عمل المدرس / مصطفى أسامة علام

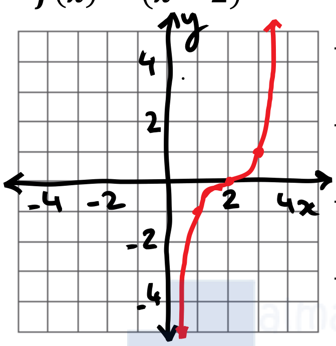
ورقة عمل الثاني عشر العام | 2-2 الدوال كثيرة الحدود | الاسم:____________

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيا. 2- تمثيل بيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

التحويلات البيانية للدوال أحادية الحد

ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل دالة فيما يلي:

$f(x) = (x-2)^5$



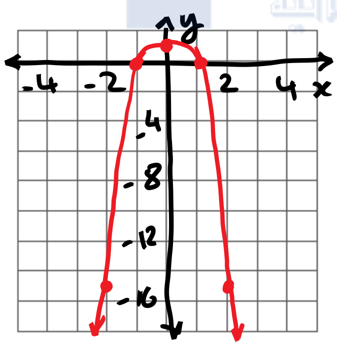
نقطة الانعطاف هي (2,0)

$y = x^5$ يشبه $y = x^3$

$y = (x-2)^5$ هي إزاحة 2 وحدة يمين للدالة الأصلية $f(x) = x^5$

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-243	-32	-1	0	1	32	243

$g(x) = -x^4 + 1$



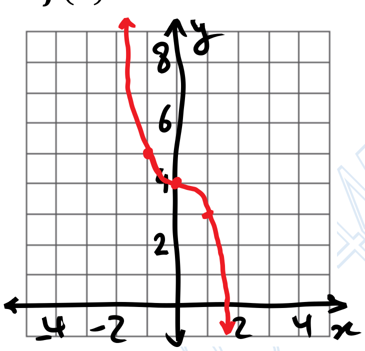
نقطة الرأس هي (0,1)

$y = x^4$ تشبه $y = x^2$

$y = -x^4 + 1$ هي انعكاس في x ثم إزاحة وحدة لأعلى للدالة $f(x) = x^4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-80	-15	0	1	0	-15	-80

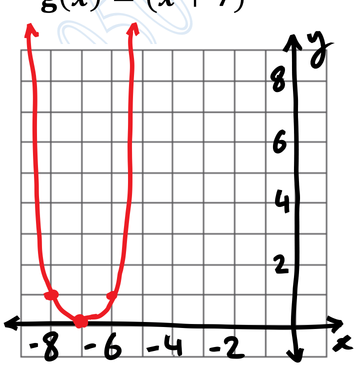
$f(x) = 4 - x^3$



نقطة الانعطاف هي (0,4) انعكاس الدالة $f(x) = x^3$ في محور x ثم إزاحة لأعلى 4 وحدات

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	31	12	5	4	3	-4	-23

$g(x) = (x+7)^4$



نقطة الرأس هي (-7,0) ← إزاحة 7 وحدات يسار للدالة $f(x) = x^4$

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
y	81	16	1	0	1	16	81

أس فردي معامل −   أس فرديا معامل +   أس زوجي معامل −   أس زوجي معامل +

تطبيق اختبار الحد الرئيس

يستخدم **اختبار الحد الرئيس** قيمة الدرجة ومعامل هذا الحد لتحديد السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

وضّح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.

$f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$

من الدرجة الزوجية ، معامل الحد الرئيس موجب ⟸

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$g(x) = -3x^2 - 2x^7 + 4x^4$

من الدرجة الفردية ، معامل الحد الرئيس سالب ⟸

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$h(x) = x^3 - 2x^2$

من الدرجة الفردية ، معامل الحد الرئيس موجب ⟸

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$

من الدرجة الزوجية ، معامل الحد الرئيس سالب ⟸

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$

من الدرجة الفردية ، معامل الحد الرئيس موجب

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام

أصفار الدوال كثيرة الحدود

تحتوي الدلة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ على n من الأصفار الحقيقية على أكثر تقدير وعلى n -1 من نقاط الدوران على أكثر تقدير.

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

الدرجة الثالثة ← عدد الأصفار الحقيقية الممكنة 3 على أكثر تقدير.
ونقاط الدوران 2 على أكثر تقدير

إيجاد الأصفار الحقيقية بالتحليل ←

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$

$x(x-2)(x-3) = 0$

$x = 0$, $x = 2$, $x = 3$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$

من الدرجة الثالثة.
عدد الأصفار الحقيقية 3 على الأكثر , نقاط الدوران 2 على الأكثر

إيجاد الأصفار الحقيقية بالتحليل:

$x^3 - 6x^2 - 27x = 0$

$x(x^2 - 6x - 27) = 0$

$x(x+3)(x-9) = 0$

$x = 0$, $x = -3$, $x = 9$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$

من الدرجة الرابعة ← عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر ، نقاط الدوران 3 على الأكثر

إيجاد الأصفار بالتحليل:

$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

$(x^2 - 3)(x^2 - 5) = 0$

$x^2 = 3$ | $x^2 = 5$

$x = \mp\sqrt{3}$ | $x = \mp\sqrt{5}$

$au^2 + bu + c$ الصيغة التربيعية

أصفار الدالة كثيرة الحدود بالصيغة التربيعية

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.

$\mathbf{g}(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

من الدرجة الرابعة ← عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر ، عدد نقاط الدوران 3 على الأكثر

نفترض $u = x^2$ نكتب الدالة بالصيغة التربيعية ← $g(x) = u^2 - 3u - 4$

نوجد الأصفار بالتحليل

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2+1)(x^2-4) = 0$

$x^2 = -1 \quad | \quad x^2 = 4$

$x = \mp\sqrt{-1} \quad | \quad x = \mp\sqrt{4}$

$x = \mp i \quad | \quad x = \mp 2$

صفران حقيقيان
وصفران تخيليان

$h(x) = x^5 - 6x^3 - 16x$

من الدرجة الخامسة ← عدد الأصفار الحقيقية 5 على الأكثر ، عدد نقاط الدوران 4 على الأكثر

إيجاد الأصفار

$x^5 - 6x^3 - 16x = 0$

$x(x^4 - 6x^2 - 16) = 0$

$x(x^2+2)(x^2-8) = 0$

$x = 0 \quad | \quad x^2 = -2 \quad | \quad x^2 = 8$

$x = \mp\sqrt{-2} \quad | \quad x = \mp\sqrt{8}$

$x = \mp\sqrt{2}\, i \quad | \quad x = \mp 2\sqrt{2}$

$\mathbf{g}(x) = x^4 - 9x^2 + 18$

من الدرجة الرابعة ← عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر ، عدد نقاط الدوران 3 على الأكثر

إيجاد الأصفار بالتحليل

$x^4 - 9x^2 + 18 = 0$

$(x^2-3)(x^2-6) = 0$

$x^2 = 3 \quad | \quad x^2 = 6$

$x = \mp\sqrt{3} \quad | \quad x = \mp\sqrt{6}$

الدوال كثيرة الحدود ذات الأصفار المُكررة

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل.

$h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$

من الدرجة الرابعة ← عدد الأصفار الحقيقية 4 على الأكثر، عدد نقاط الدوران 3 على الأكثر.

إيجاد الأصفار. $-x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$

$-x^2(x^2 + x - 2) = 0$

$-x^2(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 0$ يتكرر مرتان (عدد زوجي من التكرار)
وهذا يعني أن الدالة تمس محور x عند $x = 0$ ولا تقطعه.

$x = 0$, $x = 0$ | $x = 1$ | $x = -2$

$f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$

من الدرجة الخامسة ← عدد الأصفار الحقيقية 5 على الأكثر، عدد نقاط الدوران 4 على الأكثر.

إيجاد الأصفار بالتحليل. $3x^5 - 18x^4 + 27x^3 = 0$

$3x^3(x^2 - 6x + 9) = 0$

$3x^3(x - 3)(x - 3) = 0$

$x = 3$ تكرر مرتان (يمس المحور x عند $x = 3$)
$x = 0$ يتكرر 3 مرات (عدد فردي من التكرار)
إذن الدالة تقطع محور x (عند $x = 0$)

$x = 0$, $x = 0$, $x = 0$ | $x = 3$ | $x = 3$

$g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$

من الدرجة الثالثة ← عدد الأصفار الحقيقية 3 على الأكثر، عدد نقاط الدوران 2 على الأكثر.

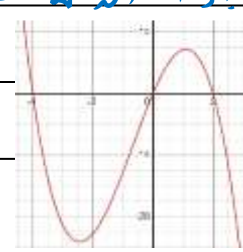
إيجاد الأصفار بالتحليل. $-2x^3 - 4x^2 + 16x = 0$

$-2x(x^2 + 2x - 8) = 0$

$-2x(x - 2)(x + 4) = 0$

لا يوجد تكرار في الأصفار
إذا الدالة تقطع المحور x في جميع الأصفار.

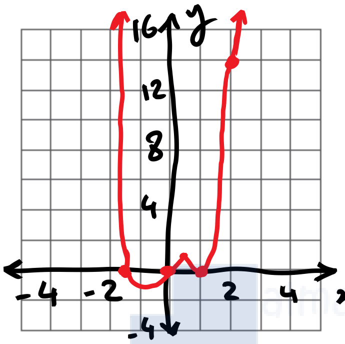
$x = 0$ | $x = 2$ | $x = -4$



تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا

فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا.

$f(x) = x(2x+3)(x-1)^2$



a) الدالة من الدرجة الرابعة ومعامل الحد الرئيسي موجب ←

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

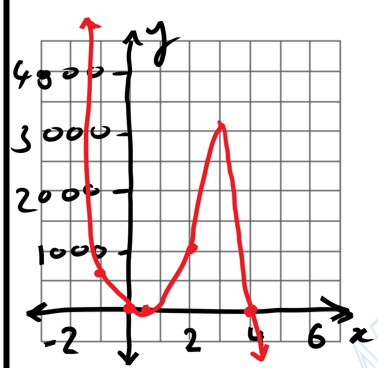
b) الأصفار هي 1 , 1 , $-\frac{3}{2}$, 0 ← عند التكرار

المنحنى يمس محور x عند 1 ويقطع محور x عند $-\frac{3}{2}$, 0

c)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	18	0	-4	0	$\frac{1}{2}$	0	14

$f(x) = -2x(x-4)(3x-1)^3$



a) الدالة من الدرجة الخامسة ومعامل الحد الرئيسي سالب ←

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

b) الأصفار هي $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 4 / 0

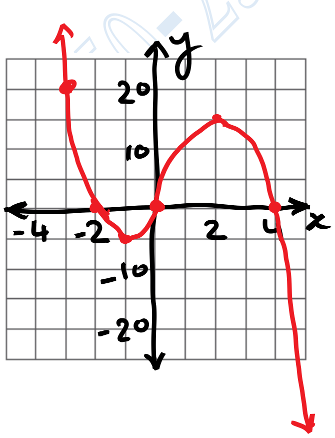
الصفر $\frac{1}{3}$ يتكرر بعدد فردي من المرات ← المنحنى يقطع محور x عند

$0 / 4 / \frac{1}{3}$

c)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
y	8232	640	0	[illegible]	0	0.44	48	1000	3072	0	-27440

$h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$



a) من الدرجة الثالثة ومعامل الحد الرئيسي سالب

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

b) الأصفار

$-x^3 + 2x^2 + 8x = 0$

$\Rightarrow -x(x^2 - 2x - 8) = 0$

$-x(x+2)(x-4) = 0$

$x = 0$, $x = -2$, $x = 4$

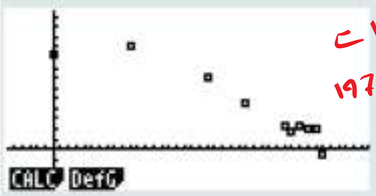
x	-3	-2	-1	0	2	4	5
y	21	0	-5	0	16	0	-35

تمثيل البيانات باستخدام دوال كثيرة الحدود

المدخرات يوضح الجدول متوسط المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية.

عدد السنوات بعد 1970

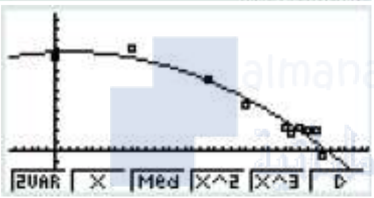
العام x	1970	1980	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005
	0	10	20	25	30	31	32	33	34	35
النسبة المئوية للمدخرات	9.4	10.0	7.0	4.6	2.3	1.8	2.4	2.1	2.0	−0.4




```
QuadReg
  a =-8.633E-03
  b =0.03334772
  c =9.7444976
  r²=0.96087978
 MSe=0.62388913
y=ax²+bx+c
                COPY DRAW
```

$\rightarrow -8.6\times10^{-3}$

معامل الارتباط



a. صمم مخطط تشتت للبيانات. وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

c. استخدم النموذج لتقدير نسبة المدخرات في 1993.

d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي وصلت فيه نسبة المدخرات إلى 6.5%.

a) من الآلة الحاسبة يتضح أن مخطط الانتشار يأخذ الشكل الرباعي نستخدم

b) الانحدار الرباعي بالآلة $y=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow y=-0.009x^2+0.033x+9.744$

معامل الارتباط 0.96

c) عام 1993 ← $x=23$ ⇐ $y=-0.009(23)^2+0.033(23)+9.744$

$=\boxed{5.742}$ %

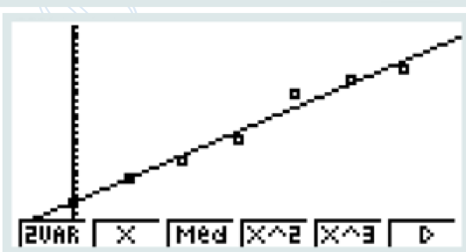
d) نرسم خط $y=6.5$ يتقاطع مع الدالة الناتجة الأولى ← يتقاطع المنحنيان عند $\boxed{x=20.9}$ → 1971 سنة تقريبًا

السكان تم توضيح متوسط عمر سكان إحدى الدول حسب التوقع في عام 2080.

عدد السنوات بعد 1900

العام x	1900	1930	1960	1990	2020	2050	2080
	0	30	60	90	120	150	180
متوسط العمر y	22.9	26.5	29.5	33.0	40.2	42.7	43.9


```
LinearReg
   a =0.12630952
   b =22.7321428
   r =0.98690885
   r²=0.97398908
  MSe=2.14735714
y=ax+b
                COPY DRAW
```



a. اكتب دالة ~~لوغاريتمية~~ كثيرة حدود لتمثيل البيانات. بفرض أن L1 يمثل عدد الأعوام منذ 1900.

b. قدّر متوسط عمر السكان في 2005.

c. وفقًا للنموذج الخاص بك، في أي عام وصل متوسط عمر السكان إلى 30؟

a) من خلال مخطط الانتشار الذي ظهر في الحاسبة الراسمة

يتضح أن البيانات تأخذ شكل الدالة الخطية (نستخدم

الانحدار الخطي $y=ax+b$

$y=0.126x+22.732$

معامل الارتباط 0.97

b) 2005 ← $x=105$ ← $y=0.126(105)+22.732$

$\approx\boxed{36}$

c) من خلال رسم الدالة نرسم $y=30$ ← يتقاطع المنحنيان عند $x\approx58$ ⇐ سنة $\boxed{1958}$