحو a نقطة b.

استخدام الضرب النقطي في التحقق من تعامد متجهين

جد حاصل الضرب النقطي للمتجهين u , v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين.

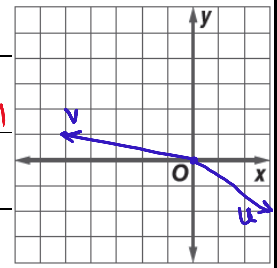
$\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

u.V = 3(-5) + (-2)(1)

u.V = -17

المتجهين غير متعامدين

لأن u.V ≠ 0



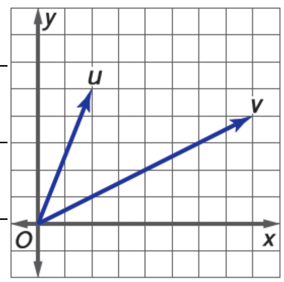
$\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle , \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

u.V = 2(8) + 5(4)

u.V = 36

المتجهين غير متعامدين

لأن u.V ≠ 0



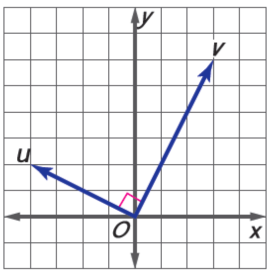
$\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

u.v = 3(-4) + 6(2)

u.v = 0

المتجهين متعامدين

لأن u.V = 0



خصائص الضرب النقطي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في كمية عددية	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب النقطي للمتجهات الصفرية	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

استخدام الضرب النقطي لإيجاد طول (مقدار) متجه

استخدم الضرب النقطي؛ لإيجاد مقدار المتجه المذكور:

$\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

$|c|^2 = c \cdot c$

$|c| = \sqrt{c \cdot c}$

$= \sqrt{\langle -1, -7 \rangle \cdot \langle -1, -7 \rangle}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$

$= 5\sqrt{2} = \boxed{7.07}$

$\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

$|b|^2 = b \cdot b$

$|b| = \sqrt{b \cdot b}$

$= \sqrt{\langle 12, 16 \rangle \cdot \langle 12, 16 \rangle}$

$= \sqrt{12^2 + 16^2}$

$= \boxed{20}$

$\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$

$|a|^2 = a \cdot a$

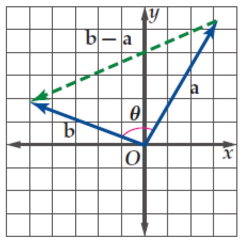
$|a| = \sqrt{a \cdot a}$

$= \sqrt{\langle -5, 12 \rangle \cdot \langle -5, 12 \rangle}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$

$= \boxed{13}$

مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$a\cdot b = |a||b|\cos\theta$

$\frac{a\cdot b}{|a||b|} = \cos\theta$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|}$

$\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$

$|u| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

$|v| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{(-5)(4)+(-2)(4)}{\sqrt{29}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{-7}{\sqrt{58}}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{58}}\right)$

$= 156.8^\circ$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$|u| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$|v| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{3(3)+1(-3)}{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$= 63.4^\circ$

$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

$|u| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$

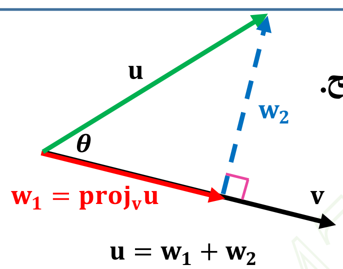
$|v| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$

$\cos\theta = \frac{6(-4)+2(3)}{2\sqrt{10}\cdot 5} = \frac{-9\sqrt{10}}{50}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9\sqrt{10}}{50}\right)$

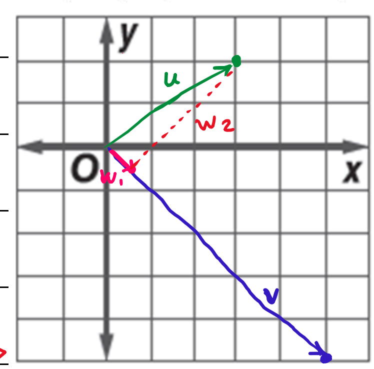
$= 124.7^\circ$

إذا كان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهان غير صفريان، وكان $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ مركّبًا المتجه $\mathbf{u}$ بحيث $\mathbf{w}_1$ توازي $\mathbf{v}$ كما هو موضح.
فإن المتجه $\mathbf{w}_1$ يسمّى مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. ويرمز إليه بالرمز $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ و $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$



العمليات على المتجهات

جـد مسقط المتجه $u = \langle 3, 2\rangle$ على $v = \langle 5, -5\rangle$. ثم اكتب u على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه u على v.



$W_1 = \text{proj}_v u$

$= \left(\frac{u\cdot v}{|v|^2}\right)v$

$= \left(\frac{5(3)+(-5)(2)}{5^2+(-5)^2}\right)\langle 5, -5\rangle$

$= \frac{1}{10}\langle 5, -5\rangle$

$= \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$u = W_1 + W_2$

$W_2 = u - W_1$

$= \langle 3, 2\rangle - \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$= \langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$

$\Rightarrow u = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$

جـــد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$w_1 = proj_v u$

$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$

$= \left(\frac{8(1) + 5(2)}{8^2 + 5^2}\right) \langle 8, 5 \rangle$

$= \frac{18}{89} \langle 8, 5 \rangle$

$= \langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \rangle$

$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle 1, 2 \rangle - \langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \rangle$

$= \langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \rangle$

$\Rightarrow u = \langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \rangle + \langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \rangle$

المسقط في عكس اتجاه v

جـــد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$ على المتجه $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$.

$proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) \cdot v$

$= \left(\frac{4(2) + 6(-3)}{2^2 + 6^2}\right) \cdot \langle 2, 6 \rangle$

$= -\frac{1}{4} \langle 2, 6 \rangle$

$w_1 = \langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

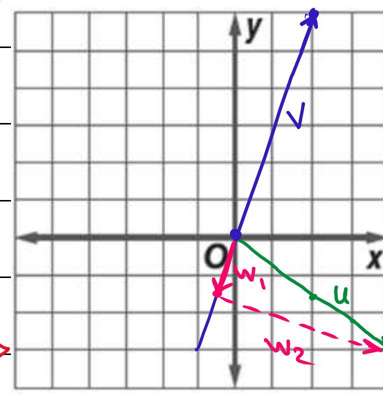
$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle 4, -3 \rangle - \langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

$= \langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

$\Rightarrow u = \langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle + \langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$



جـــد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle -3, 4 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين. أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) \cdot v$

$= \left(\frac{-3(6) + 4(1)}{6^2 + 1^2}\right) \cdot \langle 6, 1 \rangle$

$= -\frac{14}{37} \langle 6, 1 \rangle$

$w_1 = \langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \rangle$

$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle -3, 4 \rangle - \langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \rangle$

$= \langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \rangle$

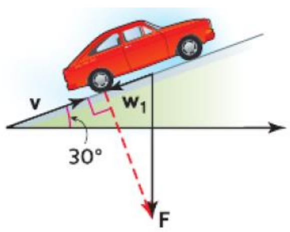
$\Rightarrow u = \langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \rangle + \langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \rangle$

إذا كان المتجه **u** يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه **v**. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه **v**) بالقوة **u** (الشكل 8.3.7). القوة المؤثرة هي القوة في دفع المركبة في اتجاه $\mathbf{v}$، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

الشكل 8.3.7

استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة

السيارات تقف سيارة بقوة 13000 N على تل مائل بزاوية 30° كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟



* قوة 13000 N (وزن) لأسفل جهة الجاذبية

$F = \langle 0, -13000 \rangle$

توجد متجه الوحدة v في اتجاه التل

$V = \langle 1\cos 30, 1\sin 30 \rangle$

$= \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

توجد مسقط F على v أو ما يسمى w_1

$w_1 = p$

$w_1 = \text{proj}_v F = \left(\frac{v\cdot F}{|v|^2}\right)\cdot v$

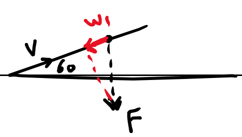
$= \left(\frac{0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 13000\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) v$

$w_1 = \frac{-6500}{1} v = -6500v$

القوة اللازمة لمنع التدحرج هي عكس قوة w_1 وهي $-(-6500N)$

أي $6500N$ في اتجاه التل.

التزلج تجلس خديجة على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية 60° ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن خديجة والزلاجة *550 N* ؟



* $F = \langle 0, -550 \rangle$ لأسفل (الجاذبية)

* توجد متجه الوحدة v في اتجاه التل

$V = \langle 1\cos 60, 1\sin 60 \rangle$

$V = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle \Rightarrow |V| = 1$ متجه وحدة

توجد مسقط F على v أو ما يسمى w_1

رطل $125 \rightarrow 550N$

$?? \leftarrow 476.31N$

$w_1 = \text{proj}_v F = \left(\frac{F\cdot v}{|v|^2}\right) v$

$= \left(\frac{0\left(\frac{1}{2}\right) + (-550)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}\right) v$

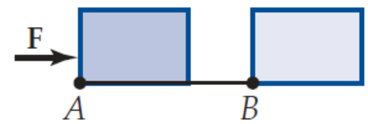
$= -476.31\ v$

القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل هي عكس $-476.31N$

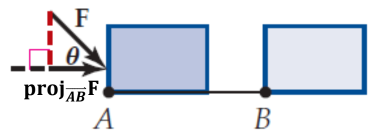
يعني $476.31\ N$ في اتجاه التل.

عمل المدرس / مصطفى أسامة عَلَّام
050-2509447

من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول W بواسطة قوة ثابتة F تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B.

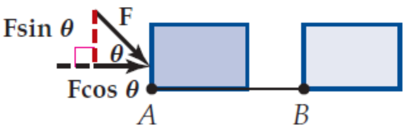


$$W = |F|\,|\overrightarrow{AB}|$$



$$W = |proj_{\overrightarrow{AB}}F|\,|\overrightarrow{AB}|$$

$$W = |F|(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$$

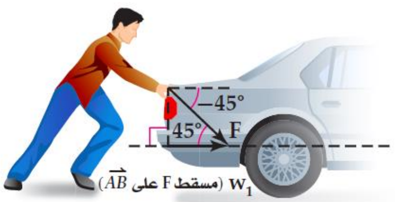


$$W = F \cdot \overrightarrow{AB}$$

وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم–رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن–متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

حساب الشغل

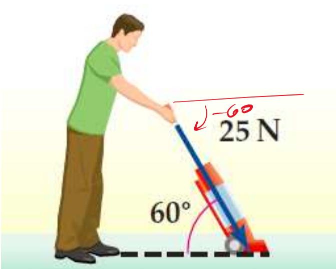
سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



$W = |F| \cos\theta\, |\overrightarrow{AB}|$

$W = 120 \cos(-45)(10) = 848.53$ N.m (J) جول

تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



$W = |F|(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}|$

$= 25 \cos(-60)(6)$

$= 75$ J

الشغل المبذول = 75 جول