

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية



## حل درس الاتصال والسلوك الطرقي والنهيات من الوحدة الأولى

[موقع المناهج](#) ⇨ [المناهج الإماراتية](#) ⇨ [الصف الحادي عشر المتقدم](#) ⇨ [رياضيات](#) ⇨ [الفصل الأول](#) ⇨ [الملف](#)

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 09:12:20 2024-09-12

إعداد: عمرو البيومي

## التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر المتقدم



اضغط هنا للحصول على جميع روابط "الصف الحادي عشر المتقدم"

## روابط مواد الصف الحادي عشر المتقدم على تلغرام

[الرياضيات](#)

[اللغة الانجليزية](#)

[اللغة العربية](#)

[التربية الاسلامية](#)

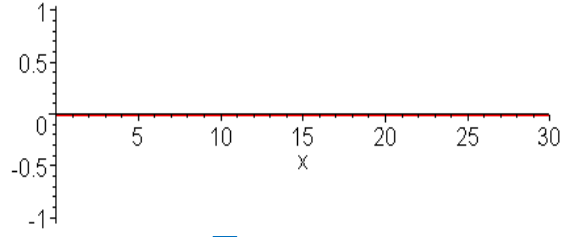
## المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول

<a href="#">حل درس تحليل الرسومات البيانية للدوال والعلاقات</a>	1
<a href="#">عرض بوربوينت حل درس Functions الدوال</a>	2
<a href="#">عرض بوربوينت حل درس تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات</a>	3
<a href="#">عرض بوربوينت درس Functions Reciprocal Graphing رسم الدوال المتبادلة بياناً من الوحدة السابعة</a>	4

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول

[عرض بوربوينت حل الدرس الأول Dividing and Multiplying](#)  
[من الكسرية التعابير وقسمة ضرب Rational Expressions](#)  
الوحدة السابعة

5

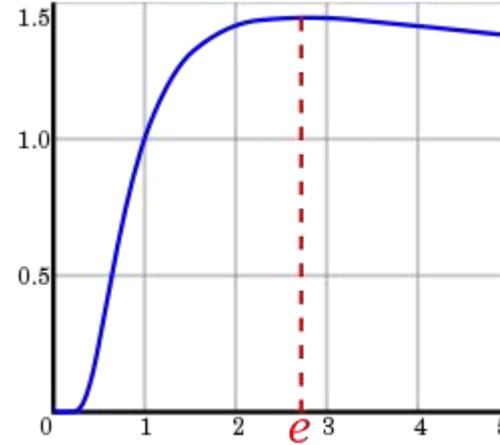


الوحدة: الأولى

الحادي عشر المتقدم

11

3



الثاني عشر العام

12

عنوان الدرس: الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

## نواتج التعلم

في نهاية هذا الدرس ستكون قادراً على :

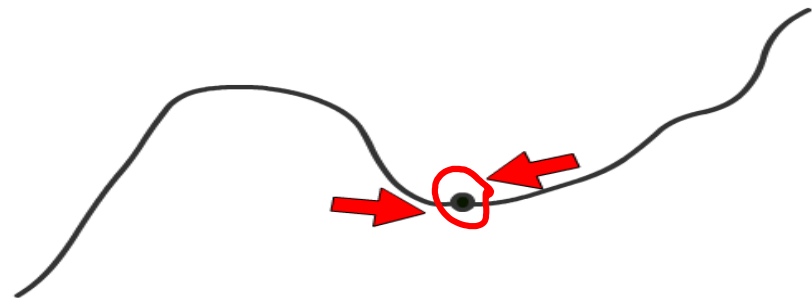
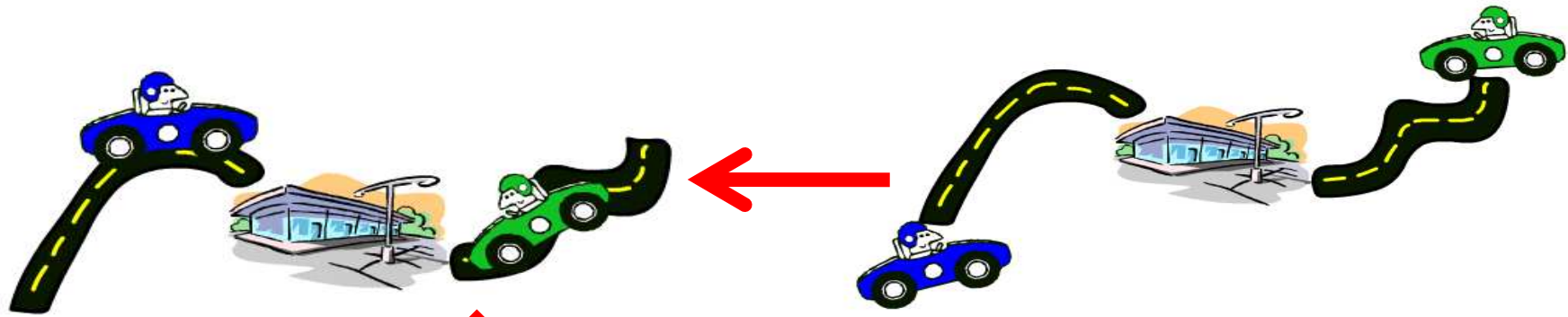
1. استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة

المتوسطة على الدوال المتصلة.

2. استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.



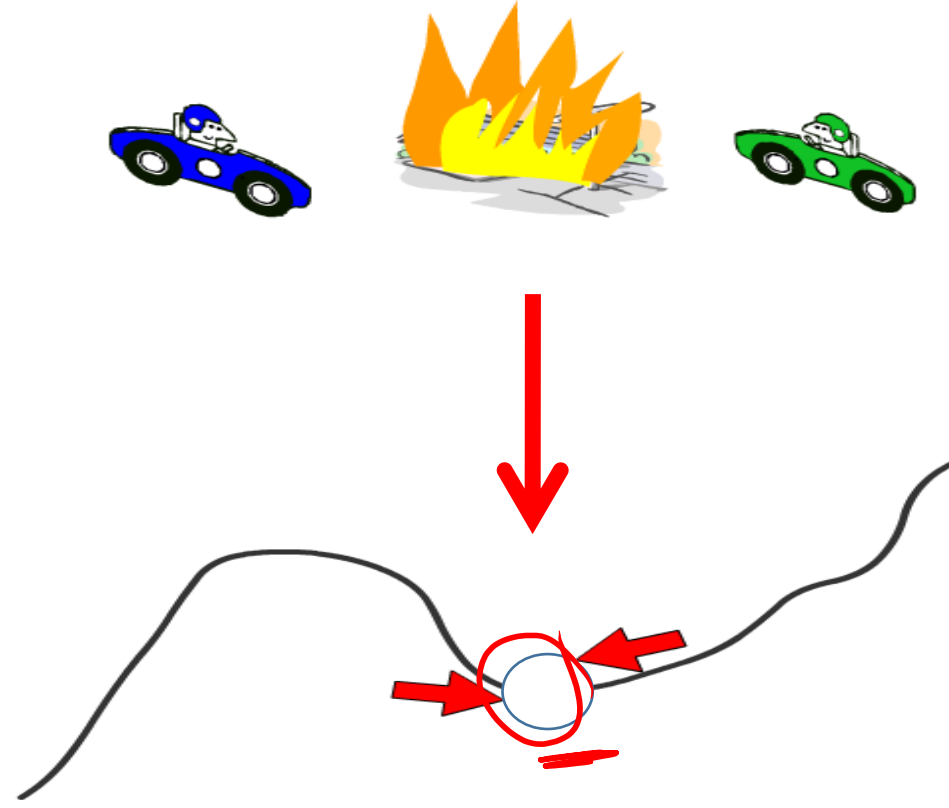
# AMR MATH



0544560575

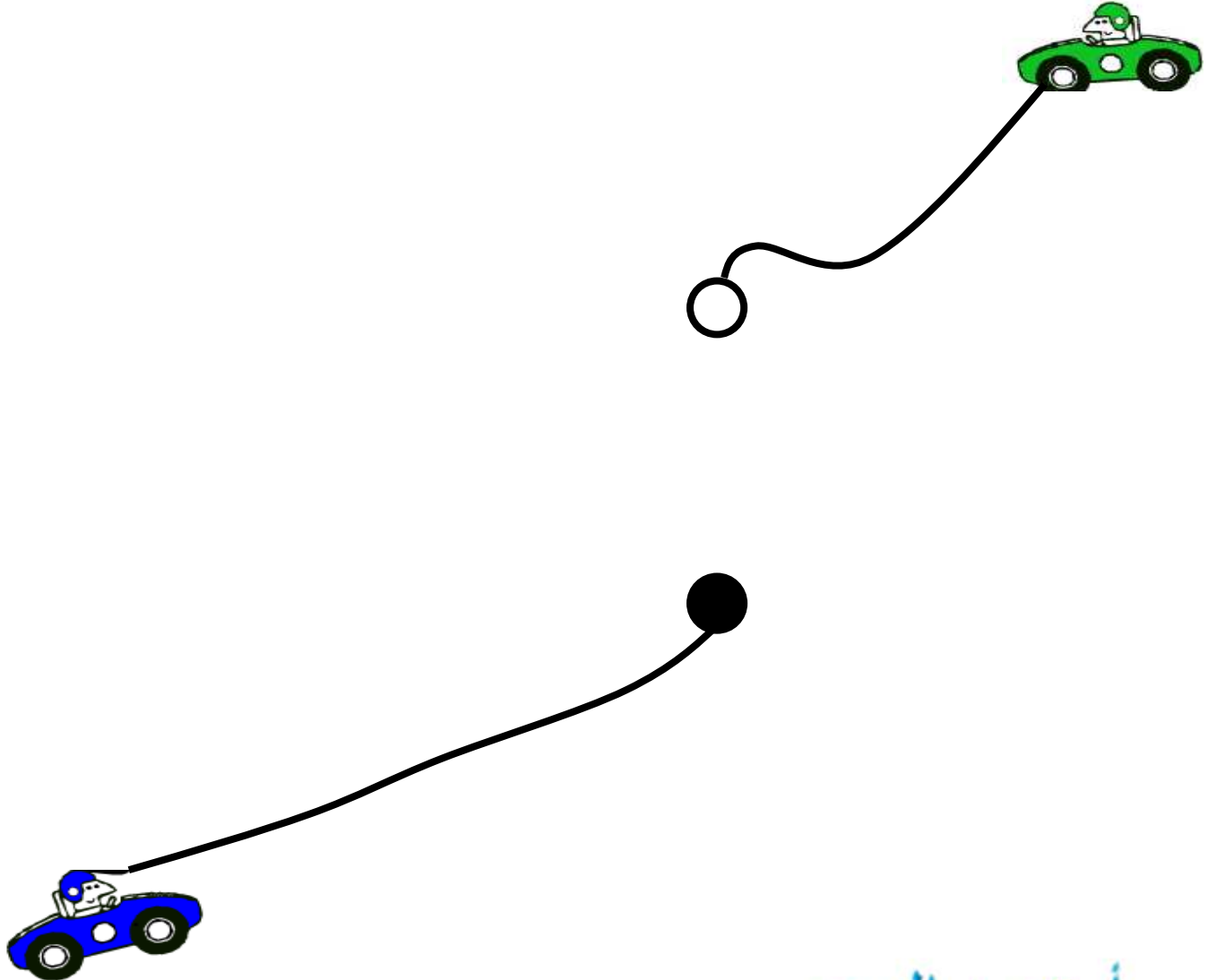
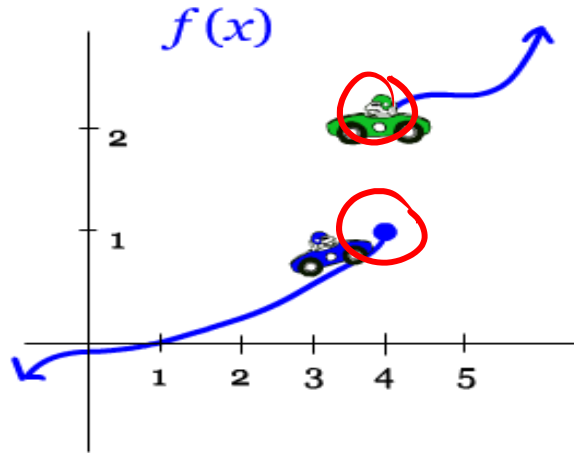
أ. عمرو البيومي

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما



# AMR MATH

استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما



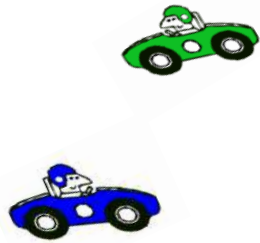
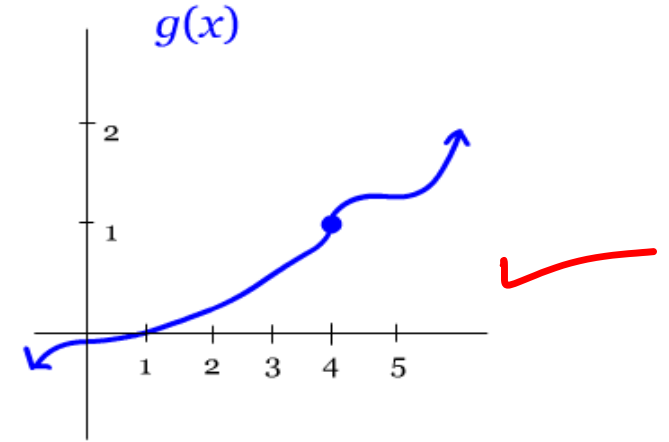
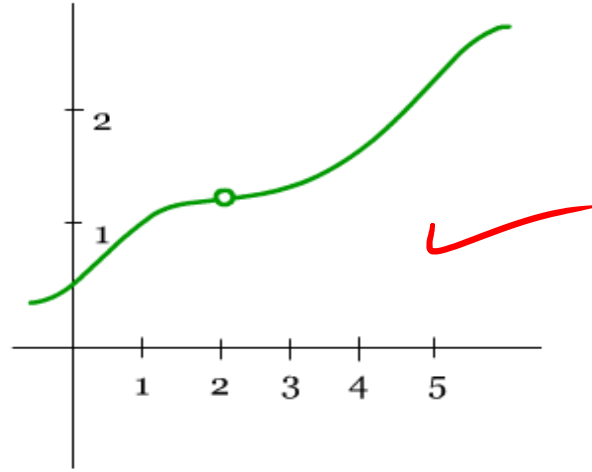
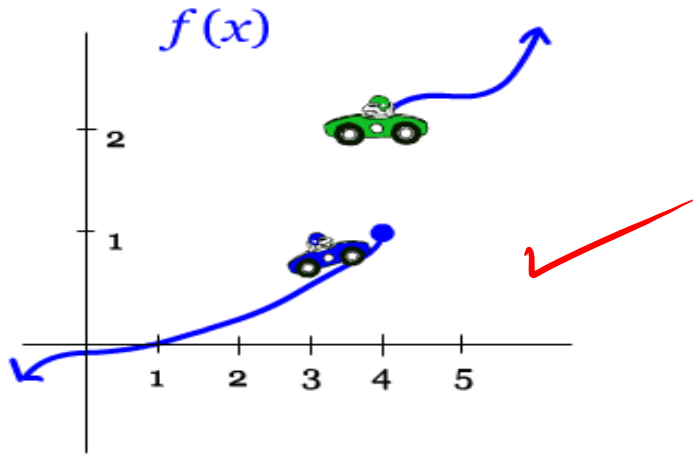
054 1560575

أ. عمرو البيومي



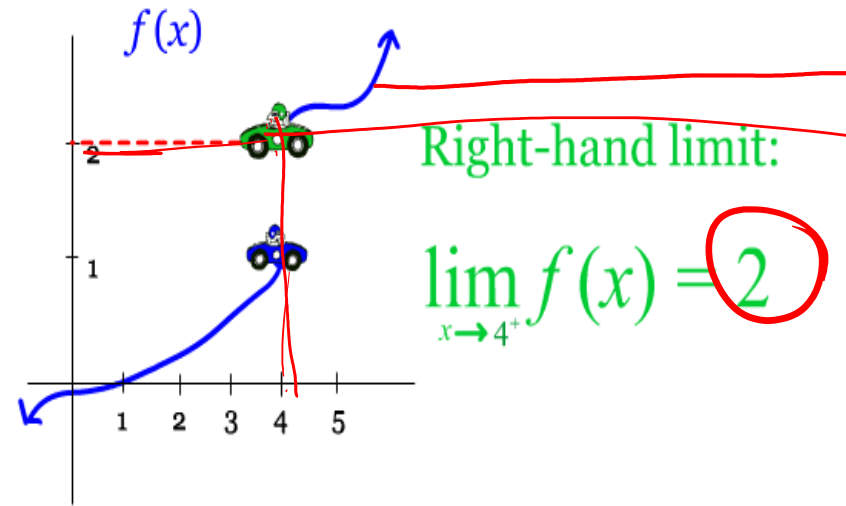
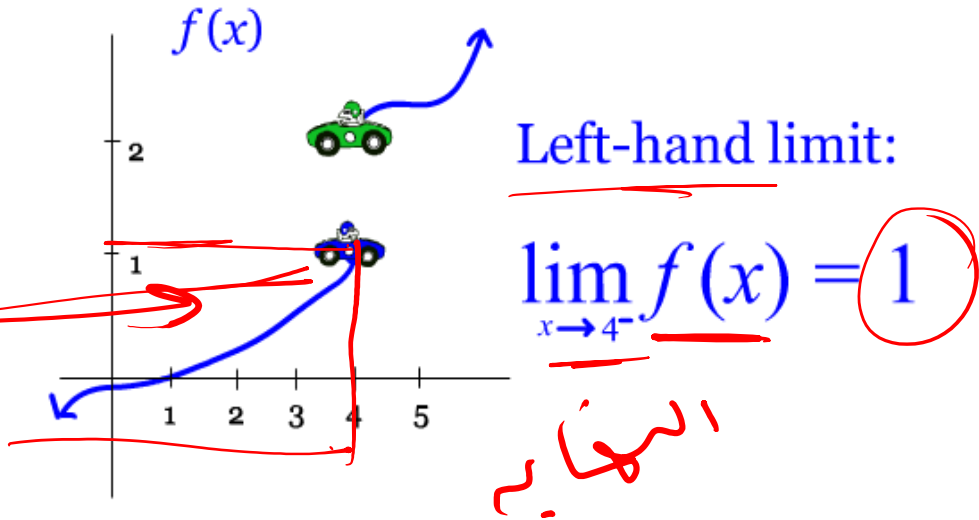
# AMR MATH

## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

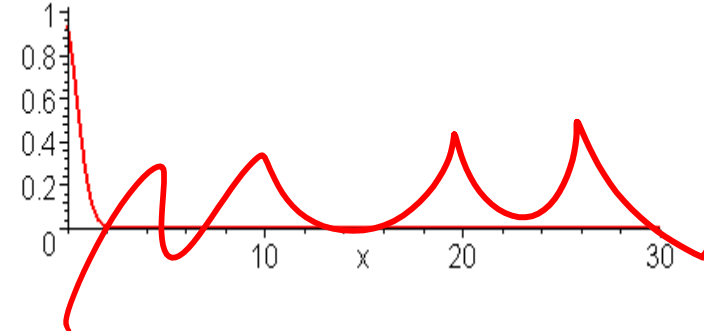
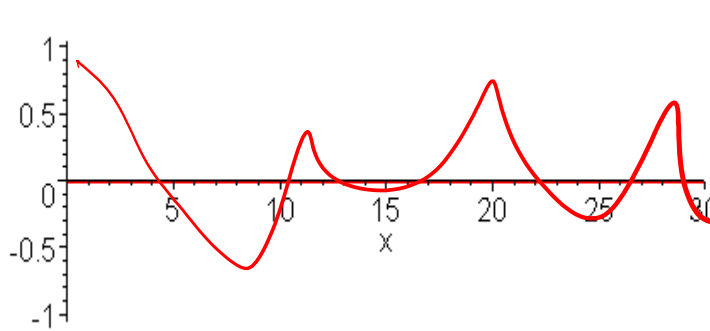
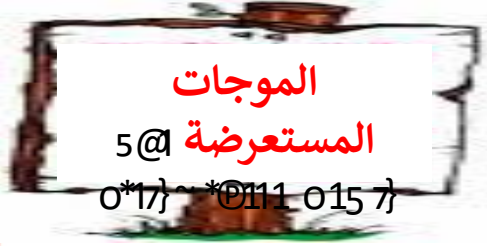


0544560575

أ. عمرو البيومي



# AMR MATH

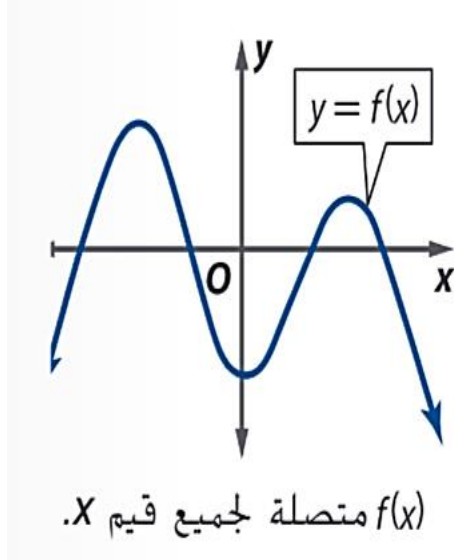


## المفهوم الهندسي للاتصال

يقال إن الدالة  $f(x)$  متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

0544560575

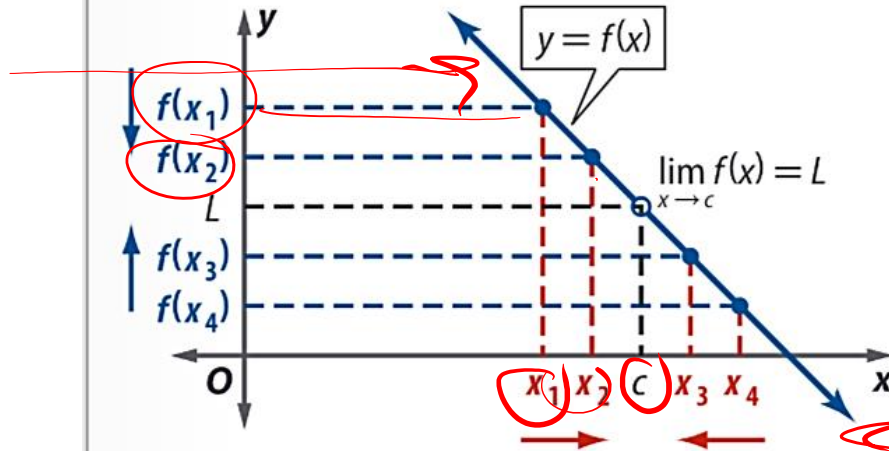
أ. عمرو البيومي



**1 الاتصال** التمثيل البياني **لدالة متصلة** لا يحتوي على فواصل أو فجوات أو فراغات. ويمكن تتبع التمثيل البياني لدالة متصلة دون رفع القلم الرصاص عن الورقة. أحد شروط اتصال الدالة  $f(x)$  عند  $x = c$  هو أن الدالة يجب أن تقترب من إحدى قيمها الفريدة عند اقتراب قيم  $x$  من  $c$  من الجانبين الأيسر والأيمن. ومفهوم الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة يُسمى نهاية.

## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

### المفهوم الأساسي النهايات



**الشرح**  
إذا كانت قيمة  $f(x)$  تقترب من قيمة وحيدة  $L$  عندما تقترب  $x$  من  $c$  من كل جانب، فإن نهاية  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من  $c$  هي  $L$ .

**الرموز**  
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  والتي تعني نهاية  $f(x)$  مع اقتراب  $x$  من القيمة  $c$  هي  $L$ .

من اليسار  $x_1, x_2$

من اليمين  $x_3, x_4$

## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

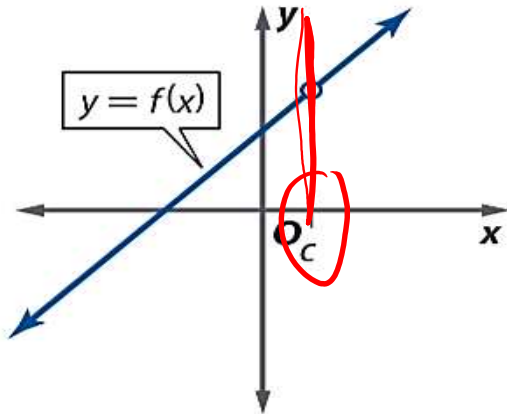
لفهم ما تعنيه الدالة المتصلة من منظور جبري، سيكون من المفيد فحص التمثيلات البيانية **للدوال غير المتصلة** أو الدوال التي ليست متصلة. ويمكن أن تتصف الدوال بأنواع مختلفة من الانفصال.

### المفهوم الأساسي أنواع الانفصال

①

يكون للدالة **انفصال قابل للإزالة** عندما تكون الدالة متصلة في كل مكان باستثناء فجوة عند  $x = c$ .

مثال

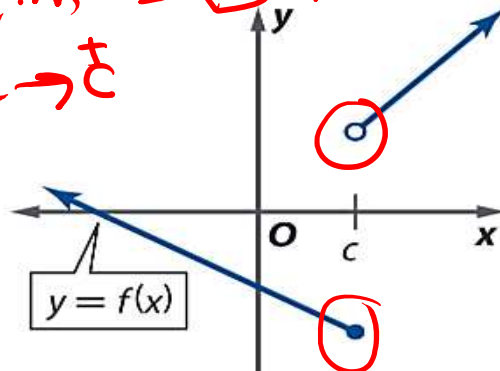


②

يكون لدالة **انفصال قفزي** عند  $x = c$  في حالة وجود نهايتين للدالة بينما تقترب  $x$  من  $c$  من اليسار واليمين ولكن بقيمتين مختلفتين.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \square \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \square$$



$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \square \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \square$$

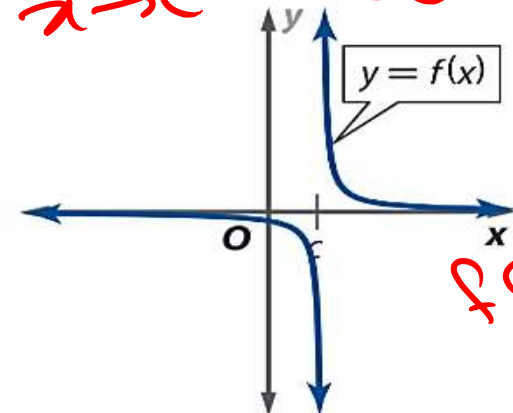
③

يكون لدالة **انفصال لا نهائي** عند  $x = c$  إذا زادت قيمة الدالة أو تناقصت بشكل لا نهائي مع اقتراب  $x$  من  $c$  من اليسار واليمين.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

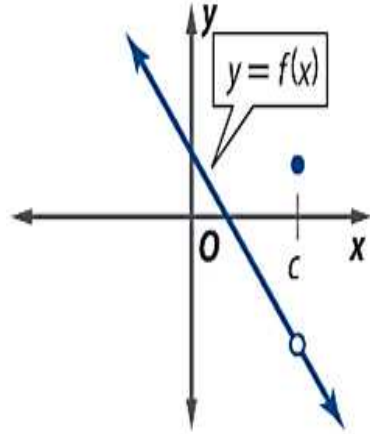


$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

من أجل  $f(c)$

## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

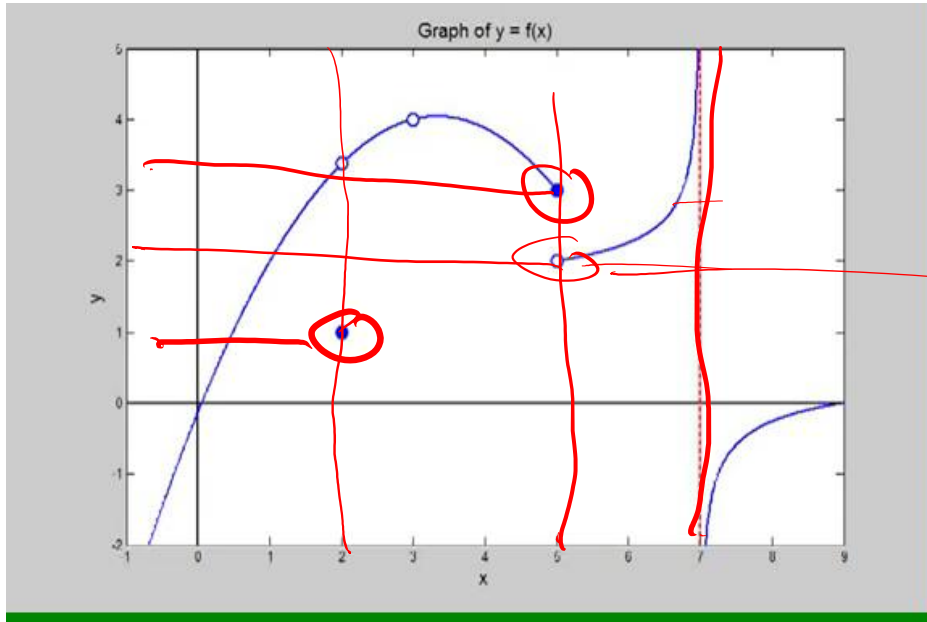


لاحظ أنه بالنسبة إلى التمثيلات البيانية للدوال التي لها انفصال قابل للإزالة، توجد نهاية  $f(x)$  عند النقطة  $c$  ولكن إما أن تكون قيمة الدالة عند  $c$  غير معرفة، أو لا تكون قيمة  $f(c)$  هي نفسها قيمة النهاية عند النقطة  $c$ . كما هو الحال مع التمثيل البياني الموضح.

### نصيحة دراسية

**النهايات** إن وجود قيمة لـ  $f(x)$  عند  $x = c$  أو عدم وجودها لا يؤثر على وجود نهاية لـ  $f(x)$  مع اقتراب  $x$  من  $c$ .

## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما



ملخص المفهوم

اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة  $f(x)$  متصلة عند  $x = c$  إذا حققت الشروط الآتية:

- $f(x)$  معرفة عند  $c$ ، أي أن  $f(c)$  موجودة.
- $f(x)$  تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب  $x$  من  $c$  من الجهتين. أي أن  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجودة.
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

$$f(5) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3$$



## أنواع عدم الاتصال

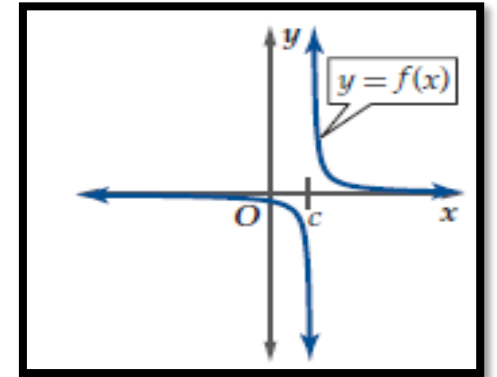
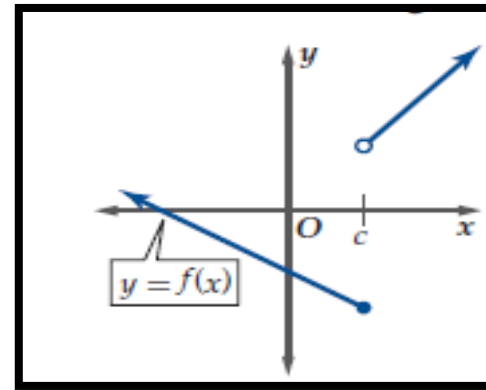
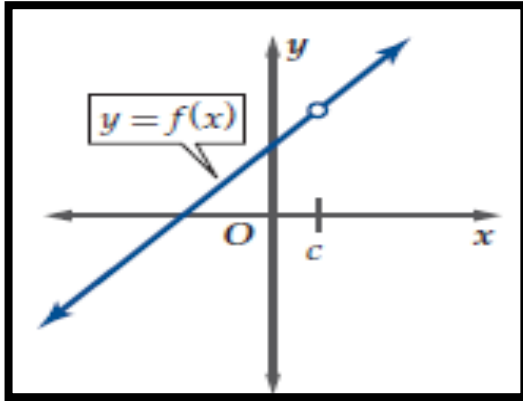
انفصال قابل للإزالة

انفصال غير قابل للإزالة

فجوة

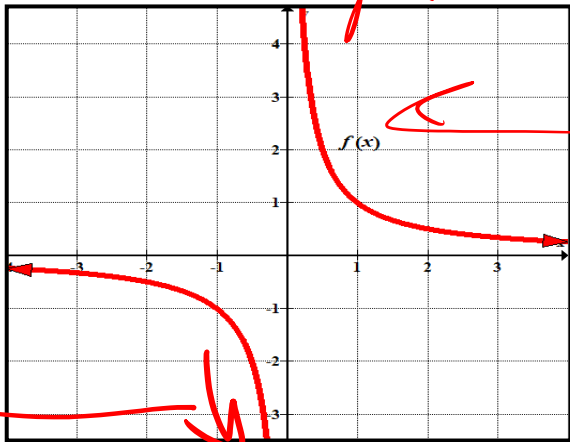
قفزي

لا نهائي

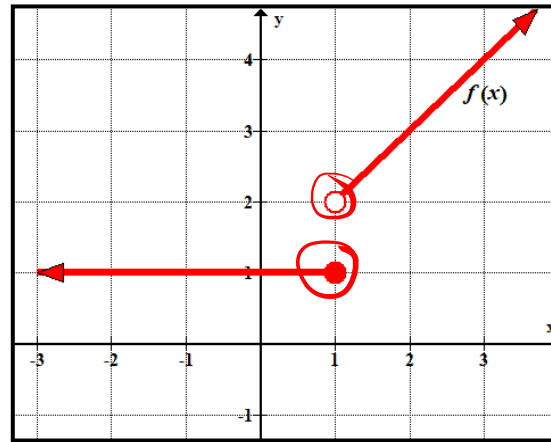


## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

حدد نوع الانفصال ونقاط الانفصال لكل دالة مما يلي:



انفصال لا نهائي  
 $x = 0$



انفصال قفزي  
 $x = 1$

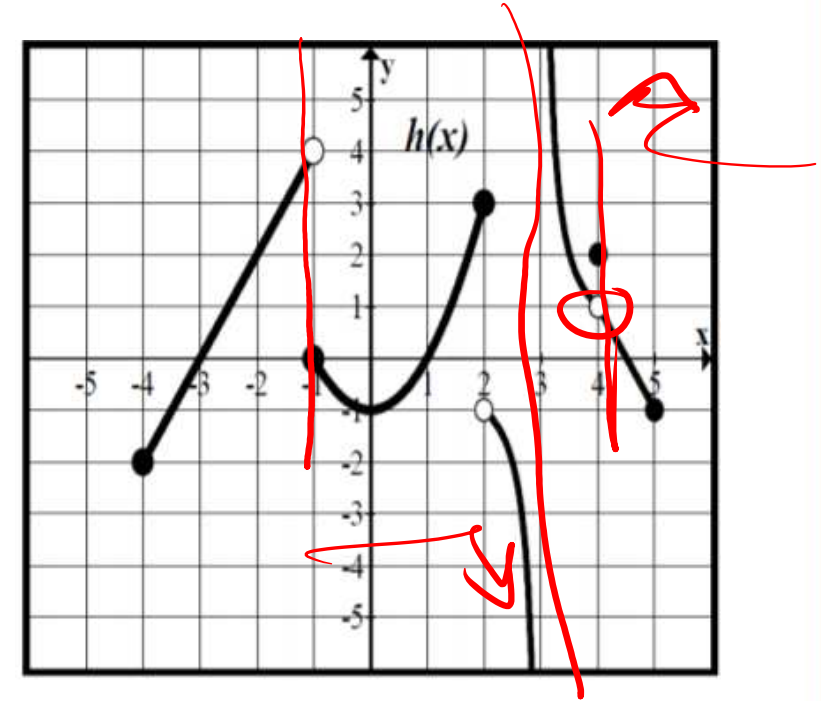


انفصال قابل للإزالة (فجوة)  
 $x = 1$

## استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما

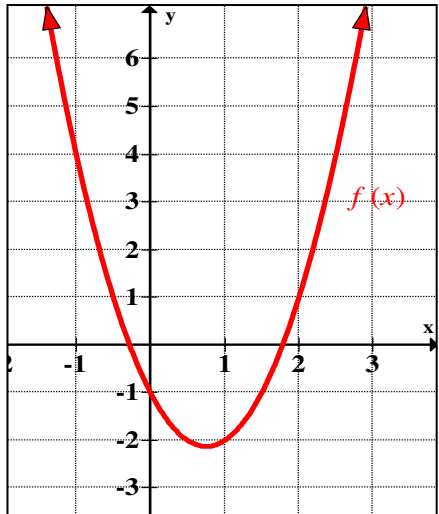
اعتماداً على الرسم البياني للدالة  $h(x)$  ، حدد نقاط الانفصال ونوعها:

نقاط الانفصال	نوع الانفصال
$x = -1$	انفصال قفزي ( غير قابل للإزالة )
$x = 2$	انفصال قفزي ( غير قابل للإزالة )
$x = 3$	انفصال قفزي ( غير قابل للإزالة )
$x = 4$	انفصال قفزي ( غير قابل للإزالة )



# AMR MATH

مثال: حدد ما إذا كانت الدالة  $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$  متصلة عند  $x = 2$  . برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.



(1) هل  $f(2)$  موجودة؟  $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 1 = 1$

$x$  تقترب من 2

$x$  تقترب من 2

$x$	1.9	<u>1.99</u>	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

1

1

=

إذاً، الدالة متصلة عند  $x = 2$

(2) هل  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  موجودة؟  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

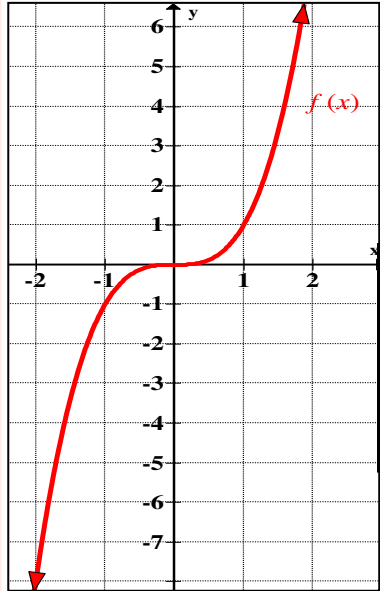
(3) هل  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$  ؟

0544560575

أ. عمرو الأيوبي

# AMR MATH

حدد ما إذا كانت الدالة  $f(x) = x^3$  متصلة عند  $x = 0$  . بر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.



(1) هل  $f(0)$  موجودة؟  $f(0) = (0)^3 = 0$

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	$-1 \times 10^{-6}$	$-1 \times 10^{-9}$		$1 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-6}$	0.001

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$        $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(2) هل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  موجودة؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

(3) هل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  ؟

إذاً، الدالة متصلة عند  $x = 0$

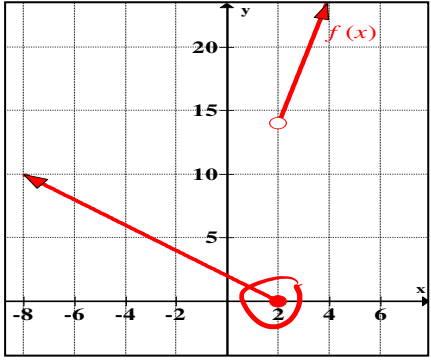
054 1560575

أ. عمرو البيومي

# AMR MATH

حدد ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة عند قيم  $x$  المحددة أم لا. برر إجابتك باستخدام اختبار الاتصال:

$$b) f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , x > 2 \\ 2 - x & , x \leq 2 \end{cases} \text{ عند } x = 2$$



$x$	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.1	0.01	$1 \times 10^{-3} = 0.001$		14.005	14.05	14.5

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \quad \neq \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 14$$

$$\triangleright f(2) = 2 - 2 = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{غير موجودة}$$

إذاً، الدالة غير متصلة عند  $x = 2$  ، نوع الانفصال: انفصال قفزي

054 1560575

أ. عمرو البيومي

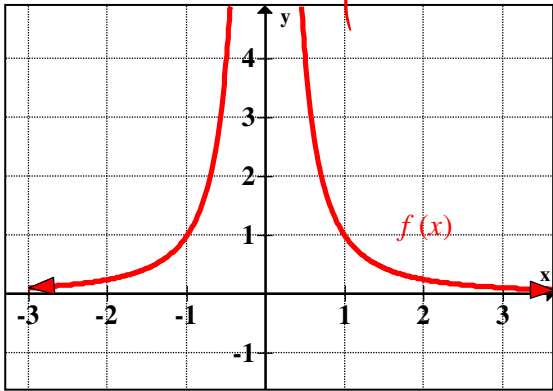


# AMR MATH

d)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  عند  $x = 0$

$f(0) = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$

غير معرفة



—  $x$  تقترب من 0 —  $x$  تقترب من 0 —

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$      $\infty$      $\infty$      $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

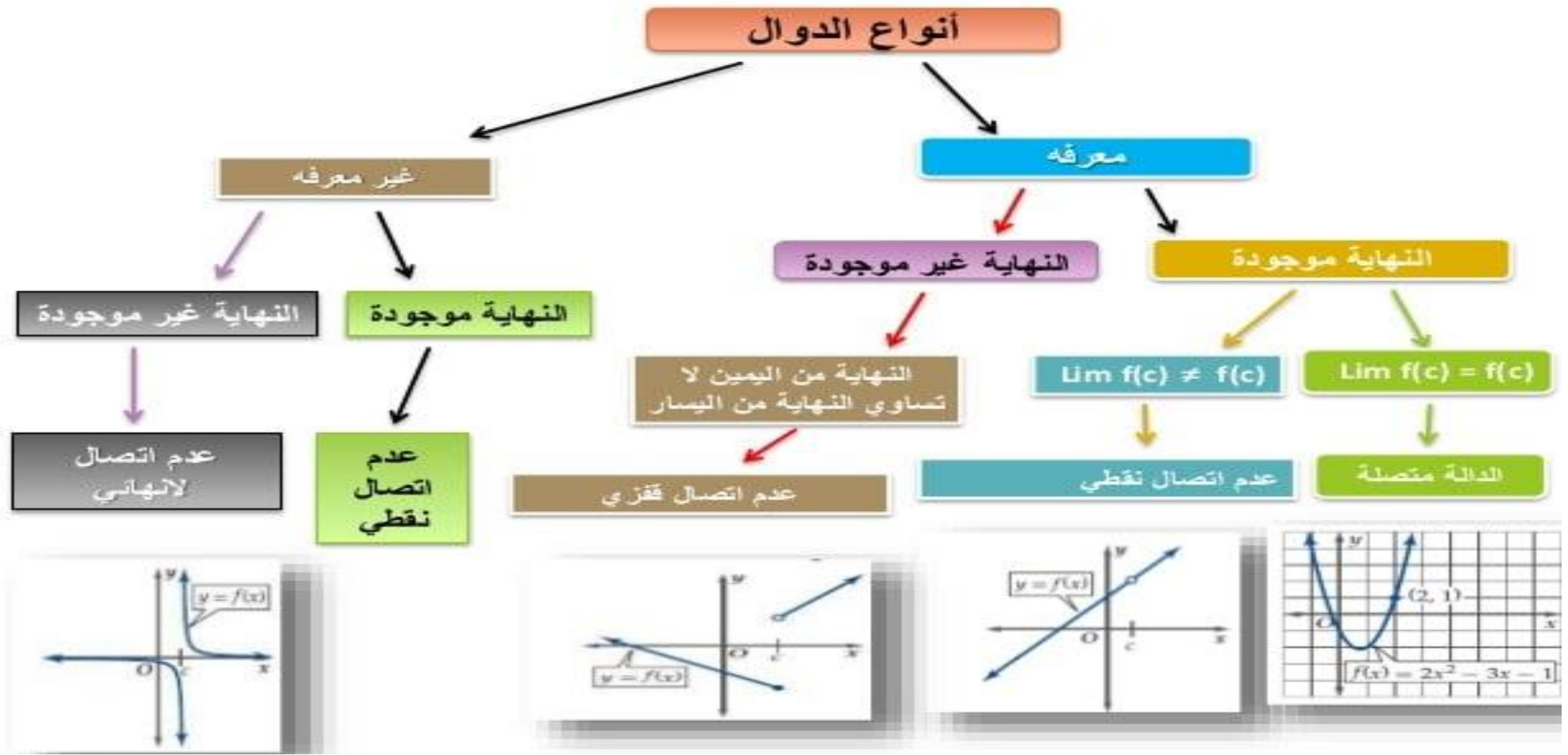
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

$f(0)$  غير موجودة، إذاً الدالة منفصلة عند  $x = 0$

إذاً، الدالة منفصلة عند  $x = 0$  ، نوع الانفصال: انفصال لا نهائي



# AMR MATH



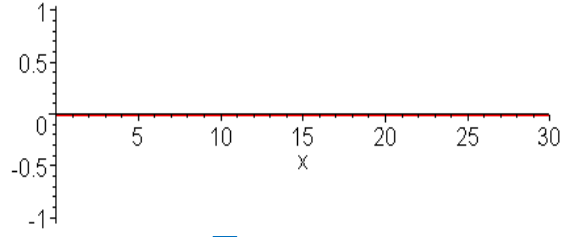
0544560575

أ. عمرو البيومي

AMR MATH

0544560575

أ. عمرو البيومي

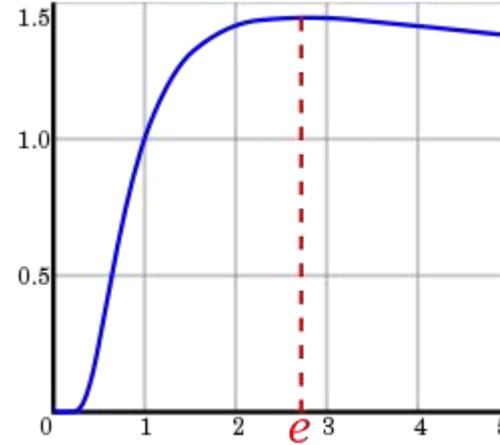


الوحدة: الأولى

الحادي عشر المتقدم

11

3



الثاني عشر العام

12

عنوان الدرس: الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

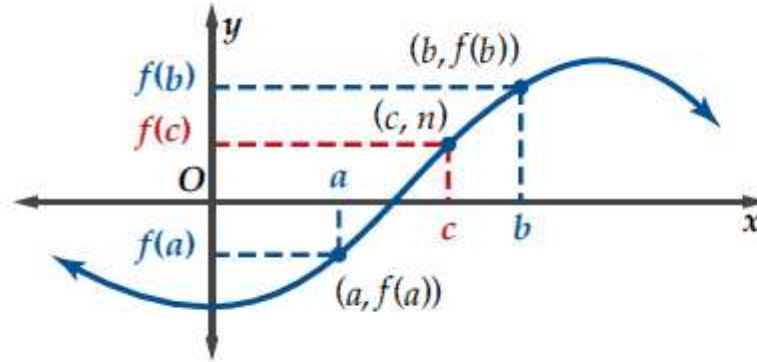
## نواتج التعلم

في نهاية هذا الدرس ستكون قادراً على :

1. تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
2. استخدام النهايات لوصف السلوك الطرقي للدوال.

## نظرية القيمة المتوسطة

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة .



### نظرية القيمة المتوسطة

### نظرية

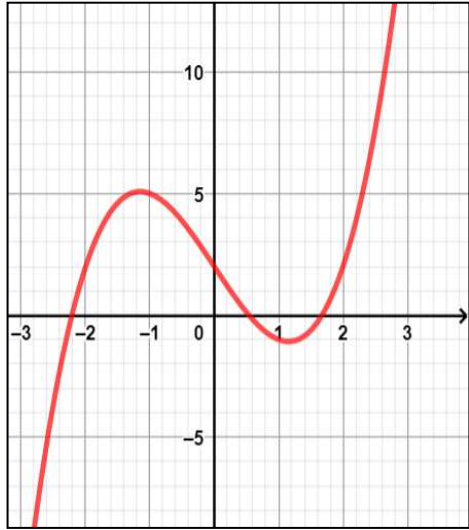
إذا كانت  $f(x)$  دالة متصلة، وكانت  $a < b$  ووجدت قيمة  $n$  بين  $f(a)$  و  $f(b)$  فإنه يوجد عدد  $c$  بين  $a$  و  $b$ ، بحيث  $f(c) = n$ .

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت  $f(x)$  دالة متصلة وكان  $f(a)$  و  $f(b)$  مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل  $c$  بين  $a$  و  $b$ ، بحيث  $f(c) = 0$ . أي يوجد صفر للدالة بين  $a$  و  $b$ .

# AMR MATH

مثال: حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

$$f(x) = x^3 - 4x + 2 ; [-4, 4]$$



$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

Diagram illustrating the sign changes of the function  $f(x)$  between integer values of  $x$ . The function values are:  $f(-4) = -46$ ,  $f(-3) = -13$ ,  $f(-2) = 2$ ,  $f(-1) = 5$ ,  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = -1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 17$ ,  $f(4) = 50$ . The sign changes are indicated by arrows and circled numbers: 1 change between  $x = -3$  and  $x = -2$ , 2 changes between  $x = 0$  and  $x = 1$ , and 3 changes between  $x = 1$  and  $x = 2$ .

✓ للدالة صفر حقيقي بين  $-3, -2$

✓ للدالة صفر حقيقي بين  $0, 1$

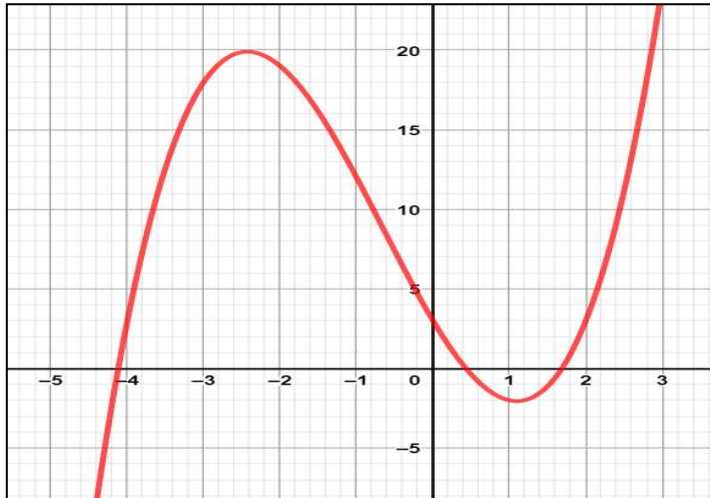
✓ للدالة صفر حقيقي بين  $1, 2$

# AMR MATH

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3 ; [-6, 4]$$

$x$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67



✓ للدالة صفر حقيقي بين  $-4, -5$

✓ للدالة صفر حقيقي بين  $0, 1$

✓ للدالة صفر حقيقي بين  $1, 2$

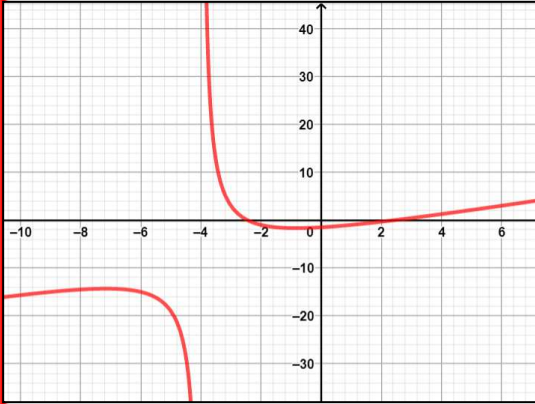
0544560575

أ. عمرو البيومي

# AMR MATH

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

$$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}; [ -3, 4 ]$$



$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	-1.67	-1.5	-1	-0.33	0.43	1.25

✓ للدالة صفر حقيقي بين 2, 3

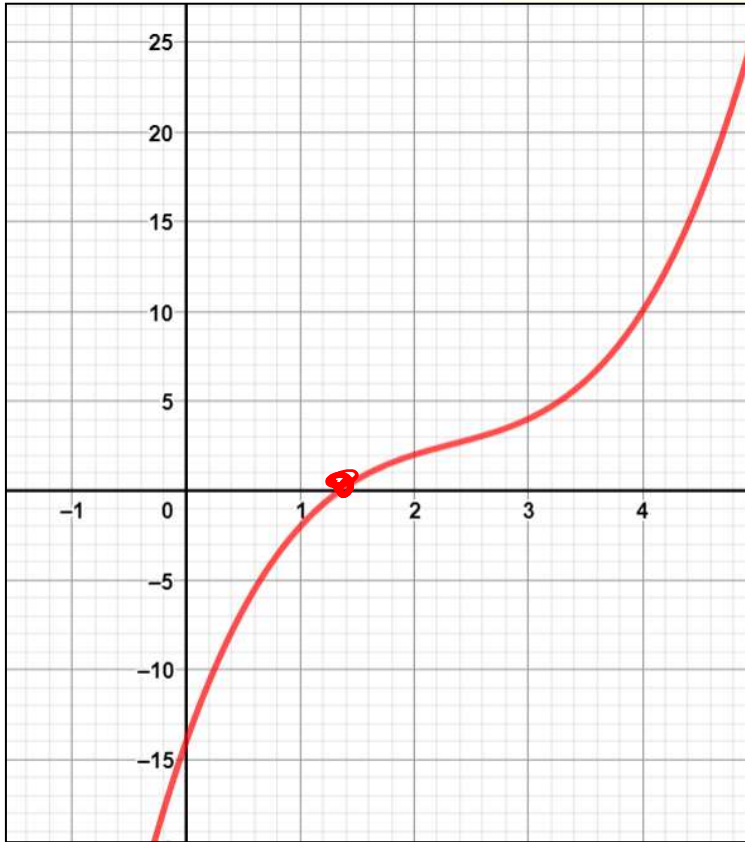
✓ للدالة صفر حقيقي بين -2, -3



# AMR MATH

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة :

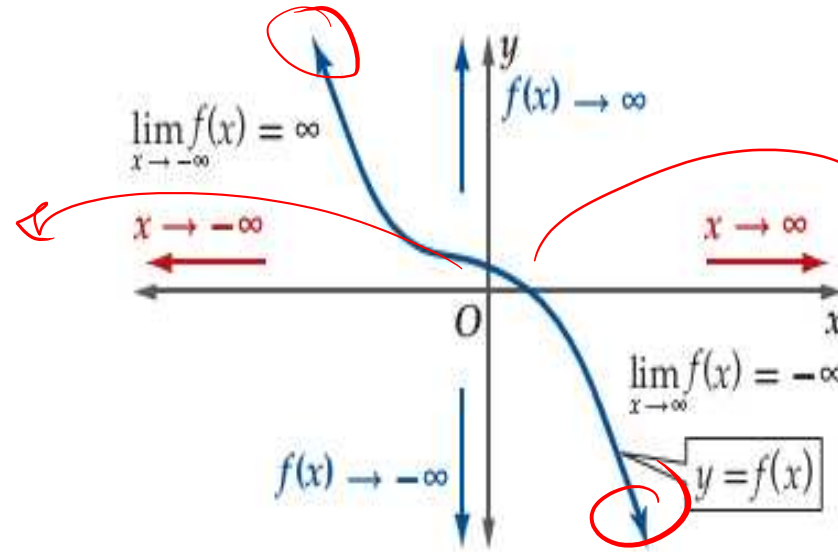
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14 ; [0, 4]$$



$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	<u>-14</u>	-2	2	4	10

✓ للدالة صفر حقيقي بين 1, 2

**سلوك طرفي التمثيل البياني:** يصف سلوك طرفي التمثيل البياني شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم  $f(x)$  عندما تزداد قيم  $x$  أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب  $x$  من  $\infty$  أو  $-\infty$ . ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.



سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

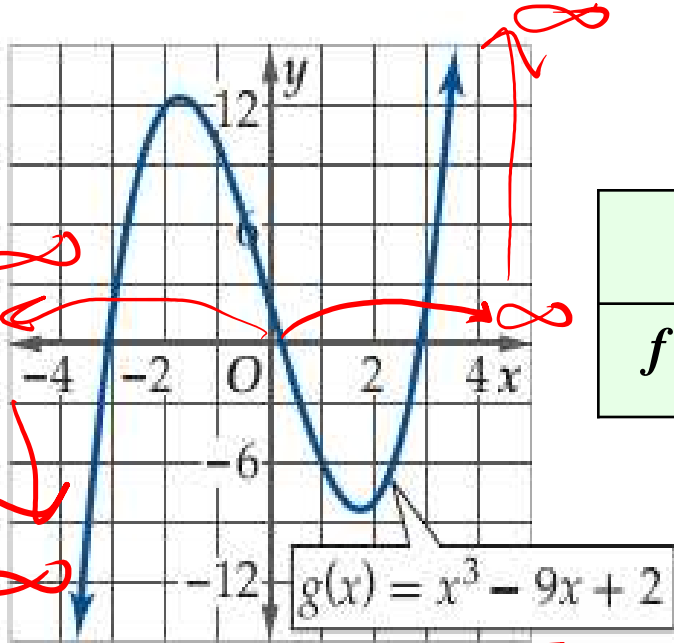
## قراءة الرياضيات

**النهايات:**

تقرأ العبارة  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  نهاية  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  نهاية  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من سالب ما لانهاية.

# AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.



$x$	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-9.9 \times 10^{11}$	-999990998	-999098	2	999102	999991002	$9.9 \times 10^{11}$

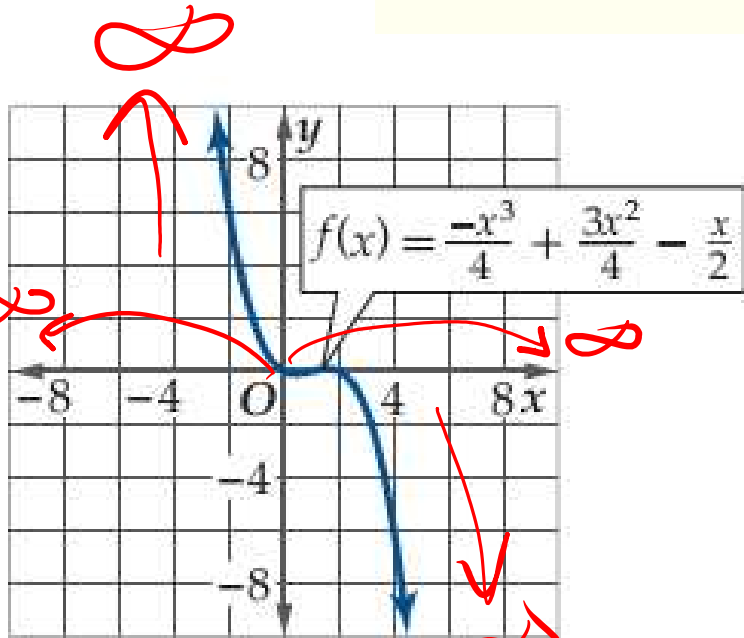
عددياً:

الطرف الأيمن :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underline{\underline{\infty}}$  بيانياً:

الطرف الأيسر :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

# AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.



الطرف الأيمن :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

بيانياً:

الطرف الأيسر :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

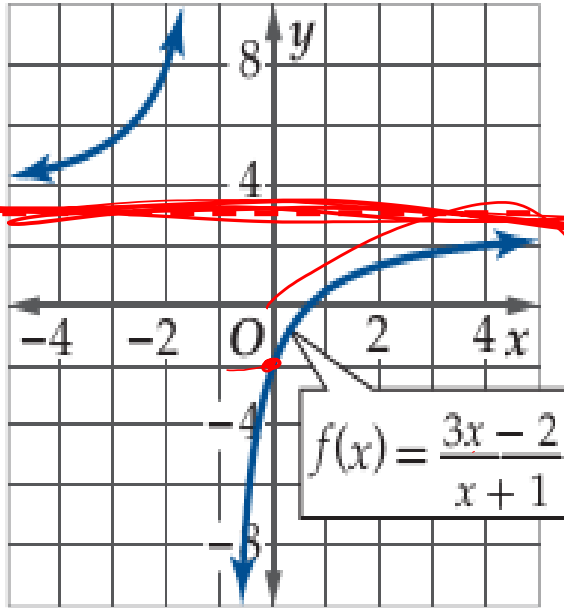
x	f(x)
-10,000	$2.5 \cdot 10^{11}$
-1000	$2.5 \cdot 10^8$
0	0
1000	$-2.5 \cdot 10^8$
10,000	$-2.5 \cdot 10^{11}$

عددياً:

# AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.

عددياً:



$x$	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	3.0005	3.005	3.05	-2	2.95	2.995	2.999

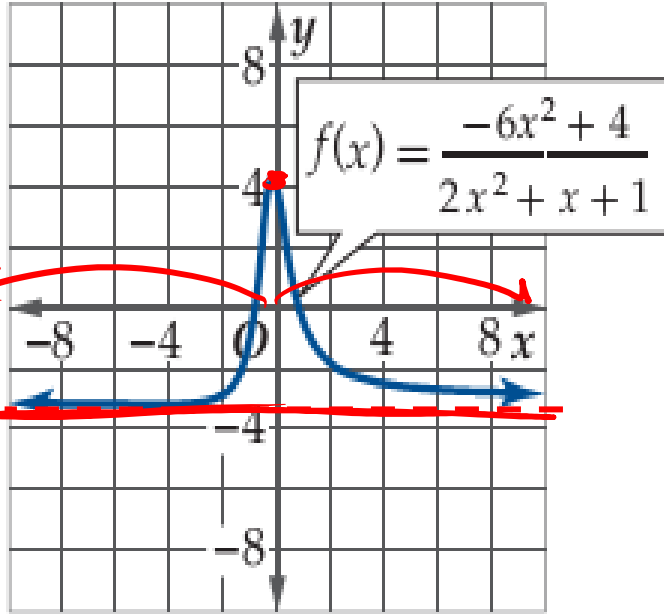
الطرف الأيمن :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

بيانياً:

الطرف الأيسر :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

# AMR MATH

استخدم الرسم البياني لكل دالة من الدوال الآتية لوصف السلوك الطرفي الخاص بها، ثم عزز إجابتك عددياً.



الطرف الأيمن :  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$  بيانياً:

الطرف الأيسر :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

x	f(x)
-10,000	-3.0001
-1000	-3.001
0	4
1000	-2.998
10,000	-2.9998

عددياً:

AMR MATH

0544560575

أ. عمرو البيومي

الرياضيات ( الثاني عشر عام )

عنوان الدرس

1-3 الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

نتائج الدرس

-استخدام النهايات لتحديد اتصال دالة ما وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.  
-استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

عنوان النشاط

التطبيق الالكتروني المستخدم

التهيئة الحافزة

jigsawplanet-

-استكشاف عنوان الدرس من خلال لعبة التركيب.

اسم الاستراتيجية

التطبيق الالكتروني المستخدم

استراتيجية التعلم

livework sheet-

- lms  
منصة التيمز

-الحوار والمناقشة.  
-الاستقراء.  
-الاستنتاج

إجراءات الدرس

- عرض عدة صور لتوضيح مفهوم الاتصال.
- عرض قصة للوصول لمفهوم النهاية وأنواع عدم الاتصال.
- تقديم المفهوم الأساسي لأنواع الانفصال ومناقشة مثال عليها ثم توجيه الطالبات لحل تمرين على الورقة التفاعلية ( liveworksheet ).
- تقديم المفهوم الأساسي لاختبار الاتصال ثم مناقشة مثال 1 صفحة 25 وتوجيه الطالبات لحل التمارين الموجهة.
- مناقشة مثال 2 صفحة 26 وتكليف الطالبات بحل التمارين الموجهة.
- عرض نظرية القيمة المتوسطة ومناقشة مثال 3 صفحة 27 ثم تكليف الطالبات بحل التمارين الموجهة.
- توجيه الطالبات لحل تمارين ( المستويات ) على الورقة التفاعلية ( liveworksheet ).
- مناقشة السلوك الطرفي للدوال وعرض أمثلة الكتاب 4 و 5 صفحة 28-29 وتكليف الطالبات بحل التمارين الموجهة.
- التقييم الختامي على الورقة التفاعلية ( liveworksheet ) و استطلاع على بوابة التعلم الذكي.

التأمل في الدرس

- الأهداف واضحة ومتسقة مع الأمثلة.

0544560575

-مواضيع الدرس ممتعة وعرضها مناسب.



## تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

### مثال 2

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم  $x$  المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهاضي، قفزي، قابل للإزالة.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > -3 \\ 2 - x, & x \leq -3 \end{cases} \quad (a)$$

$$f(-3) = 5 \text{ موجودة؛ لأن } f(-3) = 5. \quad (1)$$

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب  $x$  من  $-3$ .

$x$	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

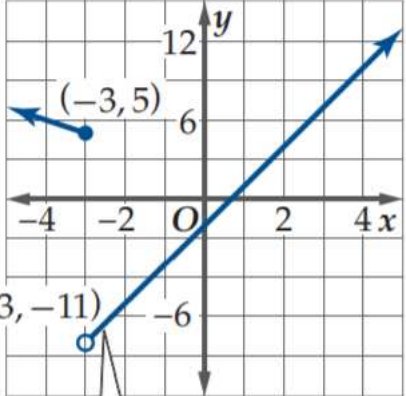
5

≠

-11

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{غير موجودة}$$

للدالة  $f(x)$  عدم اتصال قفزي عند  $x = -3$ .



$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > -3 \\ 2 - x, & x \leq -3 \end{cases}$$

الشكل 1.3.2

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم  $x$  المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$$(b) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2-9} \quad \text{عند } x = -3, x = 3.$$

عند  $x = 3$

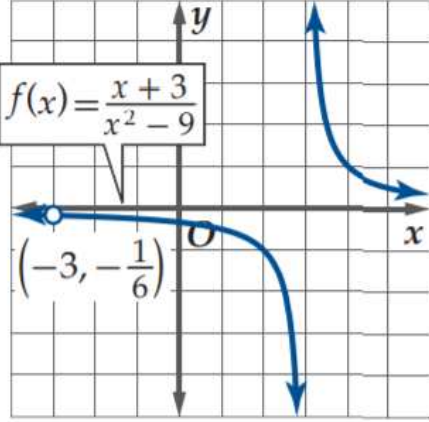
$$(1) \quad f(3) = \frac{6}{0} \quad \text{وهي غير معرفة، أي أن } f(3) \text{ غير موجودة، وعليه تكون } f(x) \text{ غير متصلة عند } x = 3.$$

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب  $x$  من 3.

$x$	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم  $f(x)$  تتناقص بلا حدود عندما تقترب  $x$  من 3 من اليسار، وأن قيم  $f(x)$  تتزايد بلا حدود عندما تقترب  $x$  من 3 من اليمين، وعليه، فإن  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  غير موجودة.

(3) للدالة  $f(x)$  عدم اتصال لانهائي عند  $x = 3$ ؛ لأن قيم  $f(x)$  تتناقص دون توقف عندما تقترب  $x$  من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب  $x$  من 3 من اليمين. ويوضح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.



الشكل 1.3.3

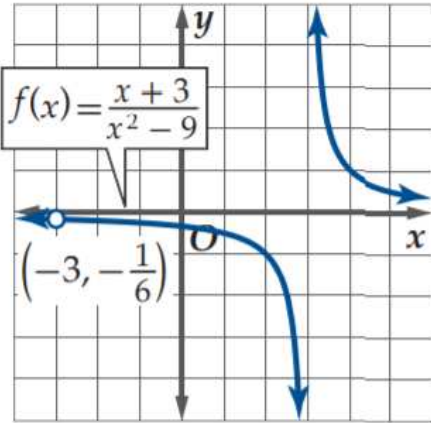
حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند قيم  $x$  المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

(b)  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$  عند  $x = 3, x = -3$ .

عند  $x = -3$

(1)  $f(-3) = \frac{0}{0}$  وهي غير معرفة، أي أن  $f(-3)$  غير موجودة. وعليه تكون  $f(x)$  غير متصلة عند  $x = -3$ .

(2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب  $x$  من  $-3$ .



الشكل 1.3.3

$x$	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة  $f(x)$  تقترب من  $-0.167$  عندما تقترب  $x$  من  $-3$  من الجهتين، أي أن

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \approx -0.167 \approx -\frac{1}{6}$$

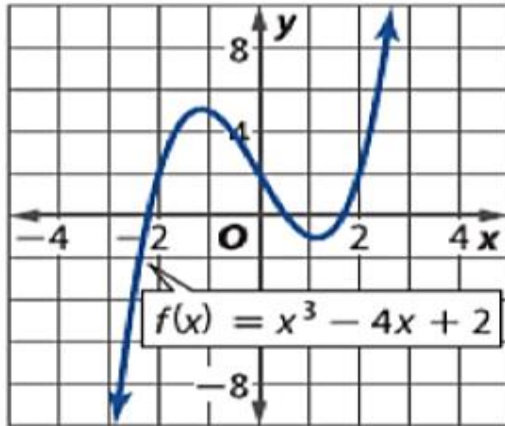
(3)  $f(x)$  غير متصلة عند  $x = -3$ ؛ لأن  $f(-3)$  غير موجودة، وبما أن  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند  $x = -3$ . ويوضح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

## مثال 3 الأصفار التقريبية

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

a.  $f(x) = x^3 - 4x + 2; [-4, 4]$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50



لأن  $f(-3)$  سالبة و  $f(-2)$  موجبة، حسب مبدأ تحديد الموقع،  $f(x)$  لها صفر بين  $-3$  و  $-2$ . وتتغير علامة قيمة  $f(x)$  أيضا بالنسبة إلى  $0 \leq x \leq 1$  و  $1 \leq x \leq 2$  ويشير هذا إلى وجود أصفار حقيقية في هاتين الفترتين.

ويدعم التمثيل البياني لـ  $f(x)$  الموضح على اليسار استنتاج أن هناك أصفارًا حقيقية بين  $-3$  و  $-2$ ،  $0$  و  $1$  و  $1$  و  $2$ .

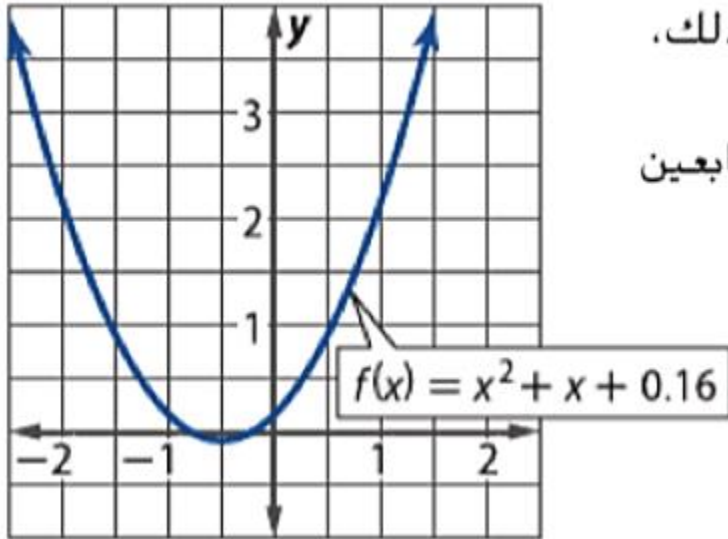
## مثال 3 الأصفار التقريبية

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة على الفترة المعينة.

b.  $f(x) = x^2 + x + 0.16; [-3, 3]$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

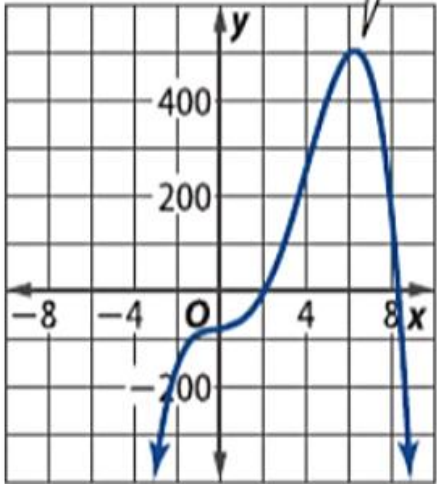
لا تتغير علامة قيم  $f(x)$  بالنسبة إلى قيم  $x$  المستخدمة. على الرغم من ذلك، بينما تقترب قيم  $x$  من  $-1$  من اليسار، تتناقص  $f(x)$  ثم تبدأ في التزايد عند  $x = 0$ . إذا، ربما توجد أصفار حقيقية بين العددين الصحيحين المتتابعين  $-1$  و  $0$ . مثل الدالة بيانًا للتحقق.



يقطع التمثيل البياني لـ  $f(x)$  محور  $x$  مرتين في الفترة  $[-1, 0]$ . وبذلك توجد أصفار حقيقية بين  $-1$  و  $0$ .

## مثال 4 التمثيلات البيانية التي تقترب من ما لانهاية

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$$



استخدم التمثيل البياني لـ  $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$  لوصف سلوكها الطرفي. ادعم فرضيتك بالأرقام.

### التحليل بيانياً

في التمثيل البياني لـ  $f(x)$  يظهر أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

### الدعم بالأرقام

ضع جدولاً بالقيم لاستكشاف قيم الدالة مع تزايد  $|x|$ . بمعنى، استكشف قيمة  $f(x)$  بينما تصبح  $x$  أكبر وأكبر أو تصبح سالبة بدرجة أكبر.

←  $x$  تقترب من  $-\infty$        $x$  تقترب من  $\infty$  →

$x$	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^8$	-80	$-1 \cdot 10^8$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

←      →

يشير نمط المخرجات إلى أنه مع اقتراب  $x$  من  $-\infty$ ، فإن  $f(x)$  تقترب من  $-\infty$  ومع اقتراب  $x$  من  $\infty$ ، فإن  $f(x)$  تقترب من  $-\infty$ . ويدعم هذا الفرضية.

## مثال 5 التمثيلات البيانية التي تقترب من قيمة محددة

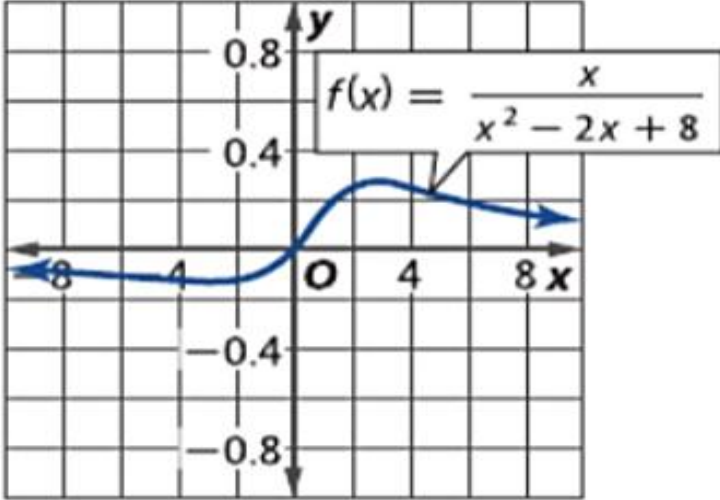
استخدم التمثيل البياني لـ  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$  لوصف سلوكها الطرفي.  
ادعم الفرضية بالأرقام.

التحليل بيانياً

في التمثيل البياني لـ  $f(x)$  يظهر أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

الادعم بالأرقام



←  $x$  تقترب من  $-\infty$        $x$  تقترب من  $\infty$  →

$x$	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

←      →

يشير نمط المخرجات إلى أنه مع اقتراب  $x$  من  $-\infty$ ، فإن  $f(x)$  تقترب من 0 ومع اقتراب  $x$  من  $\infty$ ، فإن  $f(x)$  تقترب من 0. ويدعم هذا الفرضية.

## تعليم متمايز

نكتب جملة الأصفار  
الحقيقية من اليسار لليمين  
نقرب الأعداد لأقرب جزء  
من مئة إذا لزم الأمر





Handwritten mathematical scribbles and Arabic text. Visible elements include:  
- Arabic text: "البرهان" (The proof) at the top left, "البرهان" (The proof) in the middle, and "هو" (It is) at the bottom.  
- Mathematical symbols:  $x^2 + 3x$ ,  $x^2 + 5$ ,  $x^6$ , and  $x$ .  
- A large, complex scribble of overlapping circles and lines.