حل نموذج أسئلة (المصفوفات) وفق الهيكل الوزاري

أسئلة الهيكل الوزاري للصف 11 م فصل 2

✓ **فكرة(1) (ضرب المصفوفات)**:

- **حالة(1)**:

عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

عندها يكون ناتج الضرب محدد(موجود) ونتابع بضرب الصف من الأولى بالعمود من الثانية.

- **حالة(2)**:

عدد أعمدة الأولى ≠ عدد صفوف الثانية

عندها يكون ناتج الضرب غير محدد (ليس موجود).

تمرين وزاري:

1) جد AB حيث

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 0\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 6\\3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$A)\ \begin{bmatrix}-9 & -5 & 17\\-8 & 0 & 24\end{bmatrix}$	$B)\ \begin{bmatrix}-6 & 0 & 6\\12 & 0 & 1\end{bmatrix}$
$C)\ \begin{bmatrix}-9 & -8\\-5 & 0\\17 & 24\end{bmatrix}$	$D)$ غير محدد AB

الحل:

ط1: لدينا

عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

نضرب كل صف من المصفوفة الأولى بأعمدة الثانية ثم نقوم بجمع النواتج فنحصل على:

$$AB=$$

$$\begin{bmatrix}3(-2)+(-1)(3) & 3(0)+(-1)(5) & 3(6)+(-1)(1)\\4(-2)+(0)(3) & 4(0)+(0)(5) & 4(6)+(0)(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -5 & 17\\-8 & 0 & 24\end{bmatrix}$$

الإجابة الصحيحة هي $A)$.

ط2: نستخدم الآلة الحاسبة باتباع الخطوات الآتية:

$Mode \longrightarrow 6 \longrightarrow 1(Mat\ A) \longrightarrow 5(2\times 2)$

ندخل العناصر $\longrightarrow AC \longrightarrow Shift \longrightarrow 4 \longrightarrow$

$2(Data) \longrightarrow 2(Mat\ B) \longrightarrow 4(2\times 3) \longrightarrow$

ندخل العناصر $\longrightarrow Shift \longrightarrow 4 \longrightarrow 3(Mat\ A)$

$\longrightarrow \times$ (ضرب) $\longrightarrow Shift \longrightarrow 4(Mat\ B)$

$\longrightarrow =$ (يساوي)

1) جد BA حيث

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\4 & 0\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 6\\3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$A)\ \begin{bmatrix}-9 & -5 & 17\\-8 & 0 & 24\end{bmatrix}$	$B)\ \begin{bmatrix}-6 & 0 & 6\\12 & 0 & 1\end{bmatrix}$
$C)\ \begin{bmatrix}-9 & -8\\-5 & 0\\17 & 24\end{bmatrix}$	$D)$ غير محدد BA

الحل: بما أن عدد أعمدة الأولى ≠ عدد صفوف الثانية فإن ناتج BA غير محدد والإجابة الصحيحة هي $D)$.

تمرين: جد AB و BA, إن أمكن:

1) $A=\begin{bmatrix}8 & 1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}3 & -7\\-5 & 2\end{bmatrix}$

2) $A=\begin{bmatrix}2 & 9\\-7 & 3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}6 & -4\\0 & 3\end{bmatrix}$

3) $A=\begin{bmatrix}3 & -5\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

4) $A=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}6 & 1 & -10 & 9\end{bmatrix}$

5) $A=\begin{bmatrix}2\\5\\-6\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}6 & 0 & -1\\-4 & 9 & 8\end{bmatrix}$

6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

7) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

8) $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -9 \\ -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

✓ **فكرة(2) (محدد مصفوفة 2×2)**:

لإيجاد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

نوجد الفرق بين ناتج ضرب قطري المصفوفة. أي

$$detA = |A| = ad - bc$$

مثـال: جد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 4(-3) = 20$$

✓ **فكرة(3) (معكوس مصفوفة 2×2)**:

لإيجاد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

لدينا طريقتين:

- **طريقة(1)**:

بالاستفادة من المحدد: إذا كان $detA \neq 0$ فإن للمصفوفة A معكوس يُعطى بالشكل:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- **طريقة(2)**: الكتابة في صورة مستوى صف منخفض ولذلك نتبع الخطوات:

1) ننشئ المصفوفة الموسعة

$$[A : I]$$

حيث I المصفوفة المحايدة ونعلم أنها بالشكل:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) نُطبق عمليات الصف لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض لينتج

$$[I : A^{-1}]$$

مثـال: جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: نوجد

$$det\, A = 2(4) - (-3)(4) = 20$$

بما أن $detA \neq 0$ فإن للمصفوفة A معكوس هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

تمـرين لك: جد معكوس المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

"ستجد أن ليس لها معكوس"

مثـال: جد A^{-1} إن وجدت وإن لم توجد فأكتب منفردة:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A \vdots I] = \begin{bmatrix} 8 & -5 & \vdots & 1 & 0 \\ -3 & 2 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجري عمليات الصف الآتية:

$1)\ 3R_1 + 8R_2 \longrightarrow R_2$

لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

ثم

$2)\ R_1 + 5R_2 \longrightarrow R_1$

لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & \vdots & 16 & 40 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

ثم

$3)\ \frac{1}{8}R_1 \longrightarrow R_1$

لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \vdots & 3 & 8 \end{bmatrix} = [I \vdots A^{-1}]$$

نستنتج أن للمصفوفة A معكوس ومعكوسها

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

تمرين لك: جد A^{-1} إن وجدت وإن لم توجد فأكتب منفردة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

"ستجد أنها منفردة"

تمرين:

1) جد A^{-1}, إن وجدت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$B) A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	$A) A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
$D) A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$C)$ ليس لها معكوس

2) أي المحددات التالية قيمتها صفر:

$B) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$	$A) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$
$D) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}$	$C) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$

3) المصفوفة الموسعة في نظام المعادلات التالي:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$$

$$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

هي:

$A) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 9 \\ -4 & 1 & 8 & \vdots & -16 \\ 2 & 3 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$
$B) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 9 \\ -4 & 1 & 8 & \vdots & -16 \\ 2 & 3 & -2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$
$C) \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & 9 \\ -4 & -1 & 8 & \vdots & 16 \\ 2 & 3 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$

$$D)\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4) مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات التالي:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$$

$$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

هي:

$$A)\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 9 \\ -4 & 1 & 8 & -16 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$B)\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 9 \\ -4 & 1 & 8 & -16 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$C)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D)\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

5) تمثل المصفوفة أدناه نموذج درجة الصف المنخفض لنظام من المعادلات, جد حل هذا النظام:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$A)\ (9,-16,6)$	$B)\ (9,-16,-6)$
$C)(1,1,1)$	$D)\ (6,-16,9)$

6) أي المصفوفات الأربعة ليس لها معكوس:

$A)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	$B)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$
$C)\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$	$D)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

تمرين: جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة, إن وُجد.

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

✓ **فكرة(4) (استخدام المصفوفة العكسية لحل نظام معادلات خطية):**

خطوات الحل:

1) نكتب النظام بالشكل المصفوفي $AX = B$.

2) نوجد

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3) نضرب A^{-1} بِـ B أي

$$X = A^{-1}.B$$

الحل هو:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مثال: استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات

$$2x - 3y = -1$$

$$-3x + 5y = 3$$

الحل:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10-9}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حل النظام هو $(4,3)$.

❖ **إيجاد n**: جد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة:

$$\left[\begin{array}{cc|c} n & 8 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$A)\ 8$	$B)\ 4$	$C) -4$	$D) -8$

الحل: لا يمكن حل النظام في حال

$$detA = 0 \Rightarrow (-2)(n) - (8)(1) = 0 \Rightarrow$$

$$-2n - 8 = 0 \Rightarrow 2n = -8 \Rightarrow n = -4$$

والإجابة الصحيحة هي $C)$.

تمرين: جد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية:

1) $\left[\begin{array}{cc|c} n & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$ 2) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array}\right]$

3) $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & -9 & 3 \\ n & n & 11 \end{array}\right]$ 4) $\left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array}\right]$

✓ **فكرة(5) (استخدام قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية 2×2 إن وجد حل وحيد)**:

بفرض لدينا نظام المعادلات

$$ax_1 + bx_2 = m$$

$$cx_1 + dx_2 = k$$

خطوات الحل:

1) نكتب مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2) نوجد المحدد A ويجب أن لا يساوي الصفر.

3) نعوض في

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

حيث أن

$$A_1 = \begin{bmatrix} m & b \\ k & d \end{bmatrix} , \ A_2 = \begin{bmatrix} a & m \\ c & k \end{bmatrix}$$

مثال: استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$-4x_1 - x_2 = -13$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (3)(-1) - (2)(-4) = -3 + 8 = 5$$

بما أن $|A| \neq 0$ فنستطيع استخدام قاعدة كرامر.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{bmatrix} , \ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{6(-1)-(2)(-13)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{(3)(-13)-(6)(-4)}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

الحل هو $(4,-3)$.

ملاحظة: لاحظ أنه عندما نريد x_1 فنضع B (عمود الثوابت) بدل عمود x_1 في مصفوفة المعاملات, و عندما نريد x_2 فنضع B (عمود الثوابت) بدل عمود x_2 في مصفوفة المعاملات.

تمرين: استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية, إن وُجد حل فريد.

1) $\begin{array}{l} -3x + y = 4 \\ 2x + y = -6 \end{array}$

2) $\begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 5 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 5x + 4y = 7 \\ -x - 4y = -3 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 4x + \frac{1}{3}y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{array}$

✓ **فكرة(6) (إيجاد محدد 3×3)**:

ط1: بالخطوات.

مثال: أحسب محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$detA = +(-1)\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(4)\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 109$$

ط2: عن طريق الآلة الحاسبة.

$Mode \to 6 \to 1(Mat\ A) \to 1(3 \times 3)$

$\to$ ندخل العناصر $\to AC \to Shift \to 4 \to 7$

$\to Shift \to 4 \to 3 \to =$ (يساوي)

فكرة(7) (قاعدة كرامر 3×3): استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات الخطية:

$$-x - 2y = -4z + 12$$

$$3x - 6y + z = 15$$

$$2x + 5y + 1 = 0$$

خطوات الحل: بعد إعادة ترتيب الحدود نقوم بما يلي:

1) نحسب محدد مصفوفة المعاملات A.

2) ناتج المحدد يجب أن يكون لا يساوي الصفر.

3) نستخدم كرامر

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} \ , \ y = \frac{|A_y|}{|A|} \ , \ z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

بالعودة للتمرين المفروض: لدينا

$$-x - 2y + 4z = 12$$

$$3x - 6y + z = 15$$

$$2x + 5y = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$detA = 109 \neq 0$$

نستخدم قاعدة كرامر:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{218}{109} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{-109}{109} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{109} = \frac{327}{109} = 3$$

الحل هو $(2,-1,3)$.

ملاحظة: لاحظ أنه عندما نريد x فنضع B (عمود الثوابت) بدل عمود x في مصفوفة المعاملات, و عندما نريد y فنضع B (عمود الثوابت) بدل عمود y في مصفوفة المعاملات, وعندما نريد z فنضع B (عمود الثوابت) بدل عمود z في مصفوفة المعاملات.

تمرين: جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة, إن وُجد:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 \\ -6 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, 4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, 6) $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

تمرين: استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية, إن وُجد حل فريد.

1) $\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ 4x + 3y - 7z &= -8 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 6x - 2y - z &= 16 \\ 3x + 4y + 2z &= 28 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 3y - 4z &= 25 \\ x + 6y + z &= 20 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 9x + 7y &= -30 \\ 8y + 5z &= 11 \\ -3x + 10z &= 73 \end{aligned}$

تمرين: ما محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$A)\ 32$	$B)\ -14$	$C)\ 44$	$D)\ 40$