شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae
موقع المناهج الإماراتية

أوراق عمل الدرس الثامن المعدلات المرتبطة - المعدلات الزمنية المرتبطة من الوحدة الرابعة

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	أسئلة الامتحان النهائي الالكتروني والورقي - بريدج
2	حل اختبار تجريبي يحاكي الامتحان النهائي وفق الهيكل الوزاري
3	اختبار تجريبي يحاكي الامتحان النهائي وفق الهيكل الوزاري
4	حل تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي
5	تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

(4-8) المعدّلات المرتبطة – المعدّلات الزّمنية المرتبطة Related Rates

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

وهي أحد تطبيقات الاشتقاق الضمني حيث نريد إيجاد معدل تغير مجهول لكمية ما عن طريق ربط هذه الكمية بكميات أخرى معدل تغيرها معلوم، عادة ما تكون معدلات التغير منسوبة إلى الزمن. المطلوب جد سرعة، معدّل التّغيّر في (الاحداثي، المساحة، المحيط، قطر المستطيل، .... إلخ).

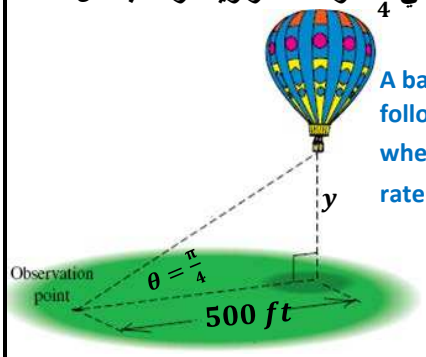
An application of implicit differentiation ,where we need to find the unknown rate of change of one quantity by relating it to the already known rates of change of one or more other quantities. The rate of change is usually with respect to time. The question is to find the speed, rate of change of (coordinates, area, rectangle diameter. etc.)

The most common way to approach related rates problems is the following: وللحل نتبع الخطوات التالية:

1. Decide what the two variables are. تحديد المتغيرات المعلومة، ومعدلات التغير المعلومة والمطلوب حسابها.
2. Make a simple sketch, if it is possible. اكتب علاقة تربط المتغيرات (رسم صورة يمكن أن يكون مفيداً) .
3. Differentiate implicitly both sides of the equation with respect to time t اشتق ضمنيًا كلا طرفي المعادلة بالنسبة إلى الوقت t
4. Plug in all known values at the instant in question. عوض (بعد الاشتقاق) جميع القيم المعروفة في اللحظة المعنية.
5. Solve for the remaining rate required حل المعادلة لإيجاد معدل التغير المتبقي المطلوب.

- ملاحظة: هذه الدّروس أي التّطبيقات مثل القيم المثلى (4-7)، المعدّلات المرتبطة (4-8)، معدّلات التّغيّر في الاقتصاد والعلوم (4-9) يكتفي الطّالب بالأمثلة والتّمارين الموجودة في الكتاب المدرسي نظراً لأنّها تكفي بالنّسبة للأسئلة الوزارية، والموضوع طويل جداً وعليه أسئلة لا حصر لها، وإن كان هناك أسئلة خارجية بنفس المضمون الموجود في الكتاب فلا بأس بها، أمّا ما تعدّاها فهو إرهاق للطّالب فقط وتشتيت لمفهومه لهذه المواضيع.

س1) بالون مملوء بالهواء السّاخن، يرتفع عمودياً لأعلى بمستوى معيّن، ويتّبع حركة البالون جهاز لإيجاد سرعته على بعد $500\ ft$ من نقطة انطلاق البالون. في اللحظة التي كانت فيها زاوية ارتفاع البالون من الجهاز هي $\frac{\pi}{4}$ ، وكانت الزّاوية تزداد بمعدّل $0.14\ rad/min$. كم كانت سرعة ارتفاع البالون عند هذه اللحظة؟



A balloon filled with hot air, rises vertically to a certain level, and the movement of the balloon is followed by a device to find its velocity $500\ ft$ from the balloon's launch point. At the moment when the angle of elevation of the balloon from the device was $\frac{\pi}{4}$, the angle was increasing at a rate of $0.14\ rad/min$. How fast was the balloon rising at this moment?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س2) على فرض أنّ حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغيّر بمعدّل $5\ ft/\ min$. عندما يصل نصف القطر إلى $100\ ft$ ، فما هو معدّل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟

Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of 5 feet per minute. When the radius reaches 100 feet, at what rate is the area of the burning region increasing?

Jalshobaki.com

س3) على فرض أنّ المنطقة المصابة بإصابة ما دائريّة. فإذا كان نصف قطر المنطقة المصابة $3\ mm$ وتزداد بمعدّل $1\ mm/hr$ فما هو معدّل تزايد المنطقة المصابة؟

Assume that the infected area of an injury is circular. If the radius of the infected area is 3 mm and growing at a rate of 1 mm/hr, at what rate is the infected area increasing?

Jalshobaki.com

س4) على فرض أنّ قطرة مطر تتبخّر بطريقة تحافظ معها على شكلها الكروي. فإذا تغيّر نصف القطر مع الزّمن وكان معدّل التبخّر (v') يتناسب مع مساحة السّطح، فبيّن أنّ نصف القطر يتغيّر بمعدّل ثابت؟

Suppose that a raindrop evaporates in such a way that it maintains a spherical shape. If the rate of evaporation (v') is proportional to the surface area, show that the radius changes at a constant rate?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س5) يتسرّب النّفط من ناقلة النّفط بمعدّل 120 برميل بالدّقيقة. ينتشر النّفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$.

A) حدّد معدّل تزايد نصف قطر التسرّب عند وصول نصف القطر إلى $100\ ft$, $200\ ft$ ؟

B) اشرح سبب تناقص المعدّل بتزايد نصف القطر؟

Jalshobaki.com

ملاحظة:

$1\ ft^3 = 7.5$ برميل

$1''(inch) = \frac{1}{12}'\ (ft)$

Oil spills out of a tanker at the rate of 120 gallons per minute. The oil spreads in a circle with a thickness of $\frac{1}{4}''$. Given that $1\ ft^3 = 7.5$ gallons, determine the rate at which the radius of the spill is increasing when the radius reaches $100\ ft$, $200\ ft$? Explain why the rate decreases as the radius increases?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

س6) يتسرّب النّفط بمعدّل g برميل في الدّقيقة. ينتشر بسمك $\frac{1}{4}''$. A) على فرض أنّ نصف قطر التسرّب يتزايد بمعدّل $0.6\ ft/min$ عندما يساوي نصف القطر $r = 100\ ft$ ، فحدّد قيمة g ؟

Oil spills out of a tanker at the rate of *g* gallons per minute. The oil spreads in a circle with a thickness of $\frac{1}{4}''$ (A) Given that the radius of the spill is increasing at a rate of 0.6 ft/min when the radius equals 100 feet, determine the value of *g*

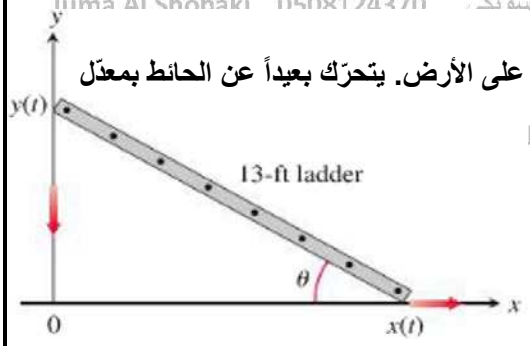
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

B) إذا تضاعف سمك النّفط فكيف يتغيّر معدّل تزايد نصف القطر؟

(B) If the thickness of the oil is doubled, how does the rate of increase of the radius change?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي



س7) سلّم طوله $13\ ft$ موضوع أحد طرفيه على جدار منزل والطّرف الآخر موضوع على الأرض. يتحرّك بعيداً عن الحائط بمعدّل $5\ ft/sec$ عندما كان هذا الطّرف على بعد $12\ ft$ من المنزل.

A) ما سرعة انزلاق الطّرف العلوي للسلّم على الحائط عند تلك اللحظة؟

B) ما معدّل تغيّر مساحة المثلّث المكوّنة من السلّم والحائط والأرض عند تلك اللحظة؟

C) ما معدّل تغيّر الزّاوية θ التي بين السلّم والأرض عند تلك اللحظة؟

A 13-foot ladder leans against the side of a house and the other end on the floor. It is moving away from the wall at the rate of $5\ ft/sec$ when this limb is $12\ ft$ from the house. (A) How fast is the top of the ladder sliding against the wall at that moment? (B) What is the rate of change of the area of the triangle made up of the ladder, the wall and the floor at that moment? C) What is the rate of change of the angle θ between the ladder and the ground at that moment?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

س8) جد معدّل تغيّر المساحة الجانبية لأسطوانة دائريّة قائمة، إذا كان كل من نصف القطر والارتفاع يتغيّران بمعدّل ثابت قدره $2\ ft/sec$ ؟

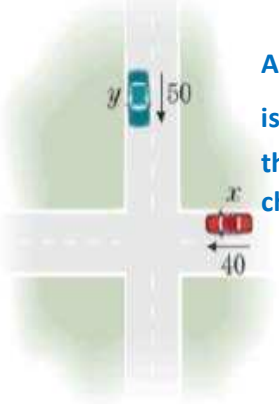
Find the rate of change of the lateral area of a right circular cylinder if the radius and height change at a constant rate of $2\ ft/sec$?

$A)\ 4\pi r$ $B)\ 2\pi(r+h)$ $C)\ 4\pi(r+h)$ $D)\ 4\pi rh$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س9) تسير سيّارة بسرعة $50\ km/h$ تجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}\ km$ شمال التّقاطع، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40\ km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}\ km$ شرق التّقاطع. في هذه اللحظة، يقيس الرّادار في سيّارة الشّرطة المعدّل الذي تتغيّر به المسافة بين السيّارتين. A) فما الذي سيسجّله جهاز الرّادار؟ وفسّر النّتيجة؟



A car is traveling at $50\ km/h$ due south at a point $\frac{1}{2}\ km$ north of an intersection. A police car is traveling at $40\ km/h$ due west at a point $\frac{1}{4}\ km$ east of the same intersection. At that instant, the radar in the police car measures the rate at which the distance between the two cars is changing. A) What does the radar gun register?

Jalshobaki.com

B) في حال كانت سيّارة الشّرطة ثابتة (أي لا تتحرّك) فهل هذا يجعل قياس الرّادار أكثر دقّة؟

B) If the police car is not moving. Does this make the radar gun's measurement more accurate?

C) إذا كانت سيّارة الشّرطة في نقطة التّقاطع (أي نقطة الأصل) فهل سيسجّل الرّادار السّرعة الحقيقية للسيّارة؟

C) Show that the radar gun gives the correct speed if the police car is located at the origin?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س10) تقوم شركة صغيرة بتقدير أنّه عند إنفاق (x) ألف درهم على الإعلانات في السّنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السّنوية بالدّالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ، والجدول يوضّح آخر أربعة إجماليّات للإعلانات السّنوية.

A small company estimates that when it spends x thousand AED for advertising in a year, its annual sales will be described by $s = 60 - 40e^{-0.05x}$. The four most recent annual advertising totals are given in the following table.

السّنة	4	3	2	1
الإعلانات بالدّرهم	20,000	18,000	16,000	14,500

A) Estimate the current (year 4) value of $x'(t)$?

A) قدّر القيمة الحاليّة (أي في السّنة 4) للتغيّر في الإنفاق ؟ أي $x'(t)$ ؟

B) Estimate the current rate of change of sales $s'(t)$?

B) قدّر المعدّل الحالي للتغيّر في المبيعات ؟ أي $s'(t)$ ؟

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com

س11) على فرض أنّ متوسّط التّكلفة السّنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر (x) من المنتجات هو $\bar{c}(x) = 12 + \frac{94}{x}$ وتتّضح أعداد منتجاتها السّنوية في الثّلاث سنوات الأخيرة في الجدول التّالي:

Suppose that the average yearly cost per item for producing x items of a business product is $\bar{c}(x) = 12 + \frac{94}{x}$.

The three most recent yearly production figures are given in the table.

السّنة	2	1	0
المنتجات (x)	9.4	8.8	8.2

A) Estimate the value of $\bar{x}(2)$?

A) قدّر قيمة $\bar{x}(2)$ ؟

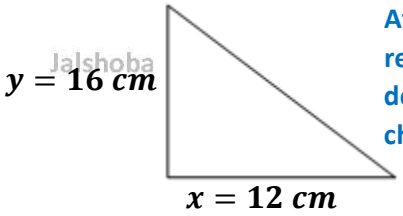
B) Estimate the current (year 2) rate of change of the average cost

B) قدّر معدّل تغيّر متوسّط التّكلفة في العام الحالي (عامين) ؟

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س12) في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلّث قائم الزّاوية $12\ cm$, $16\ cm$ على التّوالي. فإذا كان الضّلع الأوّل يتزايد بمعدّل $2\ cm/sec$ وكان الضّلع الثّاني يتناقص بمعدّل $1\ cm/sec$ بحيث أنّ المثلّث يبقى محافظاً على شكله. جد معدّل التغيّر في مساحة المثلّث بعد ثانيتين من تلك اللحظة؟



At some point, the lengths of the two sides of a right triangle were $12\ cm$ and $16\ cm$, respectively. If the first side is increasing at a rate of $2\ cm/sec$ and the second side is decreasing at a rate of $1\ cm/sec$ so that the triangle remains in shape. Find the rate of change of the area of the triangle after two seconds from that moment?

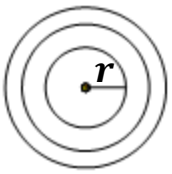
س13) تتحرّك نقطة على المنحنى $x^2 + y^2 = 20$. جد احداثيّات النّقطة في اللحظة التي يكون فيها معدّل التغيّر في الاحداثي (x) $2\ cm/sec$ ومعدّل التغيّر في الاحداثي (y) $1\ cm/sec$ ؟

A point moves on the curve $x^2 + y^2 = 20$. Find the coordinates of the point at the moment when the rate of change of the x-coordinate is $2\ cm/sec$ and the rate of change of the y-coordinate is $1\ cm/sec$?

Jalshobaki.com

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س14) بالون كروي نفخ بغاز الهيليوم بمعدّل $100\ \pi ft^3/min$.



A) ما سرعة تزايد نصف قطر البالون عند اللحظة التي يكون فيها طول نصف القطر $5\ ft$ ؟

A spherical balloon is blowing up with helium gas at a rate of $100\ \pi ft^3/min$. A) How fast is the balloon's radius increasing at the moment when the radius is $5\ ft$?

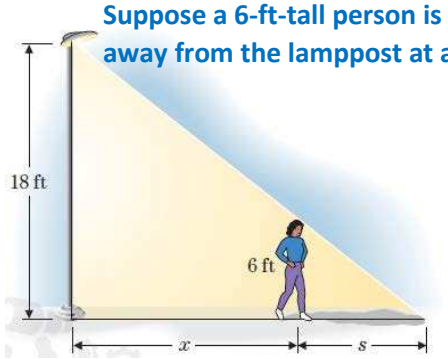
Jalshobaki.com

B) ما سرعة تزايد مساحته السّطحية عند هذه اللحظة؟

B) How fast is its surface area increasing at this moment?

س15) على فرض أنّ شخصاً ما يبلغ طوله 6 أقدام يبعد $12\ ft$ من عمود إنارة ارتفاعه 18 قدماً كما هو موضّح بالشّكل. إذا كان الشّخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدّل $2\ ft/sec$ ، فما هو المعدّل الذي يتغيّر به طول ظل الشّخص؟

Suppose a 6-ft-tall person is $12\ ft$ away from an 18-ft-tall lamppost (see the figure). If the person is moving away from the lamppost at a rate of $2\ ft/sec$, at what rate is the length of the shadow changing?



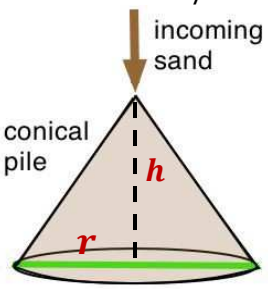
ملاحظة:

يبتعد بمعنى يتزايد +

يقترب بمعنى يتناقص -

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س16) ينسكب الرّمل في كومة مخروطيّة الشّكل وارتفاعها يعادل قطرها. A) إذا انسكب الرّمل بمعدّل ثابت $5\ m^3/s$ فما معدّل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين؟



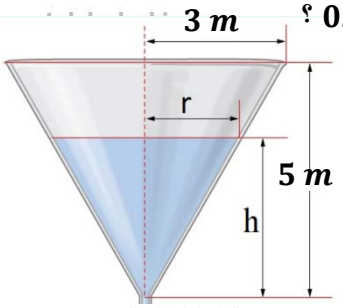
Sand is poured into a conical pile with the height of the pile equalling the diameter of the pile. If the sand is poured at a constant rate of $5\ m^3/s$, at what rate is the height of the pile increasing when the height is 2 meters?

Jalshobaki.com

B) ما سرعة تغيّر نصف القطر عند تلك اللحظة؟

B) How fast is the radius changing at that moment?

س17) يتدفّق الماء من خزّان مياه مخروطي الشّكل بمعدّل $0.1\ m^3/min$. رأسه لأسفل وقاعدته أفقيّة. وكان طول نصف قطر قاعدته $3\ m$ وارتفاعه $5\ m$. A) ما سرعة هبوط مستوى سطح الماء عندما يكون عمق المياه $0.5\ m$ ؟



A water tank in the shape of a right circular cone of radius 3 m and height 5 m leaks water from the vertex at a rate of $0.1\ m^3/min$. Find the rate of change of the water level when the water is 0.5 m deep?

Jalshobaki.com

B) ما سرعة تغيّر نصف قطر سطح الماء عند هذه اللحظة؟

B) How fast is the radius of the water's surface changing at this moment?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س18) بفرض أنّ z, y, x هي أبعاد صندوق على شكل متوازي مستطيلات، وتتغيّر معدّلاتها كالآتي:

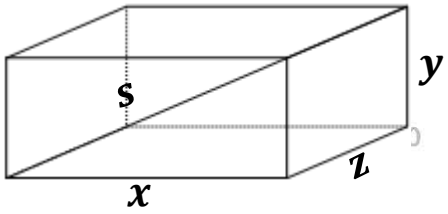
$\frac{dz}{dt} = 1\ m/sec$ ، $\frac{dy}{dt} = -2\ m/sec$ ، $\frac{dx}{dt} = 1\ m/sec$. جد عند اللحظة التي عندها $x = 4$ ، $z = 2$ $y = 3$ معدّل التغيّر في: A) حجم الصّندوق؟ B) مساحته السّطحية؟ C) طول قطره؟

ملاحظة:

طول قطر متوازي المستطيلات:

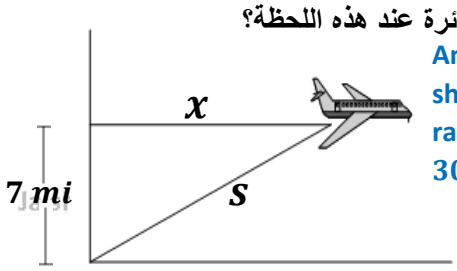
$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Assuming that x, y, z are the dimensions of a box in the form of a cuboid, and their rates change as follows: $\frac{dz}{dt} = 1\ m/sec$, $\frac{dy}{dt} = -2\ m/sec$, $\frac{dx}{dt} = 1\ m/sec$.
Find at the moment at which $x = 4$, $z = 2$, $y = 3$ the rate of change in:
A) The volume of the box? B) its surface area? C) its diameter length?



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

س19) طائرة تطير على ارتفاع ثابت قدره $7\ mi$ ، وتمر مباشرة فوق رادار كما هو مبيّن بالشّكل. عندما كانت الطّائرة على بعد $10\ mi$ من الرّادار بيّن الرّادار أنّ المسافة s تتغيّر بمعدّل $300\ mi/hr$. ما سرعة الطّائرة عند هذه اللحظة؟



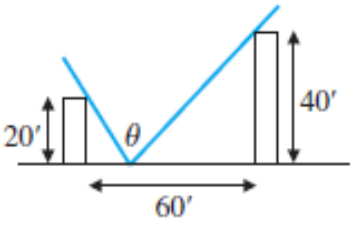
An aircraft flying at a constant altitude of $7\ mi$, passes directly over a radar as shown in the figure. When the aircraft was at a distance of $10\ mi$ from the radar, the radar indicated that the distance s was changing at a rate of $300\ mi/hr$. What is the plane's speed at this moment?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س20) مبنيان ارتفاعهما 20 قدماً و 40 قدماً والمسافة بينهما 60 قدماً كما هو موضّح بالشّكل. على فرض أنّ شدّة الضّوء في نقطة معيّنة بين المبنيين تتناسب طرديّاً مع الزّاوية θ.

A) إذا تحرّك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدّل $4\ ft/sec$ ، فما معدّل تغيّر θ عندما يكون الشّخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضّبط؟



Two buildings of height 20 feet and 40 feet, respectively, are 60 feet apart. Suppose that the intensity of light at a point between the buildings is proportional to the angle θ in the figure. (A) If a person is moving from right to left at $4\ ft/sec$, at what rate is θ changing when the person is exactly halfway between the two buildings?

B) أوجد الموقع الذي يكون قياس الزّاوية θ أكبر ما يمكن؟

B) Find the location at which the angle θ is maximum?

Jalshobaki.com