"1"

الدرس : 8 - 9

الثلاثاء : 16-3-2021 :

البرهان بالاستقراء الرياضي

نواتج التعلم :

- أن يعرف الطالب برهنة العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.
- معرفة خطأ العبارات بإيجاد مثال مضاد.

تغذية راجعة :

درسنا المتتاليات والمتسلسلات

مثال: المتتالية

$$a_1 = 3$$
$$a_n = -2\,a_{n-1} \quad n \geq 2$$

$a_1 = 3$

$a_2 = -2(a_1) = -2(3) = -6$

$a_3 = -2(a_2) = -2(-6) = 12$

$a_4 = -2(a_3) = -2(12) = -24$

⋮

المجموع الجزئي الرابع هو :

$3 + (-6) + 12 + (-24) = -15$

جد :

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$
$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$
$$= 55$$

الاستقراء الرياضي :

لاثبات صحة عبارة بطريقة الاستقراء الرياضي. نتبع الخطوات التالية :

1. نثبت أن العبارة صحيحة من أجل $n = 1$.
2. نفرض أن العبارة صحيحة من أجل $n = K$.
3. نثبت صحة العبارة من أجل $n = K+1$.

a - نعوض في العبارة المفروضة كل n بـ $K+1$. نحصل على عبارة مطلوب اثباتها نسميها "1'".

b. ننطلق من الطرف الأول في العبارة "1'" ونصل الى الطرف الثاني وذلك وفق عمليات حسابية .

تمرين : $\frac{1}{599}$:

أثبت أن $n^2 \overset{?}{=} 1+3+5+\cdots+(2n-1)$

الحل : - نثبت صحة المساواة من أجل $n = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 1^2 = 1 \\ L_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

المساواة صحيحة من أجل $n = 1$.

- نفرض أن المساواة صحيحة عند $n = K$

$$K^2 = 1+3+5+\cdots+(2K-1) \quad \cdots\cdots \text{"1"}$$

- نثبت صحة المساواة عند $n = K+1$

$$(K+1)^2 = 1+3+5+\cdots+(2(K+1)-1)$$

$$\underbrace{(K+1)^2}_{L_1} \overset{?}{=} \underbrace{1+3+5+\cdots+2K+1}_{L_2}$$

$$L_2 = 1+3+5+\cdots+2K+1$$

$$= \underbrace{1+3+5+\cdots+2K-1}_{K^2} + 2K+1$$

$$= K^2+2K+1 = (K+1)^2 = L_1$$

فالمساواة صحيحة عند $K+1$.

$\frac{1}{597}$.

.3.

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

- نثبت صحة المساواة من أجل $n=1$.

$$L_1=1^2=1$$
$$L_2=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=\frac{6}{6}=1 \Big\} L_1=L_2$$

المساواة صحيحة عند $n=1$.

- نفرض أن المساواة صحيحة عند $n=K$.

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+K^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6} \quad \dots (1)$$

- نثبت صحة المساواة عند $n=K+1$.

نعوض كل n بـ $K+1$:

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(K+1)^2=\frac{(K+1)(K+1+1)(2(K+1)+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(K+1)^2\overset{?}{=}\frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$

$$L_1=1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(K+1)^2$$
$$=\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots\dots+K^2}+(K+1)^2$$
$$=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}+(K+1)^2$$
$$=\frac{K(K+1)(2K+1)+6(K+1)^2}{6}=\frac{(K+1)[K(2K+1)+6(K+1)]}{6}$$
$$=\frac{(K+1)(2K^2+K+6K+6)}{6}=\frac{(K+1)(2K^2+7K+6)}{6}$$
$$=\frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}=L_2$$

فالمساواة صحيحة عند $n=K+1$.

اثبات قابلية القسمة :

قابلية القسمة :

$15 \div 3 = 5 + \overset{\text{الباقي}}{0}$

$17 \div 3 = 5 + 2$

نقول عن العدد 15 أنه يقبل القسمة على 3 .
بينما العدد 17 لا يقبل القسمة على 3 .

نتيجة : نقول عن عدد K أنه يقبل القسمة على عدد a اذا كان باقي القسمة صفراً .

تمرين : $\frac{2}{598}$.

برهن أن « $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 حيث n عدد طبيعي »

الحل : المطلوب إثباته هو ($7^n - 1$ يقبل القسمة على 6) .

الحل :

- نثبت صحة القضية من أجل $n = 1$

$7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$

العدد 6 يقبل القسمة على 6 .
وبالتالي القضية صحيحة عند $n = 1$.

- نفرض أن القضية صحيحة من أجل $n = K$

$7^K - 1$ يقبل القسمة على 6 .
أي يوجد عدد L بحيث يكون

$\frac{7^K - 1}{6} = L \Longrightarrow 7^K - 1 = 6L$

نوجد الحد الأعلى أس بدلالة K بدلالة الحدود الباقية .

$7^K = 6L + 1 \quad \ldots\ldots *$

5.

- نثبت صحة القضية من أجل $n=k+1$

$$7^{k+1}-1 = 7^k \times 7^1 - 1$$
$$= 7 \times 7^k - 1$$
$$= 7(6L+1) - 1$$ نعوض من * نجد
$$= 42L + 7 - 1$$
$$= 42L + 6$$
$$= 6(7L+1)$$
$= 6 \times$ عدد

ومنه $7^{k+1}-1$ تقبل القسمة على 6 .

فالقضية صحيحة عند $n=k+1$.

وبالتالي القضية صحيحة مهما تكن n .

استخدام مثال مضاد للدحض :

ملاحظة : لاثبات خطأ قضية يكفي أن نثبت أن القضية خاطئة من أجل قيمة واحدة فقط .

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$\frac{3}{598}$.

الحل:

	n	الطرف الأول	الطرف الثاني
✓	1	1	1
✓	2	5	5
×	3	14	12

من أجل $n=3$ المساواة غير صحيحة .

وبالتالي المساواة غير صحيحة مهما تكن n .

"6"

$\frac{5}{599}$. برهن صحة العبارة

« 4^n-1 يقبل القسمة على 3 »

من أجل أي عدد طبيعي n .

الحل :

- نثبت صحة القضية من أجل $n=1$.

$$4^1-1 = 4-1 = 3$$

3 تقبل القسمة على 3 .

فالقضية صحيحة عند $n=1$.

- نفرض القضية صحيحة عند $n=K$.

$$\frac{4^K-1}{3} = L \Rightarrow 4^K-1 = 3L$$

$$\Rightarrow 4^K = 3L+1 \quad \cdots\cdots *$$

- نثبت صحة القضية عند $n=K+1$.

$$4^{K+1}-1 = 4^K \times 4^1 - 1$$

$$= 4 \times 4^K - 1$$

$$= 4(3L+1)-1$$ نعوض من * :

$$= 12L+4-1$$

$$= 12L+3$$

$$= 3(4L+1)$$

$$= 3 \times \text{عدد}$$

اذن القضية صحيحة عند $n=K+1$

فالقضية صحيحة مهما تكن n .

15
P. 599

برهن صحة العبارة التالية من أجل كل عدد طبيعي n

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(2n-1)^2 \overset{?}{=} \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

الحل: - نثبت صحة العبارة من أجل $n=1$

$$1^2 \overset{?}{=} \frac{1(2(1)-1)(2(1)+1)}{3} \Rightarrow 1 \overset{?}{=} \frac{1\times1\times3}{3} \Rightarrow 1=1$$

العبارة صحيحة من أجل $n=1$.

- نفرض أن العبارة صحيحة من أجل $n=K$

$$(1)\dots\dots \quad 1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(2K-1)^2=\frac{K(2K-1)(2K+1)}{3}$$

- نثبت صحة العبارة من أجل $n=K+1$:

نعوض كل n بـ $K+1$.

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+[2(K+1)-1]^2=\frac{(K+1)(2(K+1)-1)(2(K+1)+1)}{3}$$

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(2K+1)^2}_{L_1} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{(K+1)(2K+1)(2K+3)}{3}}_{L_2}$$

$$L_1=1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(2K+1)^2$$

$$=\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots\dots+(2K-1)^2}_{\text{يساوي الطرف الثاني من (1)}}+(2K+1)^2$$

نعوض من (1) نجد .

$$=\frac{K(2K-1)(2K+1)}{3}+(2K+1)^2$$

نوحد المقامات

$$=\frac{K(2K-1)(2K+1)}{3}+\frac{3(2K+1)^2}{3}$$

$$=\frac{(2K+1)[K(2K-1)+3(2K+1)]}{3}=\frac{(2K+1)(2K^2-K+6K+3)}{3}$$

$$=\frac{(2K+1)(2K^2+5K+3)}{3}$$

بتحليل $2K^2+5K+3$ إلى ضرب عاملين

$$=\frac{(2K+1)(K+1)(2K+3)}{3}=L_2$$

فالعبارة صحيحة مهما تكن $n=K+1$

فالعبارة صحيحة مهما تكن n عدداً طبيعياً .