المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول	
5	المراجعة النهائية اختيار من متعدد

الريـــــاضـــــــيات

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الثانية (الاتصال والنـهايات)

2024/ 2025

إعداد

د : حيدر عامر السعافين

الصف الثاني عشر متقدم

2021/2022

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

2-1 المماسات وطول المنحنى

2-2 مفهوم النهاية

2-3 حساب النهايات

2-4 الأتصال ونتائجه

2-5 النهايات التي تتضمن اللانهاية: خطوط التقارب

2-6 التعريف الرسمي للنهاية

أولاً: تقدير ميل المنحنى عند نقطة

(1) قدر منحنى الدالة: $y=x^2$ عند النقطة $(2,4)$

m =4

النقطة المتحركة من اليمين		النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليسار	
(2.1,4.41)	(2.01,4.04010)	(2,4)	(1.99,3.9601)	(1.9,3.61)
m = 4.1	m =4.01		m = 3.99	m = 3.9

(2) قدر منحنى الدالة: $y=\cos x$ عند $x=0$

m =0

النقطة المتحركة من اليمين		النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليسار	
(0.1,cos 0.1)	(0.01 ,cos 0.01)	(0 , 1)	(- 0.01,cos -0.01)	(- 0.1 ,cos-0.1)
m = - 0.05	m = - 0.005		m = -0.005	m = - 0.05

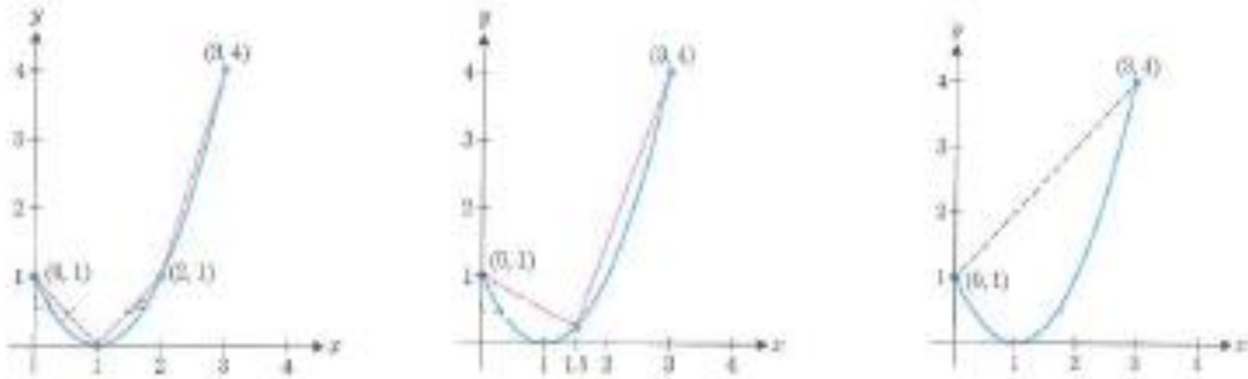
(3) قدر منحنى الدالة: $y=e^x$ عند $x=0$

m =0

النقطة المتحركة من اليمين		النقطة الثابتة	النقطة المتحركة من اليسار	
(0.1 ,$e^{0.1}$)	(0.01 ,$e^{0.01}$)	(0 , 1)	(-0.01 ,$e^{-0.01}$)	(-0.1 ,$e^{-0.1}$)
m =1.05	m= 1.005		m= 0.995	m = 0.950

ثانياً: تقدير طول منحنى دالة على فترة

(1) قدر منحنى الدالة : $y=(x-1)^2$ على الفترة $[0\,,3]$ باستخدام 3 قطع مستقيمة



طول الفترة الجزئية : $\Delta=\dfrac{3-0}{3}=1$

النقاط هي : $(0,1), (1,0), (2,1), (3,4)$

$$d_1=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=1.41$$

$$d_2=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=1.41$$

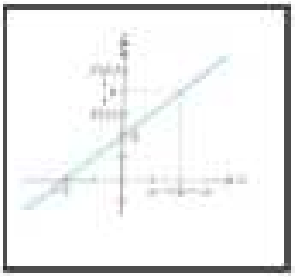
$$d_3=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}=3.16$$

$$d=1.41+1.41+3.16=5.98\approx 6$$

(2) قدر منحنى الدالة : $y=\sin x$ على الفترة $[0\,,\pi]$ باستخدام 4 قطع مستقيمة

نهاية دالة عند نقطة:

تعلمنا بالصفوف السابقة كيف نجد صورة اي عدد ضمن مجال الدالة بالتعويض المباشر، ولكن اذا اردنا توقع صورة الدالة لعدد خارج مجال الدالة ،فاننا سنقوم بدراسة هذه الدالة بجاور هذا العدد وليس عنده، والفكرة الرياضية التي تساعدنا في دراسة سلوك الدالة بجوار عدد معين تسمى النهاية (lim).



فمثلا اذا كانت الدالة : $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ فان الدالة غير معرفة عند $x=2$

اي لا يوجد صورة للعدد 2 (نقطة خارج المجال) ولكن يمكن توقع من الرسم البياني للدالة انه كلما :

اقتربنا للعدد 2 من جهة اليسار او من جهة اليمين فان الدالة تقترب من العدد 4

فنقول ان نهاية الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد 2

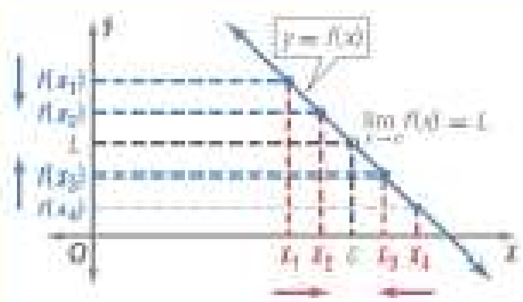
ونعبر عن ذلك باستخدام الرموز الرياضية

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

وبشكل عام

التعبير اللفظي: اذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فان نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ، ونقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



<u>يمكن ايجاد نهاية دالة عند نقطة من خلال:</u>

(1) الجدول (رقمياً)

(2) الرسم البياني (بيانياً)

(3) الحل الجبري (جبرياً)

اولاً: <u>نهاية دالة عند نقطة من الجدول:</u>

(1) اوجد: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ من خلال الجدول

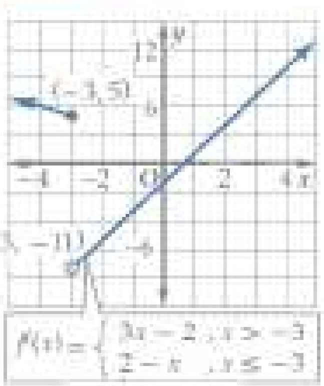
x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين

اي ان $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 8$

(2) اذا كان : $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & , x > -3 \\ 2-x & , x \le -3 \end{cases}$ فاوجد $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ من خلال الجدول

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		−10.997	−10.97	−10.7



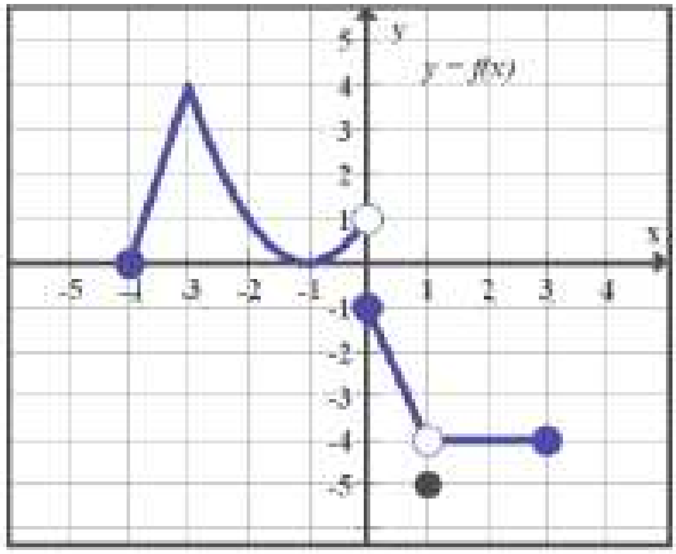
$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 5$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -11$

اي ان $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ غير موجودة لان النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

ثانياً: نهاية دالة عند نقطة بيانياً:

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة: $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية:



(1) $f(0) =$ $\boxed{-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ $\boxed{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ $\boxed{1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ $\boxed{\text{غ م}}$

(5) $f(1) =$ $\boxed{-5}$

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ $\boxed{-4}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ $\boxed{-4}$

(8) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ $\boxed{-4}$

(9) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ $\boxed{-4}$

(10) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ $\boxed{4}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2 - x) =$ $\boxed{\text{غ م}}$

تكون النهاية موجودة

اذا كانت

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

اي ان

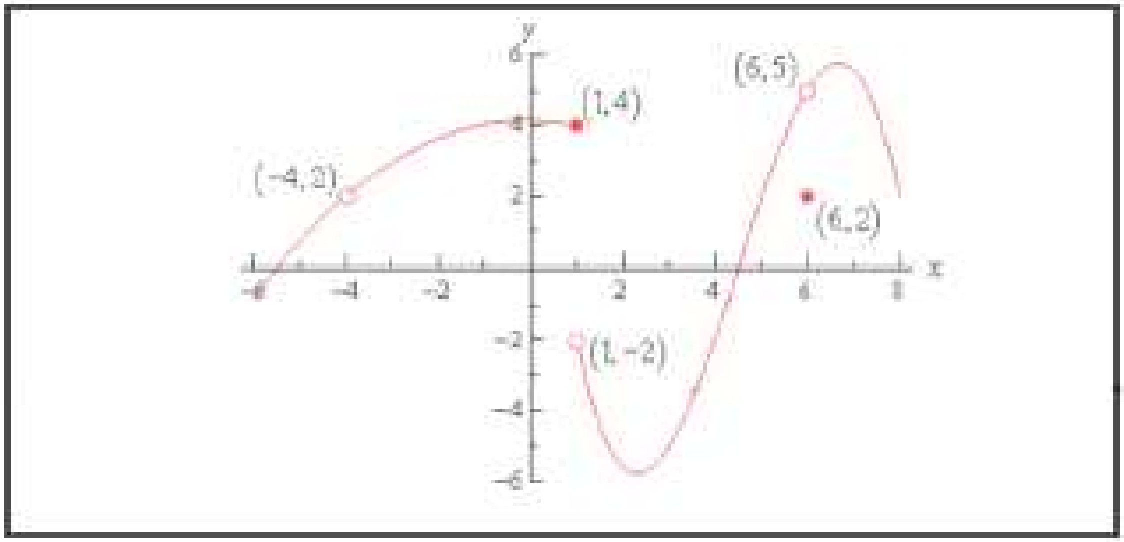
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L, \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

اما اذا كانت

النهاية من اليمين ≠ النهاية اليسار

فان النهاية غير موجودة

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :

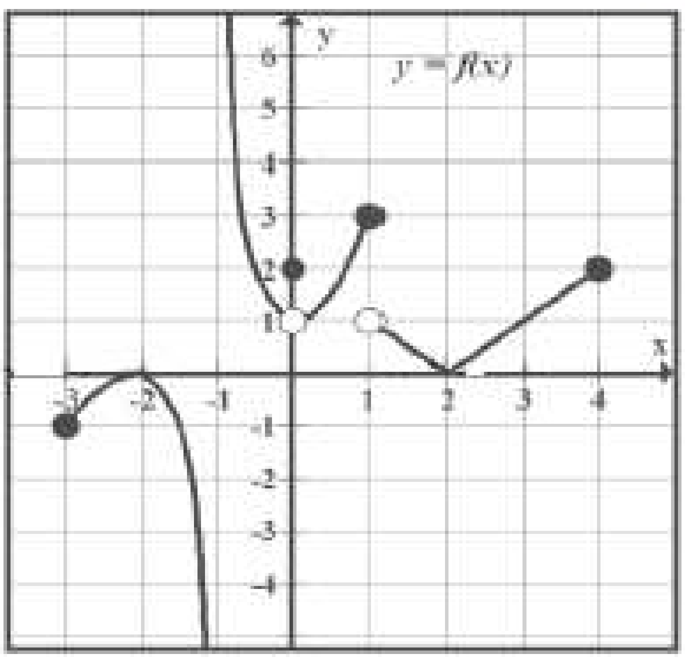


(a) $f(-4)$ غ م (b) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = 2$ (c) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 2$ (d) $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 2$

(e) $f(1) = 4$ (f) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$ (g) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$ (h) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غ م

(i) $f(6) = 2$ (j) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = 5$ (k) $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = 5$ (l) $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 5$

(2) استخدم الرسم البياني المجاور للدالة $f(x)$ حيث $-3 \le x \le 4$



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$

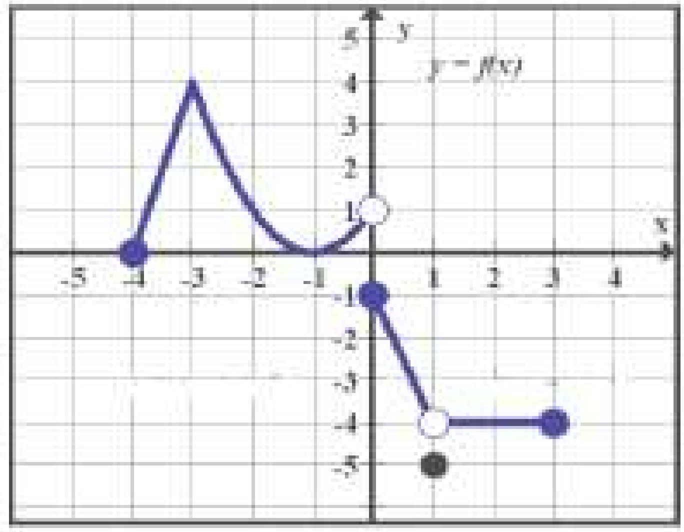
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ غ م

$f(1) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ $\boxed{0}$

(2) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $\boxed{-4}$

(3) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ $\boxed{\text{غ م}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ $\boxed{\text{غ م}}$

(5) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) =$ $\boxed{0}$

(6) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) =$ $\boxed{\text{غ م}}$

(7) $\lim\limits_{x\to -4} f(x) =$ $\boxed{\text{غ م}}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| =$ $\boxed{1}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1} |f(x)| =$ $\boxed{4}$

(10) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{f(x)} =$ $\boxed{0}$

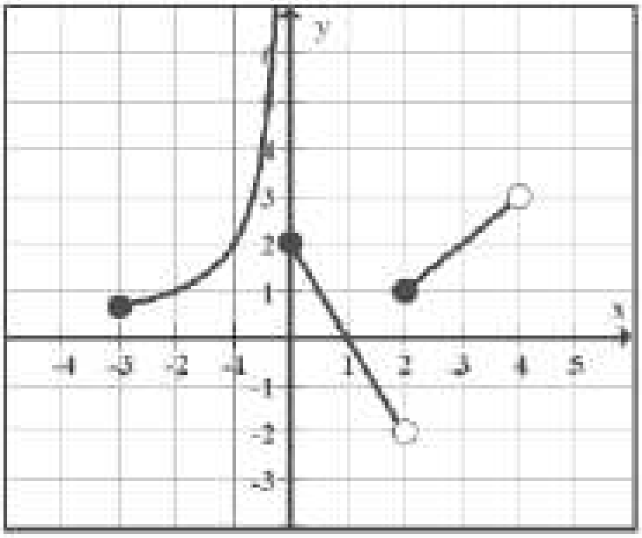
(11) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة هي $\boxed{-4,3,0}$

(12) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ من جهة اليمين فقط موجودة هي $\boxed{-4}$

(13) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ من جهة اليسار فقط موجودة هي $\boxed{3}$

(14) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -4$ هي...... $\boxed{[\,1,3)}$

استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $f(0) =$ 2

(2) $f(2) =$ 1

(3) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ 2

(4) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ ∞

(5) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ غ م

(6) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ غ م

(7) $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ 3

(8) $\lim_{x \to -3} f(x) =$ غ م

(9) $\lim_{x \to 1} f(x) =$ 0

(10) $\lim_{x \to 2} |f(x)| =$ غ م

(11) $\lim_{x \to 1} \sqrt{f(x)} =$ غ م

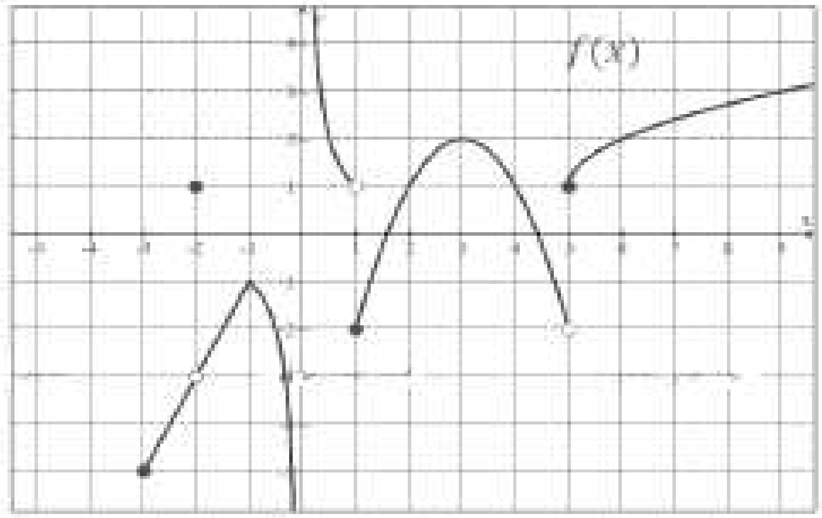
لأن الدالة تأخذ قيم سالبة عندما تكون $x > 1$ (من جهة اليمين)

(12) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة هي -3,0,2,4

(13) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \to c} f(x)$ من جهة اليمين فقط موجودة هي -3,0

(14) مجموعة قيم c التي تجعل $\lim_{x \to c} f(x)$ من جهة اليسار فقط موجودة هي $\emptyset$

(1) استخدم الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ حيث $x \geq -3$ لإكمال الجدول التالي:

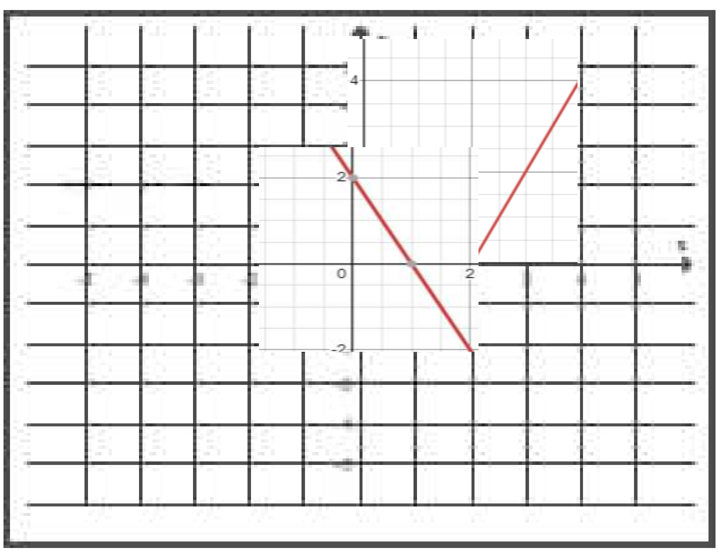


قيمة x_1	$\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$
$x_1 = -2$	-3
$x_1 = -1$	-1
$x_1 = 3$	2
$x_1 = 5$	غ م

(2) إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , x \geq 2 \\ 2 - 2x & , x < 2 \end{cases}$$

(أ) ارسم الشكل البياني للدالة (f)



(ب) اوجد:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$

(ج) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة ؟ اذكر السبب.

لا :لأن

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

خواص النهايات:

ملاحظة: يمكن استخدام خواص النهايات اذا كانت النهايات موجودة اما اذا كانت غير موجودة نبحث عن طرق اخرى

1) نهاية الدالة الثابتة حيث K ثابت $\qquad \lim\limits_{x\to c} (k) = k$

2) نهاية الدالة المحايدة $f(x) = x$ $\qquad \lim\limits_{x\to c} (x) = c$

3) إذا كانت L , M , c , k أعداد حقيقية ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ فــــان :

(1) قاعدة الجمع : $\qquad \lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$

(2) قاعدة الفرق : $\qquad \lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$

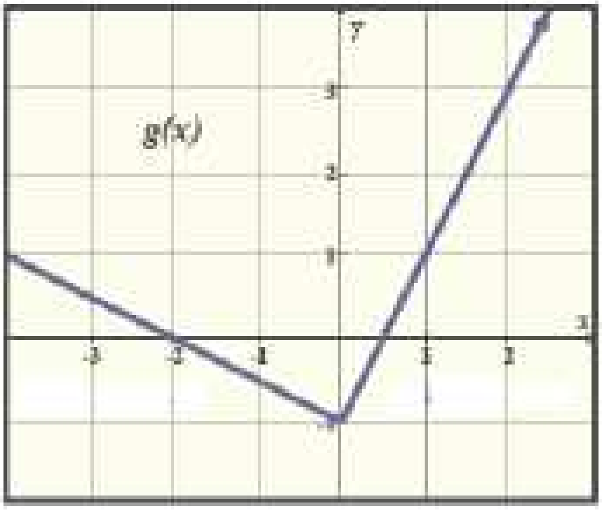
(3) قاعدة الضرب : $\qquad \lim\limits_{x\to c}(f(x).g(x)) = L.M$

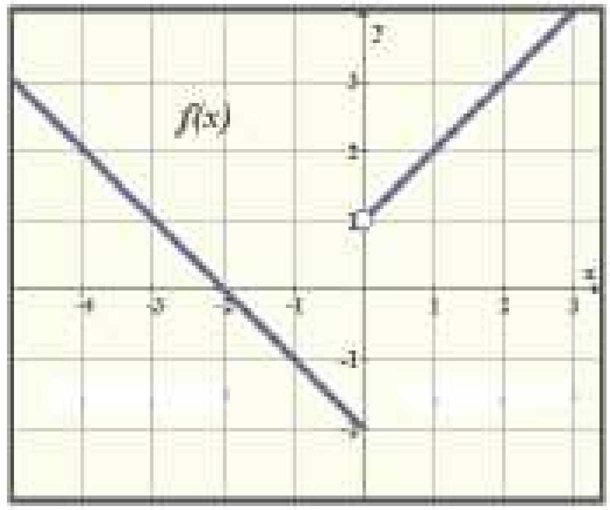
(4) قاعدة الضرب في ثابت : $\qquad \lim\limits_{x\to c}(k.f(x)) = k.L$

(5) قاعدة ناتج القسمة : $\qquad \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

(6) قاعدة القوة : $\qquad \lim\limits_{x\to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$

استخدم الرسم البياني المجاور في الإجابة عن الأسئلة التالية :





(1) $\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x)) =$ 3 + 3 =6

(2) $\lim_{x \to 1} \sqrt{g(x)} =$ 1

(3) $\lim_{x \to -1} \sqrt{f(x)} =$ غ م

(4) $\lim_{x \to 0} (g(x) + f(x)) =$ غ م

(5) $\lim_{x \to -2} \frac{3f(x) - 3}{x^2}$ $= \frac{\mathbf{3(0) - 3}}{(-2)^2} = -\frac{3}{4}$

(6) $\lim_{x \to -2} \sqrt{f(x) + 1}$ $= \sqrt{0 + 1} = 1$

إذا علمت أن: $\lim_{x \to 5} f(x) = -3$, $\lim_{x \to 5} g(x) = 4$ فاوجد:

(1) $\lim_{x \to 5}(4f(x)+7)$ $=4\lim_{x\to 5} f(x) + 7 = 4(-3) + 7 = 5$

(2) $\lim_{x \to 5}(f(x)\times g(x) - x)$ $=\lim_{x\to 5} f(x) \times \lim_{x\to 5} g(x) - \lim_{x\to 5} x = (-3)\times(4) - 5 = -17$

(3) $\lim_{x \to 5}(f^2(x) - \sqrt{g(x)})$ $=\lim_{x\to 5} f^2(x) - \lim_{x\to 5} \sqrt{g(x)} = (-3)^2 - \sqrt{4} = 9 - 2 = 7$

(4) $\lim_{x \to 5}\frac{f(x)+2x}{g(x)-1}$ $= \frac{-3+2(5)}{4-1} = \frac{7}{3}$

(5) $\lim_{x \to 5}\frac{(f(x)+11)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{g(x)}}$ $= \frac{(-3+11)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt[3]{8^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

ثالثاً: نهاية دالة عند نقطة جبرياً:

طرق حساب النهايات جبرياً

(1) **التعويض المباشر:**

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{x \to -2} \frac{2x+3}{x-2} =$

$$\frac{-4+3}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^3}{x+1} =$

$$\frac{(0+1)^3}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{9x^2-4} =$

$$\frac{2(2)-4}{9(2)^2-4} = \frac{0}{32} = 0$$

(4) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2-3x}{x^2+9} =$

$$\frac{(-3)^2-3(-3)}{-2-2} = \frac{9+9}{(-3)^2+9} = \frac{18}{18} = 1$$

(5) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^2+5}$

$$= \sqrt{4+5} = \pm 3$$

(6) $\lim_{x \to -5} \sqrt[3]{3x-12}$

$$= \sqrt[3]{-15-12} = -3$$

(7) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x \sin x$

$$= \frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

(8) $\lim_{x \to -1} e^x$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(9) $\lim_{x \to 0} \cos^{-1} x^2$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(10) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln \sin x + x$

$$= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln 1 = 0$$

(11) $\lim \log_2 (x+5)$

(2) التحليل إلى العوامل:

1. العامل المشترك
2. الفرق بين مربعين
3. الحدود الثلاثية
4. الفرق بين مكعبين
5. مجموع مكعبين

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}x=2$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 9}\frac{x^2-9x}{18-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 9}\frac{x\cancel{(x-9)}}{2\cancel{(9-x)}}=\lim_{x\to 9}\frac{x(-1)}{2}=$$

$$(3)\quad \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x-2)}=\frac{-1}{4}$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 5}\frac{3x^2-75}{10-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x^2-25)}{2(5-x)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)(x+5)}{2(5-x)}=\lim_{x\to 5}\frac{-3(x+5)}{2}=-15$$

$$(5)\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{3x-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x^2-9)}{x(3-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(3-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1(x+3)}{1}=-6$$

$$(6)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(x-4)^2-16}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{[(x-4)-4][(x-4)+4]}{2(5-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-8)(x)}{x}=-8$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)}{(x+3)}=\frac{1}{6}$

(2) $\lim_{x\to3}\frac{6-2x}{x^2-2x-3}=\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to3}\frac{2(3-x)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{-2}{(x+1)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}=\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{(x^2+2x+4)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(4) $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^3-4x}=$

$\frac{0}{0}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-2x+4)}{x(x-2)}=\frac{12}{-8}=\frac{-3}{2}$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^3-8}{h}=$

$$\frac{0}{0}=\lim_{h\to 0}\frac{[(h+2)-2][(h+2)^2+2(h+2)+4]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[h][(h+2)^2+2(h+2)+4]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}[(h+2)^2+2(h+2)+4]=4+4+4=12$$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x^2-5x+6}=$

$$\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-4)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2)}{(x-3)}=\frac{2(4)}{-1}=-8$$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=$

$$\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}=\frac{2(2)}{3}=\frac{4}{3}$$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}=$

$$\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x+1}}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x+1}}{(x+1)}=\frac{e^1}{1}=e$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} =$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x-1) + (x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{2x}}{e^x - 1} =$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - e^x)(1 + e^x)}{(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{(-1)(1 + e^x)}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

(3) $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x^2 - 2x + 1)^5} =$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)^{10}}{(x-1)^{2^5}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}{(x-1)^{10}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)^{10}}{1} = \frac{2^{10}}{1} = 2^{10}$$

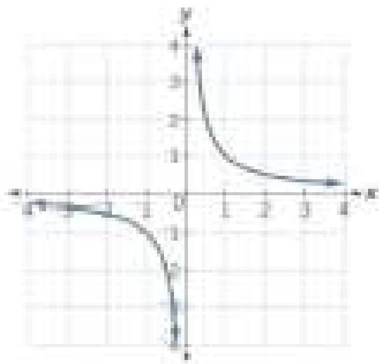
اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

ملاحظة:

$$(1)\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

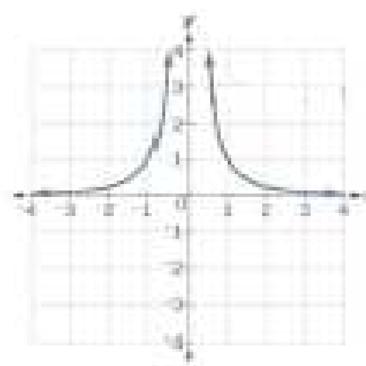
$$(2)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}= not\ exist$$



ملاحظة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$



$$(1)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2}=\quad \frac{2}{0}=\infty$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 9}\frac{x^2}{18-2x}=\quad \frac{81}{0}=\infty$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x^2-4}=\infty\ ,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty\ \to \lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}= \text{غ م}$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 5}\frac{-3}{10-2x}=$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{-3}{10-2x}=\infty\ ,\ \lim_{x\to 5^-}\frac{-3}{10-2x}=-\infty\ \to \lim_{x\to 5}\frac{-3}{10-2x}= \text{غ م}$$

$$(5)\quad \lim_{x\to 3}\frac{x}{3x-x^2}= \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x}{x(3-x)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(3-x)}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{3-x}=\infty\ ,\ \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x}=-\infty\ \to \lim_{x\to 3}\frac{1}{3-x}= \text{غ م}$$

$$(6)\quad \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{(4-x)^3}=$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)^2}{(4-x)^3}=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 4^-}\frac{(x-4)^2}{(4-x)^3}=\infty\ \to \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{(4-x)^3}= \text{غ م}$$

(1) إذا كانت: $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=7$ فاوجد قيمة a,b .

يجب أن يكون أحد عوامل البسط(x-2)

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x-{}^{b}/_{2}\right)}{x-2}=7$$

$$\lim_{x\to2}\left(x-\frac{b}{2}\right)=7$$

$$2-\frac{b}{2}=7 \rightarrow \frac{b}{2}=2-7=-5$$

$\underline{b=-10}$

$$(x-2)(x+5)=x^2+ax+b$$

$$x^2-3x+10=x^2+ax+b \quad \rightarrow a=-3$$

(2) إذا كانت : $\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)^{2n}}{(x^2-2x+1)^n}=81$ فاوجد قيمة n

$$\lim_{x\to1}\frac{[(x-1)(x^2+x+1)]^{2n}}{[(x-1)^2]^n}=81$$

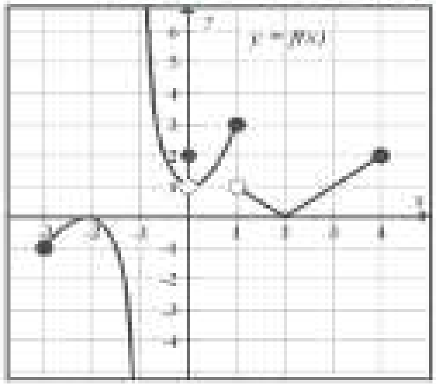
$$\lim_{x\to2}\frac{(x-1)^{2n}(x^2+x+1)^{2n}}{(x-1)^{2n}}=81$$

$$3^{2n}=81=3^4$$

$$2n=4$$

$$n=2$$

(1) استخدم الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



هل يمكن استخدام التعويض لإيجاد : $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{x-2}$

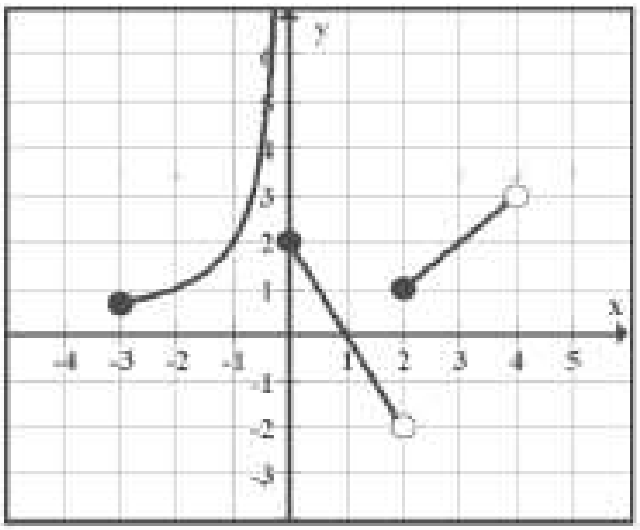
ابحث عن طريقة لتوضيح كيفية إيجاد هذه النهاية . ثم أوجد قيمتها

لا : لأن صفر نوجد معادلة $f(x)$

$$y - 0 = 2(x-2) = 2x - 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

(2) استخدم الرسم البياني المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية :



(1) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} =$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{x-1} = -2$$

عند $x = 1$ يكون

$$y = mx + b$$

$$y = -2x + 2$$

$$y = -2(x-1)$$

(2) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{f(x)-1} =$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{2x-4-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

At :$x = 2^+$

$$at\ (3,2):\ y - 2 = 2(x-3)$$

$$y = 2x - 4$$

(3) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-4}{f(x)+2} =$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{-2x+2+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{-2x+4} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{-2(x-2)} = \frac{-1}{2}$$

At :$x = 2^-$

$$at\ (1,0):\ y - 0 = -2(x-1)$$

$$y = -2x + 2$$

(4) $\lim_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$

غ م

3) التبسيط (توحيد المقامات):

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\frac{2-x}{2x}}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{2x(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{4}$$

(2) $\lim_{x\to 3}(\frac{1}{x}-\frac{1}{3})\times\frac{x}{x^2-9}=$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{3-x}{3x}\right)\times\frac{x}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{3(x+3)}=-\frac{1}{18}$$

(3) $\lim_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)=$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5-x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{(5+x)-(5-x)}{(5+x)(5-x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{5+x-5+x}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{2x}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}(3)\left(\frac{2}{(5+x)(5-x)}\right)=\frac{6}{25}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3x+5}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(3x+5)-2(x+3)}{(x+3)(3x+5)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+5-2x-6}{(x+3)(3x+5)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x+3)(3x+5}\right)=0$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{4x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{5+5(2x-3)}{2x-3}}{4(x^2-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{5+10x-15}{4(x-1)(x+1)(2x-3)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{10x-10}{4(x-1)(x+1)(2x-3)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{10(x-1)}{4(x-1)(x+1)(2x-3)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{10}{4(x+1)(2x-3)}\right)=\frac{10}{(4)(2)(-1)}=-\frac{5}{4}$$

(1) في إحدى الدراسات على عيون القطط وجد إن قطر البؤبؤ $f(x)$ للقطط يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عينيه وفق العلاقة:

$$f(x)=\frac{160x^{-0.04}+90}{4x^{-0.04}+15}$$

اوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تسع شدة الإضاءة إلى الصفر(تنعدم الرؤية).

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(160x^{-0.04x}+90)x^{0.04}}{(4x^{-0.04x}+15)x^{0.04}}=\lim_{x\to 0}\frac{(160+90x^{0.04x})}{(4+15x^{0.04x})}=\frac{160}{4}=40$$

(2) اوجد قيمة الثوابت : a,b التي تجعل $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{x+a}-b}{2x}=-1$

* يجب أن يكون البسط يساوي صفر عندما $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x+a}-b=0 \quad \to 1-b=0 \quad \to\to b=1$$

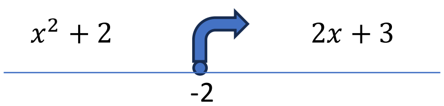
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{x+a}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a-(x+a)}{x+a}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x+a}\cdot\frac{1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+a)}=-1 \quad \to \quad \frac{-1}{2a}=-1 \quad \to a=\frac{1}{2}$$

(4) الدوال المتفرعة (الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة وتشمل دالة المطلق والصحيح):

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة:

(1) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & , x<-2 \\ 2x+3 & , x\ge -2 \end{cases}$

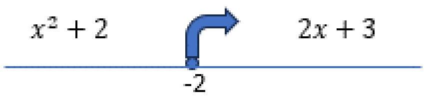


فأوجد:

(a) $f(-2)$ =2(-2) +3= -1

(b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ =2(3) +3= 9

(c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ غ م $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=6\,,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-1\,,$



(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} -x & , x>-1 \\ 2x+3 & , x<-1 \end{cases}$

فأوجد:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$ لان $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2(-1)+3=1\ ,\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-(-1)=1$

(3) إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x\ne 2 \\ 5 & , x=2 \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $f(2)=$ $\boxed{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$

(1) إذا كانت: $g(x) = \dfrac{x-1}{1-x}$ ، $f(x) = \begin{cases} \log x + 4 & ,x \geq 1 \\ 5x - 1 & ,x < 1 \end{cases}$

$5x-1 \quad , \quad \log x + 4$ (1)

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = 4, \lim\limits_{x\to1} g(x) = -1$,

فأوجد:

$$\lim_{x\to1}(f(x)+g(x)) =$$

لان كل من النهايات موجودة يمكن استخدام توزيع النهاية

$$\lim_{x\to1}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x) = 4 + (-1) = 3$$

(2) إذا كانت: $g(x) = x^2 - x$ ، $f(x) = \begin{cases} x^2 + \cos x & ,x \geq 0 \\ e^x - 1 & ,x < 0 \end{cases}$

وكان $h(x) = f(x) \times g(x)$

اشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل ضرب دالتين في إيجاد قيمة $\lim\limits_{x\to0} h(x)$

$e^x - 1 \quad , \quad x^2 + cosx$ (0)

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$ غ م ، $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$ ،

لا يمكن لأن $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ غير موجودة ويجب دراسة

النهاية من اليسار ومن اليمين

يمكن توزيع النهاية من جهة واحدة

ابحث عن طريقة تحليلية لايجاد قيمة هذه النهاية

$$\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} f(x).g(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) . \lim_{x\to0^-} g(x) = (-1).0 = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} f(x).g(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) . \lim_{x\to0^+} g(x) = (1).0 = 0$$

$$\to \lim_{x\to0} h(x) = 0$$

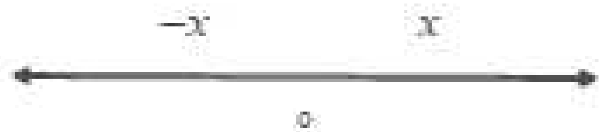
دالة المطلق :

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

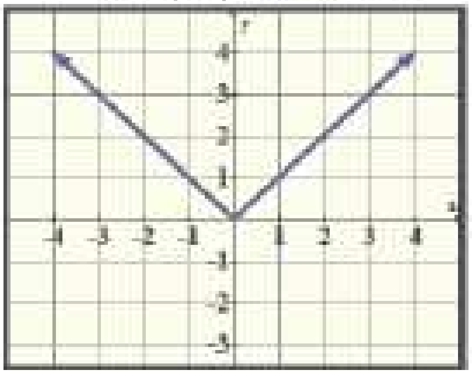
$$|x| = a \iff x = a \quad or \quad x = -a$$

$|5| = 5$

$|-5| = 5$



$y = |x|$: دالة المطلق



اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

$$(1) \lim_{x \to -1} \frac{x + |x| - 2}{x^2 + 1} = \frac{-1 + 1 - 2}{(-1)^2 + 1} = -1$$

$$(2) \lim_{x \to 3} \frac{|x-5| - 2}{x^2 - 9} =$$

$-(x-5) \quad , \quad (x-5)$

5

$$\lim_{x \to 3} \frac{-(x-5) - 2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-x + 5 - 2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-x + 3}{(x-3)(x+3)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x+3)} = \frac{-1}{6}$$

$$(3) \lim_{x \to 3} \frac{x|1-x| - 6}{x^2 - 3x} =$$

$$\boxed{|a-x| = |x-a|}$$

$-(x-3) \quad , \quad (x-3)$

3

$$\lim_{x \to 3} \frac{x|x-1| - 6}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-1) - 6}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x(x-3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$$

(1) اوجد قيمة كل من النهايات الآتية: (إن أمكن).

$(1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ ندرس النهاية من الجهتين $\quad -x \quad \underset{0}{|} \quad x$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\ ,\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1\to\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\ \to\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\ \text{غ م}$$

$(2)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-4|}{|x-2|}$

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right|=\lim_{x\to 2}\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right|=\lim_{x\to 2}|x+2|=4$$

$(3)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{-x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2}{x}\right)=\infty\to\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)\ \text{غ م}$$

$(4)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+|x|}{x}-\dfrac{1-x}{|x|}\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-x}{x}-\frac{1-x}{-x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-x)}{x}=-\infty,\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{1-x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2\to\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{x}-\frac{1-x}{-x}\right)\ \text{غ م}$$

$(5)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-|x|}{|3x|-2x}$

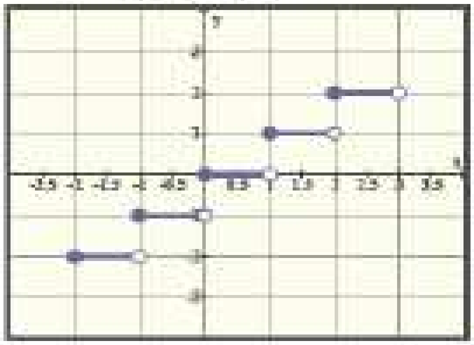
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-(-x)}{-3x-2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x}{-5x}=-\frac{3}{5},\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-x}{3x-2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1\to\lim_{x\to 0}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}\ \text{غ م}$$

(2) اوجد قيمة b اذا كانت $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{x^2-b}{x-b}=\lim\limits_{x\to 2}(|x|+8)$

$$\lim_{x\to b}\frac{(x-b)(x+b)}{x-b}=\lim_{x\to b}(x+b)=2+8=10\to b+b=10\quad\to 2b=10\quad ,b=5$$

دالة الصحيح:

دالة الصحيح : $y = [x]$



$[5] = 5$

$[5.7] = 5$

$[-5.99] = -6$

ملاحظة: اذا كانت n عدد صحيح فان $[x+n] = [x] + n$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :(إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x \to 2.9} [x]$ $= 2$

(2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} [3x+1] =$ 2

(3) $\lim\limits_{x \to 2^-} [x]$

$= 3$

(4) $\lim\limits_{x \to -3} [x + 0.5]$

$= -3$

(5) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{|x|}{[x]}$

تتخلص من [ ] أول $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{|x|}{-3} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$

(6) $\lim\limits_{x \to -2.1} |[x]|$

$= 3$

(7) $\lim\limits_{x \to -3.8} x[x] =$

$-3.8\ (-4) = 15.2$

(8) $\lim\limits_{x \to 2^-} 3[x] - |x| =$

$3(1)\ -2 = 1$

(9) $\lim\limits_{x \to 2^-} |x-2| + [x] + x =$

$0 + 1 + 2 = 3$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-[x+1]}{|x-3|}=$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-[x]-1}{-(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-2-1}{-(x-3)}=-1$

$-(x-3)\,,\quad (x-3)$

3

(2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+[x+1]}{x-2}=$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+[x]+1}{-(x-3)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+1+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x-1)=2-1=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x([x]+3)}{x^2+x}=$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x(-1+3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x+1}=4$$

(4) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-2}{|x-2|+[x-2]}=$

$-(x-2)\,,\quad (x-2)$

2

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-1)}{-(x-2)+[x]-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-1)}{-x+2+1-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-1)}{-(x-1)}=-2$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}([x]+5)^{[x]}$

$$\lim_{x\to 0^-}(-1+5)^{-1}=\frac{1}{4}$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت) .

(1) $\lim_{x\to 2}[x]$

$\lim_{x\to 2^+}[x] = 2 \quad , \lim_{x\to 2^-}[x] = 1 \ \to \lim_{x\to 2}[x] =$ غ م

(2) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}[3x+1] = \lim_{x\to \frac{1}{3}^+}[3x] + 1 = \lim_{x\to \frac{1}{3}^+}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^+\right] + 1 = \lim_{x\to \frac{1}{3}^+}[1^+] + 1 = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x\to \frac{1}{3}^-}[3x] + 1 = \lim_{x\to \frac{1}{3}^-}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^-\right] + 1 = \lim_{x\to \frac{1}{3}^+}[1^-] + 1 = 0 + 1 = 1 \to \lim_{x\to \frac{1}{3}^+}[3x+1]$ غ م

(3) $\lim_{x\to -3}[x+2] =$

$\lim_{x\to -3^+}[x+2] = -3 + 2 = -1 \quad , \lim_{x\to -3^-}[x+2] = -4 + 2 = -2 \ \to \lim_{x\to -3}[x+2] =$ غ م

(4) $\lim_{x\to 0} x[x+2] =$

$\lim_{x\to 0^+} x[x+2] = 0(-1+2) = 0 \ , \lim_{x\to -0^-} x[x+2] = 0(0+2) = 0 \ \to \lim_{x\to 0} x[x+2] = 0$

(5) $\lim_{x\to 1}(x+2)^{[x]}$

$\lim_{x\to 1^+}(x+2)^{[x]} = (1+2)^1 = 3 \ , \lim_{x\to 1^-}(x+2)^{[x]} = (1+2)^0 = 1 \to \lim_{x\to 1}(x+2)^{[x]} = 3 =$ غ م

إيجاد الثوابت من خلال وجود نهاية دالة عند نقطة

(1) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} x^2+a & , x\le -1 \\ 2x-b & , x>-1 \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ فأوجد كلا من الثابتين a,b

$x^2+a \quad , \quad 2x-b$ (-1)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=2$$

$$(-1)^2+a=2$$

$$1+a=2$$

$$a=2-1=1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=2$$

$$2(-1)-b=2$$

$$-2-b=2$$

$$b=-2-2=-4$$

(2) إذا كانت: $f(x)=\begin{cases} \log_2 x & , 0<x\le 8 \\ 3^{a-3} & , x>8 \end{cases}$ فأوجد قيمة a حيث $\lim\limits_{x\to 8} g(x)$ موجودة

$log_2x \quad , \quad 3^{a-3}$ (0, 8)

$$\lim_{x\to 8^+} f(x)=\lim_{x\to 8^-} f(x)$$

$$log_2 8=3^{a-3}$$

$$log_2 2^3=3^{a-3}$$

$$3=3^{a-3}$$

$$1=a-3 \to a=4$$

(3) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} a^2x+4 & , x\ge 1 \\ 4a & , x<1 \end{cases}$ فأوجد قيم a حيث $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ موجودة

$4a \quad , \quad a^2x+4$ (1)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$4a=a^2x+4$$

$$4a=a^2(1)+4 \to \ a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0$$

$$a=2$$

(1) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} ax^2-3 & ,x<2 \\ 3x-b & ,x>2 \end{cases}$

وكانت: $\lim_{x\to -3} g(x)=6$ ، $\lim_{x\to 3} g(x)=4$ فاوجد كلا من الثابتين a,b ؟ ثم اوجد $\lim_{x\to 2} g(x)$.

$$ax^2-3 \;,\; 3x-b \quad (2)$$

$$\lim_{x\to -3} g(x)=6$$

$$a(3)^2-3=6$$

$$9a=9$$

$$a=1$$

$$\lim_{x\to 3} g(x)=2 \to 3(3)-b=4$$

$$9-b=4$$

$$b=9-4=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x)=3(2)-5=1\;,\;\lim_{x\to 2^-} g(x)=1(2)^2-3=1 \to \lim_{x\to 2} g(x)=1$$

(2) إذا كانت: $g(x)=\begin{cases} x+a & ,x\geq b \\ 5x-7a & ,x<b \end{cases}$

وكانت: $\lim_{x\to b} g(x)=3$ فاوجد كلا من الثابتين a,b

$$5x-7a \;,\; x+a \quad (b)$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to b^+} f(x)=6$$

$$5b-7a=3\ldots(1) \qquad b+a=3\ldots..(2)$$

$$5b-7a=3$$

$$7(b+a=3)$$

$$12b=24 \;\to b=2 \quad \to a=1$$

(3) لتكن: $f(x)=\begin{cases} 2ax-5 & ,x<2 \\ \dfrac{x-3}{|x-3|} & ,x>2 \end{cases}$ فما قيمة a التي تجعل $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة.

$$2ax-5 \;,\; \frac{x-3}{|x-3|} \quad (2)$$

$$\lim_{x\to b^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)$$

$$2a(2)-5=\frac{2-3}{|2-3|}=-1$$

$$4a=5-1=4\to a=1$$

(5) الجذر والمرافق:

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ = 0

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ غ م

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ غ م

$-(x-5)\ ,\quad x-5$

2

ملاحظة

$\sqrt{x^2}=|x|$

(4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{-(x-5)}{x-5}=-1$

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$ غ م $\qquad \lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)}{x-5}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{1-x^2}$ $=\sqrt[3]{1-9}=-2$

(6) $\lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{25-x^2}$ غ م

$25-x^2$ $\quad$ - - - $\quad$ ++++ $\quad$ - - -

-5 $\quad$ 5

(7) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x-[x]}$ $=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x-0}=1$

(8) $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-[x]}$ $=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$

تذكر أن :

$\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, $(\sqrt{x})^2 = x$, $\sqrt[3]{x^3} = x$

$|x|$: $-x$, x (0)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{x}^2+1)}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|\sqrt{\boldsymbol{x}^2+1}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\boldsymbol{x}}{-\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}^2+1}} = -1$$

(2) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

مساعدة:اكمل المربع

$|x-1|$: $-(x-1)$, $x-1$ (1)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{x}-1}{\sqrt{(\boldsymbol{x}-1)^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{x}-1}{|\boldsymbol{x}-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\boldsymbol{x}-1}{-(\boldsymbol{x}-1)} = -1$$

(3) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2+2x}$ غ م

$+ + + +$, $- - - - -$, $+ + + +$ (-2, 0)

(4) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2+2x} = 0$

المرافق:

ملاحظة: مرافق المقدار الجبري $\sqrt{x}-\sqrt{a}$ هو $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ ويكون حاصل ضربهم هو $x-a$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}= \quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}= \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x+1-4}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3x-3}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3}{4}$$

(3) $\lim_{x\to5}\frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}= \quad \lim_{x\to5}\frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{4-(x-1)}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{4-x+1}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{5-x}=$$

$$\lim_{x\to5}-\left(2+\sqrt{x-1}\right)=-4$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

$$(1)\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(2)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{2x-1}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}\times\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2x-1-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2}=\frac{3(2)}{2}=3$$

$$(3)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}x\left(\sqrt{x}+1\right)=2$$

$$(4)\ \lim_{x\to9}\frac{x\sqrt{x}-27}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{x\sqrt{x}-27}{x-9}\times\frac{x\sqrt{x}+27}{x\sqrt{x}+27}$$

$$\lim_{x\to9}\frac{x.x^2-729}{(x-9)\left(x\sqrt{x}+27\right)}=\lim_{x\to9}\frac{x^3-729}{(x-9)\left(x\sqrt{x}+27\right)}$$

$$\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(x^2+9x+81)}{(x-9)\left(x\sqrt{x}+27\right)}=\lim_{x\to9}\frac{x^2+9x+81}{\left(x\sqrt{x}+27\right)}=\frac{243}{54}=\frac{9}{2}$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

$$(1)\quad \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}= \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2+5-9}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)}=\frac{\sqrt{9}+3}{-4}=\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}$$

$$(2)\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}\times\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{(1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{(1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{(1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$(3)\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+2\right)=3$$

$$(4)\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}==\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}\right)}{x}.\frac{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{((1-x)-(x+1))}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x-x-1}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-2}{2}=-1$$

(1) لتكن $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ موجودة فاوجد قيمة a .

$$= \lim_{x\to1}\sqrt{x-a}-3=0$$

$$\sqrt{1-a}-3=0$$

$$\sqrt{1-a}=3$$

$$1-a=9$$

$$a=1-9=-8$$

(2) لتكن $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+1}-\sqrt{2x+1}}{x}=4$ فاوجد قيمة a .

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{ax+1}-\sqrt{2x+1}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(ax+1)-(2x+1)}{x\left(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}\right)}=4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax+1-2x-1}{x\left(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}\right)}=4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(a-2)}{x\left(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}\right)}=4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(a-2)}{\left(\sqrt{ax+1}+\sqrt{2x+1}\right)}=4$$

$$=\frac{a-2}{1+1}=4\to a-2=8\quad\to a=10$$

(6) نهاية الدوال الدائرية :

تذكر ان:

Quotient Identities

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Reciprocal Identities

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Pythagorean Identities

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Sum Identities
Addition Formulas

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

Difference Identities
Subtraction Formulas

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

Double Angle Formulas

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Co-function Identities

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

Even-Odd Identities

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

Half-Angle Formulas

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

Sum-to-Product Formulas

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Product-to-Sum Formulas

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

نظرية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\,x)}{b\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a\,x)}{b\,x}=\frac{\sin(a\,x)}{\tan b\,x}=\frac{\tan(a\,x)}{\sin b\,x}=\frac{a}{b}\quad b\neq 0$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}(\sin x+\cos x)=\quad sin\frac{\pi}{3}+cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(x\tan x)=\frac{\pi}{4}\ tan\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}=\quad \frac{0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=1$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\quad \frac{3}{2}$

(5) $\lim_{x\to 0^-}\frac{6\sin 3x}{5|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{6\sin 3x}{-5x}=\frac{(6)(3)}{-5}=\frac{-18}{5}$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{2x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin6x}{2x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos3x}=\frac{6}{2}.\frac{1}{\cos 0}=3$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن):

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \frac{5}{2}.\frac{5}{1} = \frac{25}{2}$

(2) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 3x}{3x|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 3x}{2x.(-x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{-2x}.\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{x} = \frac{3}{-2}.\frac{3}{1} = -\frac{9}{2}$

(3) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x[x]} = \lim_{x\to 0^-}\frac{sin2x}{x\ [x]} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x(-1)}.\lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin 2x}{x} = -2$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{xsin5x}{x^2}}{\frac{sin^2 3x}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{1}.\frac{3}{1}} = \frac{5}{9}$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x+\tan 3x}{x}=$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{2xsinx}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x}=2\sin 0+\frac{3}{1}=3$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\ \cos x}{x^2+x}=$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx\ cosx}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx}{x}.\lim\limits_{x\to0}\frac{cosx}{x+1}=(1).\frac{\cos 0}{0+1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(x^2+x)\csc 2x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{sin2x}{x(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{sin2x}{x}.\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=\frac{2}{1}.(1)=2$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x+\tan x}{4x-\sin x}=$ قسمة كل حد على x مع وجود النهاية

$$\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{sin2x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{tanx}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx}{x}}=\frac{\frac{2}{1}+1}{4-1}=\frac{3}{3}=1$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x+x^2\tan 2x}{x^2+4x\tan x}=$ قسمة كل حد على x^2 مع وجود النهاية

$$\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^2 3x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2tan2x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\frac{4xtanx}{x^2}}=\frac{\left(\frac{3}{1}\right)^2+\lim\limits_{x\to0}tan2x}{1-4\lim\limits_{x\to0}\frac{tan2x}{x}}=\frac{9+tan0}{1-2}=-9$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to 0}(\tan 2x \csc \pi x) =$

قسمة كل حد على x مع وجود النهاية

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{sin\pi x} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{tan2x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{sin\pi x}{x}} = \frac{\frac{2}{1}}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

(2) $\lim_{x\to 0^-}[x](x\cot 2x) =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-1)x}{tan2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{tan2x} = \frac{-1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|} - 2[x-2]$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{sinx}{-x} - 2(-3) = -1 + 6 = 5$$

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{3}{x}\right)\sin x =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{tanx} - \lim_{x\to 0}\frac{3sinx}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x}} - 3 = 1 - 3 = -2$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\csc \pi x \ \ \sin 5x + \tan x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{sin\pi x} + \lim_{x\to 0} tanx = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\pi x}{x}} - \tan 0 = \frac{5}{\pi} - 0 = \frac{5}{\pi}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2 \csc 3x \cot 2x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{sin3xtan2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{tan2x} = \frac{3}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - x^3 \cot x}{x\cot x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{xcotx} - \lim_{x\to 0}\frac{x^3cotx}{xcotx} = \lim_{x\to 0} cosx \,.\lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x} - \lim_{x\to 0}\ x^2 = \cos 0\ (1) - 0 = 1$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

$$(1)\quad \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{\sin 2x}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{sin2x}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{sin2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{sin2x}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{sin2x}+\sqrt{x}}{sin2x-x}=\frac{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\sqrt{sin2x}+\sqrt{x}}{x}}{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{sin2x}{x}-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}}=\frac{0}{2-1}=0$$

$$(2)\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\sqrt{1+x}}=\quad \lim_{x\to0}\frac{sinx}{1-\sqrt{1+x}}\times\frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{sinx\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(1-\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{sinx}{-x}.\lim_{x\to0}\left(1+\sqrt{1+x}\right)=(-1)(2)=-2$$

$$(3)\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{cos^2x}{1-sinx}\times\frac{1+sinx}{1+sinx}=\lim_{x\to0}\frac{cos^2x(1+sinx)}{1-sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{cos^2x(1+sinx)}{cos^2x}=\lim_{x\to0}(1+sinx)=1+\sin 0=1+0=1$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}\times\frac{1+cosx}{1+cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{x^2(1+cosx)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2}\,.\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+cosx)} = 1^2.{}^1\!/_2 = \frac{1}{2}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0^-}(2x\sqrt{1+\cot^2 x}) = \lim_{x\to 0^-}\frac{2x\sqrt{csc^2x}}{1} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{sinx} = -2$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{cosx}{sinx}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sinx}.\frac{1+cosx}{1+cosx} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{cosx}{sinx}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sinx(1+cosx)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sinx(1+cosx)} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{(1+cosx)} = \frac{0}{1+1} = 0$$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن أمكن).

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2x-2} = = \lim_{x\to1}\frac{sin(x-1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$

ملاحظة:

إذا كان $f(0)=0$ فإن

$$\lim_{f(x)\to0}\frac{sin\big(f(x)\big)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x)\to0}\frac{tan\big(f(x)\big)}{f(x)} = 1$$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{sin(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$

$\lim_{x\to2}\frac{sin(x-2)}{(x-2)}.\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2} = (1).\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \equiv \lim_{x^2\to4}\frac{sin(x^2-4)}{(x^2-4)} = 1$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} - 1$

(5) $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{sinx}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{sinx}{x}.\lim_{x\to0^+}\sqrt{x} = 1\ (0) = 0$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x^2}{3x} = \lim_{x\to0}\frac{sin2x^2}{3x}.\frac{x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{sin2x^2}{3x^2}.\lim_{x\to0}x = \frac{2}{3}.(0) = 0$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(tanx)}{2x}.\frac{tanx}{tanx} = \lim_{tanx\to0}\frac{\sin(tanx)}{tanx}.\lim_{tanx\to0}\frac{tanx}{2x} = 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(1) إذا كانت: $\lim_{x\to1^+}\frac{|x+1|-2}{x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin kx}$ فاوجد قيمة k.

$|x+1|$: $-(x+1)$, $(x+1)$; -1

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x+1-2}{x(x-1)}=\frac{5}{k}\ \to\ \lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{(x-1)}.\frac{1}{x}=\frac{5}{k}$$

$$1=\frac{5}{k}\quad\to\quad k=5$$

(2) إذا كانت: $\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{x}=\lim_{x\to k}4^x$ فاوجد قيمة k.

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^2x+2sinxcosx+cos^2x-1}{x}=4^k$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+2sinxcosx-1}{x}=4^k$$

$$\lim_{x\to0}\frac{sin2x}{x}=4^k\ \to 2=2^{2k}\quad\to\quad 2k=1\quad\to k=\frac{1}{2}$$

(3) إذا كانت: $\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\sin^2x}}{x}=\lim_{x\to3^-}a[x]$ فاوجد قيمة a.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|sinx|}{x}=\lim_{x\to3^-}a(2)$$

$$-1=2a\ \to\quad a=\frac{-1}{2}$$

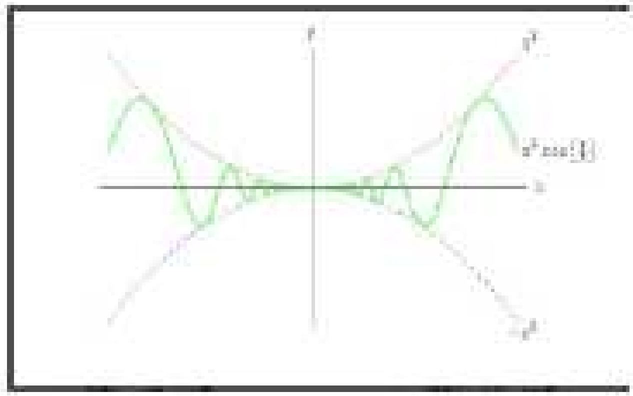
(نظرية الشطيرة)

إذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل $x = c$ في فترة حول c

وكان $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = l$

فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

اوجد قيمة كل من النهايات الآتية باستخدام نظرية الشطيرة:



(1) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} =$

نعلم ان $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

$$-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x} \le x^2$$

نأخذ النهاية $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 \le \lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} \le \lim\limits_{x \to 0} x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (5 + x^2 \cos\frac{1}{x^2}) =$

نعلم ان $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

$$-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x^2} \le x^2$$

$$5 - x^2 \le 5 + x^2 \cos\frac{1}{x^2} \le 5 + x^2$$

نأخذ النهاية $\lim\limits_{x \to 0} 5 - x^2 \le \lim\limits_{x \to 0} 5 + x^2 \cos\frac{1}{x^2} \le 5 + \lim\limits_{x \to 0} x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 5 - x^2 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0} 5 + x^2 = 5 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 0} 5 + x^2 \cos\frac{1}{x^2} = 5$$

(1) لتكن: $h(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ استخدم نظرية الشطيرة في إيجاد : $\lim_{x\to0^+} h(x)$

نعلم ان $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$

$$-\sqrt{x} \le \sqrt{x}sin\frac{1}{x} \le \sqrt{x}$$

نأخذ النهاية $\lim_{x\to0^+} -\sqrt{x} \le \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^+} -\sqrt{x} = 0\\ \lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0\end{array}\right\} \to \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}sin\frac{1}{x} = 0$$

(2) استخدم نظرية الشطيرة في إيجاد $\lim_{x\to0}(\cos^2 x + x^2 \sin\frac{1}{x})$

نعلم ان $-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$

$$-x^2 \le x^2sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$cos^2x - x^2 \le cos^2x + x^2sin\frac{1}{x} \le cos\,x^2 + x^2$$

بأخذ النهاية $cos^2x - x^2 \le cos^2x + x^2sin\frac{1}{x} \le cos\,x^2 + x^2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0} cos^2x - x^2 = 1\\ \lim_{x\to0} cos^2x + x^2 = 1\end{array}\right\} \to \lim_{x\to0} cos^2x + x^2sin\frac{1}{x}x^2cos\frac{1}{x^2} = 1$$

(1) أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث: $\frac{2\sin x - x}{x+\tan 2x} \le f(x) \le \frac{x^2+x}{3x}$

$$\frac{2sinx - x}{x + tan2x} \le f(x) \le \frac{x^2 + x}{3x}$$ بأخذ النهاية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2sinx}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{tan2x}{x}} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}}{\frac{3x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{3} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3} \quad \to \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$$

(2) أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث: $\frac{2x^2 - x^3}{2} \le x^2 f(x) \le \frac{x^2+\sin^2 x}{2+3x^2}$

$$\frac{2x^2 - x^3}{2} \le x^2 f(x) \le \frac{x^2 + sin^2x}{2 + 3x^2}$$ بالقسمة على x^2

$$\frac{x^2(2-x)}{2x^2} \le \frac{x^2 f(x)}{x^2} \le \frac{\frac{x^2 + sin^2x}{2+3x^2}}{x^2}$$ بالقسمة على x^2 يكون

$$\frac{2-x}{2} \le f(x) \le \frac{x^2 + sin^2x}{x^2(2+3x^2)}$$ بأخذ النهاية

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x}{2} = 1 \quad , \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{sin^2x}{x^2}}{\frac{x^2(2+3x^2)}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \left(\frac{sinx}{x}\right)^2}{(2+3x^2)} = \frac{1+1}{2+0} = 1 \quad \to \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

(1) استخدام نظرية الشطيرة اوجد $\lim_{x\to 3} g(x)$ حيث $|g(x)+4| \le 2(3-x)^4$

$$-2(3-x)^4 \le g(x)+4 \ \le 2(3-x)^4$$

$$-2(3-x)^4 \le g(x)+4 \ \le 2(3-x)^4 \qquad 4 \text{ بطرح}$$

$$-2(3-x)^4-4 \le g(x) \ \le 2(3-x)^4-4 \quad \text{بأخذ النهاية}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3} -2(3-x)^4-4=-4 \\ \lim\limits_{x\to 3} 2(3-x)^4-4=-4 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0} g(x)=-4$$

(2) اذا كانت : $|g(x)| \le M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim_{x\to 0} x^2\, g(x)=0$

$$-M \le g(x) \le M$$

$$-Mx^2 \le x^2 g(x) \le Mx^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} -Mx^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} Mx^2=0 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 0} x^2 g(x)=0$$

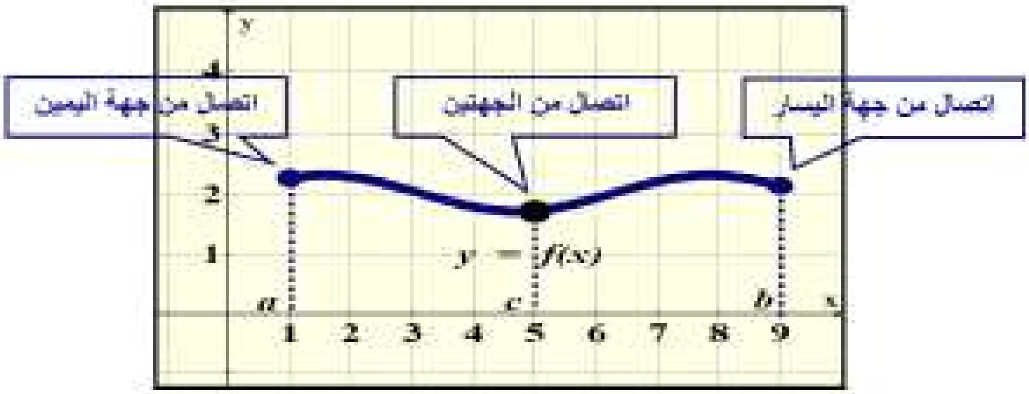
الاتصال عند نقطة:

نقطة داخلية: تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة داخلية c في مجالها اذا كانت

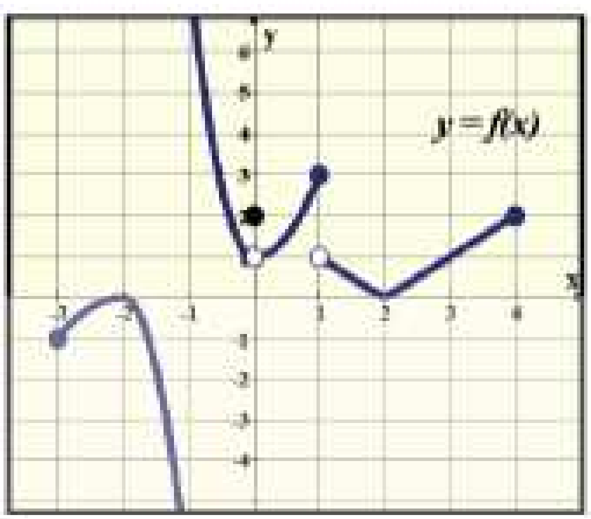
$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

نقطة طرفية: تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة طرفية a لها نهاية من جهة اليمين اونقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار اذا كان

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad , \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$



أوجد النقاط التي عندها منحنى الدالة $f(x)$ متصل والنقاط الأخرى التي عندها منحنى الدالة $f(x)$ غير متصل



الدالة $f(x)$ غير متصلة عند

$-3\,,-1\,,0\,,1\,,4$

اكتب فترة اتصال الدالة

$[-3\,,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1\,,4]$

إي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x = 1$ مع ذكر السبب :

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & , x<1 \\ 2-x & , x>1 \end{cases}$$

x^2 | 2-x
1

الدالة غير متصلة عند
$x = 1$ لان الدالة غير
معرفة عندها .

تذكر

شروط الاتصال عند $x=c$

(1) الدالة معرفة عند $x=c$

(2) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

$$(2)\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

الدالة غير متصلة عند
$x = 1$ لان الدالة غير
معرفة عندها (خارج المجال).

$$(3)\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , x\neq 1 \\ 3 & , x=1 \end{cases}$$

1) $f(1) = 3$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

$\dfrac{x^2-1}{x-1}$ | $\dfrac{x^2-1}{x-1}$
1

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

الدالة غير متصلة عند$x = 1$

$$(4)\quad f(x)=[x]$$

$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}[x] = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}[x] = 0$ $\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}[x]$ غ م

استنتج جميع النقاط التي عندها الدالة غير متصلة

كل الأعداد الصحيحة

إي من الدوال التالية تكون متصلة عند $x=1$ مع ذكر السبب

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}5x & ,x<1\\ 5 & ,x=1\\ 6-x & ,x>1\end{cases}$$

$5x \quad \boxed{5} \quad 6-x$

1

$$f(1)=5,\ \lim_{x\to1^-}f(x)=5\ ,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=5\ \to \lim_{x\to1}f(x)=5$$

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=5$ الدالة متصلة

$$(2)\quad f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

$f(1)=0,\ \lim_{x\to1}\sqrt[3]{x-1}=0\ ,\ \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ الدالة متصلة عند $x=1$

$$(3)\quad f(x)=|x-1|$$

1) $f(1)=0$

2) $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^+}|x-1|=\lim_{x\to1^+}(x-1)=0\\ \lim_{x\to1^-}|x-1|=\lim_{x\to1^+}-(x-1)=0\end{array}\right\}\to \lim_{x\to1}|x-1|=f(1)$$

الدالة غير متصلة عند$x=1$

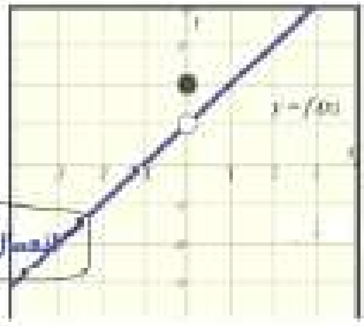
$$(4)\quad f(x)=\frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

الدالة غير معرفة عند $x=1$

أنواع نقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

اولاً) يمكن التخلص منه (الفجوة)



التهاية موجودة

ولكن لا تساوي الصورة

ثانيا) لا يمكن التخلص منه وهو ثلاث انواع

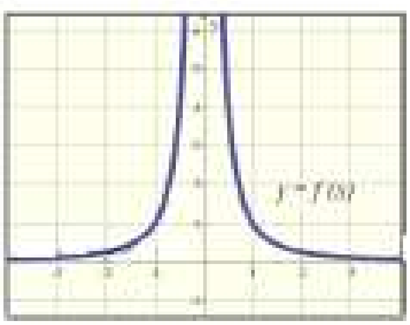
(1) القفزة

النهاية غير موجودة

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

وكلاهم عدد حقيقي

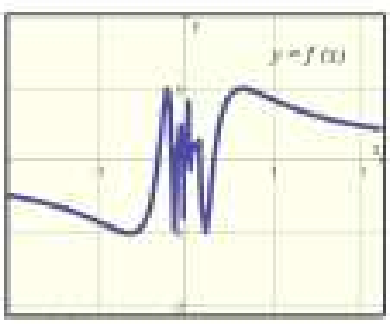
(2) لانهائي



النهاية غير موجودة

احدى النهايتين تساوي مالانهاية او كلاهم

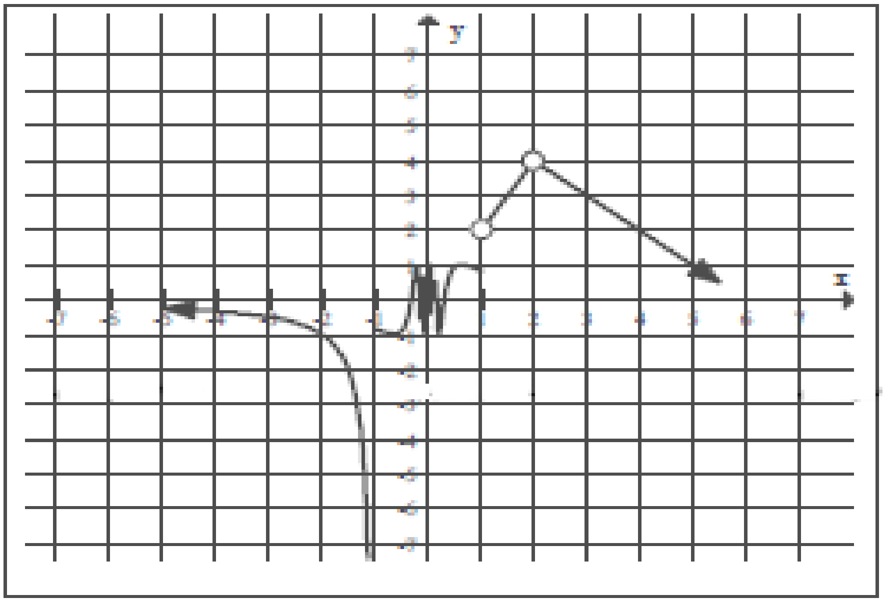
(3) تذبذب



النهاية غير موجودة

الدالة تتذبذب عند نقطة الانفصال

(1) في الشكل المجاور اوجد نقاط انفصال الدالة . ثم حدد نوع كل منها:



(2) استعن بالجدول التالي:

نقطة انفصال الدالة	نوع الانفصال	السبب
X =-1	لا نهائي	$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$
X = 0	تذبذبي	الدالة تتذبذب كثير عندما X من الصفر
X =1	قفزة	$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$
X = 2	قفزة	الدالة غير معرفة

عند X=2

ملاحظات مهمة

اولاً: الدوال المتصلة على مجالها

(1) كثيرات الحدود

(2) الدوال المثلثية

(3) الدوال الاسية

(4) الدوال الجذرية

(5) الدوال اللوغارتمية

(6) الدوال النسبية

(7) دوال المطلق

ثانياً: الدوال المتصلة على جزء من مجالها

(1) دالة الصحيح

ثالثاً: العمليات على الدوال المتصلة

(1) حاصل جمع وطرح وضرب وتركيب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

(2) حاصل قسمة دالتين متصلتين هي دالة متصلة بشرط ان المقام لا يساوي صفر

(3) حاصل تركيب دالتين متصلتين هي دالة متصلة

رابعاً: اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فان

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

أكمل الجدول التالي:

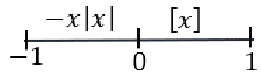
سبب الانفصال	نوع الانفصال عند $x = 0$	الدالة
التذبذب اللانهائي للدالة	تذبذبي	$f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$
$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$	لا نهائي	$g(x) = \frac{1}{x}$
$\lim_{x \to 0^-} L(x) = 0^0 - 5 = -5$ $\lim_{x \to 0^+} L(x) = 0 + cos0 = 1$	قفزة	$L(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \geq 0 \\ x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to 0} N(x) = \sqrt{0+4} = 2$ $N(0) \neq \lim_{x \to 0} N(0)$	فجوة	$N(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$

اكمل الجدول التالي

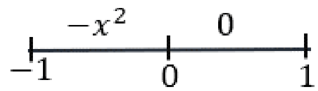
نوع الانفصال	نقاط الانفصال	الدالة
فجوة	X = 3	(1) $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ $\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=2\ \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=2$,
فجوة	X = 0	(2) $f(x)=\frac{\sin 5x}{x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}=5$
قفزة	X = 1	(3) $f(x)=\begin{cases}3-x & ,x>1\\ x^2 & ,x\le 1\end{cases}$ $\lim_{x\to 1^-}f(x)=2, \lim_{x\to 1^+}f(x)=1$
لا نهائي	X = 3	(4) $f(x)=\frac{2}{x-3}$
قفزة	X = 0	(5) $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$ $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{x}=-1, \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x}=1$
فجوة لا نهائي	X = 5 X = -3	(6) $f(x)=\frac{x-5}{x^2-2x-15}$ $\frac{x-5}{(x-5)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$
فجوة لا نهائي	X = 2 X = 3	(7) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+2}{x-3}$

اوجد نقاط الانفصال للدالة . ثم حدد نوع كل منها :

(1) $f(x)=\begin{cases}[x] & ,-1\le x<0\\ x|x| & ,0\le x\le 1\end{cases}$

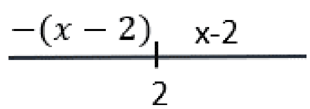


$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0\,, f(1) = 1$



نقاط الانفصال X = 1 فجوة

(2) $f(x)=\dfrac{|x-2|-1}{x-3}$



$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)-1}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3} = 1$$

نقاط الانفصال X = 3 فجوة

(3) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

نقاط الانفصال X = 0 تذبذبي

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\ne 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

$$-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1$$

بأخذ النهاية $-x^2 \le x^2 sin\dfrac{1}{x} \le x^2$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0\,, \lim_{x\to 0^-} -x^2 = 0 \to \lim_{x\to 0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$$

لا يوجد نقاط انفصال $f(0) = 0$

اوجد نقاط الانفصال للدالة . ثم حدد نوع كل منها:

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & ,x<1\\ x^2-2x+5 & ,x\geq 1\end{cases}$$

$\frac{1}{x-1}$ | x^2-2x+5

1

عند X =1 انفصال قفزة

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 4\,,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \to \lim_{x\to1} f(x) \text{غ م}$$

$$(2)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & ,x<3\\ x^2 & ,x\geq 3\end{cases}$$

$\frac{1}{x-2}$ | x^2

3

عند X =2 انفصال لانهائي

عند X =3 انفصال قفزة

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = 9\,,\ \lim_{x\to3^-} f(x) = 1 \to \lim_{x\to3} f(x) \text{غ م}$$

الاتصال على فترة:

تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت

(1) متصلة على كل نقطة في الفترة المفتوحة (a,b)

(2) متصلة عند النقطة a من جهة اليمين اي ان $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

(3) متصلة عند النقطة b من جهة اليسار اي ان $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

وتكون الدالة $y = f(x)$ متصلة على مجموعة الاعداد الحقيقة اذا كانت متصلة عند كل نقطة

أي من الدوال الآتية متصلة على الفترة $[0,1]$ ... فسر ذلك حيث:

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ غير متصلة على $[0,1]$ ولكنها متصلة على $(0,1]$

(2) $g(x) = [x]$ غير متصلة على $[0,1]$ ولكنها متصلة على $[0,)$

(3) $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$ غير متصلة على $[0,1]$ ولكنها متصلة على $[0,)$

(4) $f(x) = \begin{cases} 5 & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 12x - 1 & ,\frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ متصلة على $[0,1]$

(5) $f(x) = \sqrt{1-x}$ متصلة على $[0,1]$

أي من الدوال الآتية متصلة على مجالها فسر ذلك   حيث:

(1) $f(x)=x^2+5x-1 \quad ,x\in[1,2]$

فترة الاتصال $[1,2]$

(2) $f(x)=\sqrt{x-1} \quad ,x\in[1,\infty)$

فترة الاتصال $[1,\infty)$

(3) $f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$

فترة الاتصال $(-\infty,\infty)$

(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2 \\ 2 & ,x=2 \end{cases}$

فترة الاتصال $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$

فترة الاتصال $R /\{0\}$

(2) $f(x) = \tan x$

فترة الاتصال $R / \left\{\frac{-\pi}{2} + n\pi , \frac{-\pi}{2} + n\pi\right\}$

(3) $f(x) = ln(x-2)$

فترة الاتصال $(\mathbf{2}, \infty)$

$\boldsymbol{x - 2 > 0 \rightarrow x > 2}$

(4) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

فترة الاتصال R

(5) $f(x) = \sin^{-1} x$

فترة الاتصال $[-1, 1]$

(6) $f(x) = \begin{cases} [x] & , 1 \le x < 3 \\ x^2 - 6 & , x \ge 3 \end{cases}$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

إشارة $4-x^2$

$$\begin{array}{ccccc} - - - & & + + + + & & - - - \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$$

فترة الاتصال $[-2,2]$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

إشارة x^2-4x

$$\begin{array}{ccccc} + + + + & & - - - - - & & + + + \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$$

فترة الاتصال $(-\infty,0] \cup [4,\infty)$

(3) $f(x)=(x-1)^{\frac{3}{2}}+e^x$

$$x-2>0 \to x>2$$

فترة الاتصال $(2,\infty)$

(4) $f(x)=\ln(x^2-4)$

إشارة x^2-4

$$\begin{array}{ccccc} + + + & & - - - - - & & + + + \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$$

فترة الاتصال $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(5) $f(x)=\ln(x^2-x-6)$

إشارة x^2-x-6

$$\begin{array}{ccccc} + + + & & - - - - - & & + + + \\ \hline & -2 & & 3 & \end{array}$$

فترة الاتصال $(-\infty,-2) \cup (3,\infty)$

(6) $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{5-x}}$

إشارة $x-2$

$$\begin{array}{ccc} - - - - - & & + + + + + + + + \\ \hline & 2 & \end{array}$$

إشارة $5-x$

$$\begin{array}{ccc} - - - - - - - - - - - & & + + \\ \hline & 5 & \end{array}$$

فترة الاتصال $(5,\infty)$

حدد الفترة التي تكون فيها الدالة متصلة:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^{x}-1}$

أصفار المقام

$e^x-1=0$

$e^x=1$

$x=0$

مجال البسط

$x>0=(0,\infty)$

فترة الاتصال $(0,\infty)$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

فترة الاتصال R

(3) $f(x)=\sin^{-1}(x-1)$

$-1\le x-1\le 1$

$0\le x\le 2$

فترة الاتصال $[0,2]$

(4) $f(x)=\tan^{-1}(2x+1)$

فترة الاتصال R

الدالة الموسعة (إزالة الفجوة):

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على مجال معين باستثناء عدد محدود من النقاط التي عندها انفصال يمكن التخلص منه فانه يمكن تعريف دالة جديدة متصلة على مجالها تسمى الدالة الموسعة وتعتمد على الدالة $f(x)$.

1) اكتب الدالة الموسعة للدالة : $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$ حتى تصبح متصلة عند $x=3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+2) = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-3} & ,x \neq 3 \\ 5 & ,x = 3 \end{cases}$$

2) اكتب الدالة الموسعة للدالة : $f(x)=\frac{\sin 2x-\tan x}{x}$ حتى تصبح متصلة عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin2x - tanx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x} = = 2 - 1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin2x - tanx}{x} & ,x \neq 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases}$$

اعد تعريف الدالة الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة لجميع قيم x.

(اكتب الدالة الممتدة او الموسعة).

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} \quad , x\neq 8$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3}=$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x+1-9}{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}\lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} & ,x\neq 8\\ 1/6 & ,x=8\end{cases}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^2-1} \quad , x\neq \pm 1$

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{1-x^4}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm 1}\frac{(-1)(1+x^2)}{1}=-2$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^4}{x^2-1} & ,x\neq \pm 1\\ -2 & ,x=\pm 1\end{cases}$$

اعد تعريف كل من الدوال الآتية عند النقطة المشار إليها لتصبح الدالة متصلة لجميع قيم x

(اوجد الدالة الممتدة او الموسعة).

(1) $f(x)=\dfrac{|x-2|-1}{x-3} \qquad x\neq 3$

$$-(x-2) \quad \Big| \quad x-2$$
$$2$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{|x-2|-1}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)-1}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|-1}{x-3} & ,x\neq 3\\ 1 & ,x=3\end{cases}$$

(2) $f(x)=\dfrac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} \qquad x\neq -3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\frac{3+x}{3x}} = \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{1}\cdot\frac{3x}{3+x} = \lim_{x\to -3}3x = -9$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} & ,x\neq -3\\ -9 & ,x=-3\end{cases}$$

(1) اكتب الدالة الموسعة للدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin x}$ حتى تصبح متصلة عند $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{sinx} & ,x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & ,x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{sinx}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{x+4-4}{sinx\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

(2) اكتب الدالة الموسعة للدالة $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$ حتى تصبح متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}(e^x+1)=2$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1} & ,x\neq 0\\ 2 & ,x=0\end{cases}$$

(3) لتكن: $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-2x}$

(أ) اوجد نقاط انفصال الدالة وحدد نوعها:

نقاط الانفصال (أصفار المقام)

$x-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0\,,x=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-4)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$$

نوع انفصال عند X =0ونوعها فجوة

$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-4)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

نوع انفصال عند2 = Xونوعها فجوة

(ب) اكتب الدالة الموسعة للدالة $f(x)$ حتى تصبح متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x}{x^2-2x} & ,x\neq 0\,,4\\ 2 & ,x=0\\ 4\,, & ,x=2\end{cases}$$

إيجاد الثوابت من خلال تعريف الاتصال

(1) اوجد قيمة الثابت a لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-2 & , \ x<2 \\ a & , \ x\geq 2 \end{cases}$$

من الاتصال عند $x = 2$

$$\begin{array}{c|c} x^2+ax-2 & a \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2} \end{array}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$2^2+2a-2=a$$

$$4+2a-2=a$$

$$2a-a=2-4$$

$$a=-2$$

(2) ليكن: $G(x)=\begin{cases} ax+6 & , \ x>3 \\ bx^2-a & , \ x<3 \\ 9 & , \ x=3 \end{cases}$

دالة متصلة عند $x=3$ أوجد قيم الثوابت b , a .

$$\begin{array}{c|c|c} bx^2-a & \boxed{9} & ax+6 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{3} \end{array}$$

من الاتصال عند $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \qquad , \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

$$b(3)^2-a=9 \qquad , \qquad a(3)+6=9$$

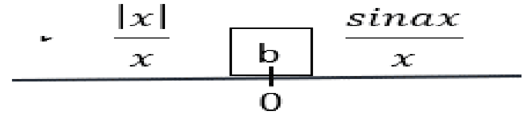
$$9b-a=9 \qquad , \qquad 3a=9-6=3$$

$$9b-1=9 \qquad , \qquad a=1$$

$$9b=9+1=10 \rightarrow \ b={}^{10}/_{9}$$

(1) أوجد كلاً من a , b لتكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x} & ,x>0\\ b & ,x=0\\ \dfrac{|x|}{x} & ,x<0\end{cases}$$



من الاتصال عند $x=0$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=b$, $\lim_{x\to0^-}\dfrac{sinax}{x}=b$

$-1=b$, $a=b$

, $a=-1$

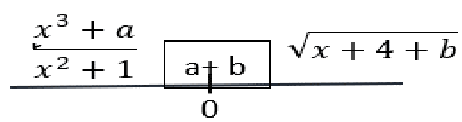
(2) ما قيم الثوابت a , b التي تجعل الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+a}{x^2+1} & ,x<0\\ a+b & ,x=0\\ \sqrt{x+4+b} & ,x>0\end{cases}$$

متصلة عند $x=0$

من الاتصال عند $x=0$

$\lim_{x\to-0^+} f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$



$\sqrt{0+4+b}=\ a+b$, $\dfrac{0+1}{0+1}=a+b$

$4+b=a^2+2ab+b^2$, $a+b=1\rightarrow a=1-b$

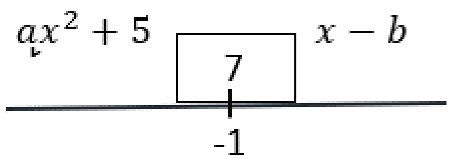
$4+b=(1-b)^2+2(1-b)b+b^2$,

$4+b=1-2b+b^2+2b-2b^2+b^2$,

$4+b=1\rightarrow b=1-4=-3$ $a=3$,

(1) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+5 & ,x>-1 \\ 7 & ,x=-1 \\ x-b & ,x<-1 \end{cases}$$



من الاتصال عند $x=-1$

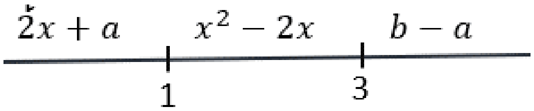
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=f(-1) \qquad , \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$$

$$a(-1)^2+5=7 \qquad ,-1-b=7$$

$$a=7-5=2 \qquad , \qquad b=-8$$

(2) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & ,x\le 1 \\ x^2-2x & ,1<x<3 \\ b-a & ,x\ge 3 \end{cases}$$



من الاتصال عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$2(1)+a=(1)^2-2(1)$$

$$a=1-2-2=-3$$

من الاتصال عند $x=3$

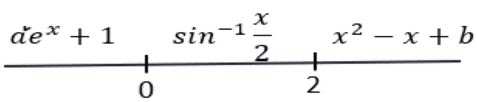
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$b-a=(3)^2-2(3)$$

$$b+3=3\to b=0$$

(3) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} ae^x+1 & ,x\le 0 \\ \sin^{-1}\frac{x}{2} & ,0<x<2 \\ x^2-x+b & ,x\ge 2 \end{cases}$$



من الاتصال عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$ae^0+1=\sin^{-1}0$$

$$a=0-1=-1$$

من الاتصال عند $x=2$

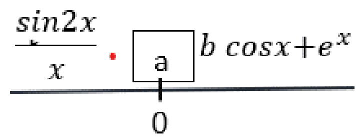
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\sin^{-1}1=2^2-2+b$$

$$\frac{\pi}{2}=2+b\to b=\frac{\pi}{2}-2$$

(1) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & ,x<0 \\ a & ,x=0 \\ b\cos x+e^{x} & ,x>0 \end{cases}$$



من الاتصال عند $x=0$

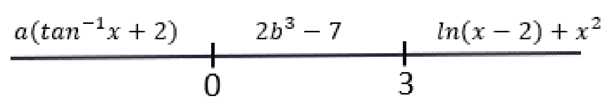
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0) \qquad , \qquad \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{sin2x}{x}=a \qquad , bcos\,(0)+e^{0}=a$

$a=2 \qquad , \qquad b+1=2\to b=1$

(2) اوجد قيمة الثوابت a ,b لتجعل الدالة $f(x)$ متصلة مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} a(\tan^{-1}x+2) & ,x<0 \\ 2b^{bx}+1 & ,0\le x\le 3 \\ \ln(x-2)+x^{2} & ,x>3 \end{cases}$$



من الاتصال عند $x=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$a(tan^{-1}0+2)=2b^{0}-7$

$2a=2-7=-5$

$a=-\dfrac{5}{2}$

من الاتصال عند $x=3$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$2b^{3}-7=\ln(3-2)+3^{2}$

$2b^{3}-7=\ln 1+9$

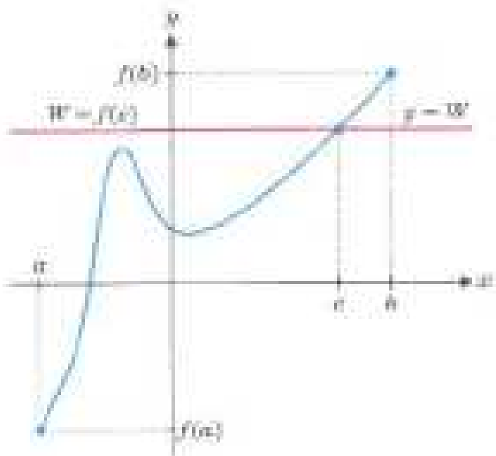
$2b^{3}=0+9+7=16$

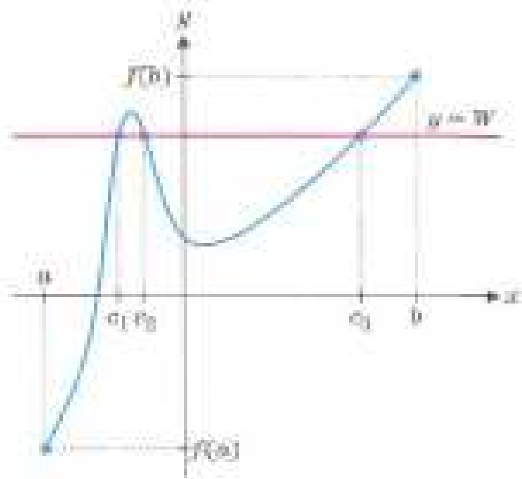
$b^{3}=8 \ \to b=2$

تطبيقات الدوال المتصلة

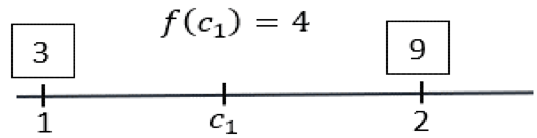
نظرية القيمة الوسيطية

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، وكانت W اي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فانه يوجد عدد على الاقل مثل c ينتمي الى الفترة $[a,b]$ بحيث $f(c)=W$



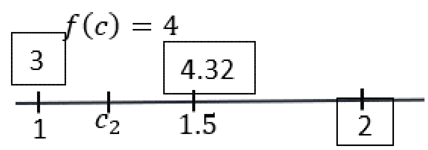


اذا كانت $f(x)=x^3-x+3$ دالة متصلة على الفترة $[1,2]$ فاوجد التقريب الثاني للعدد c والذي تنتمي الى الفترة ويحقق $f(c)=4$



التقريب الأول

$$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$



التقريب الثاني

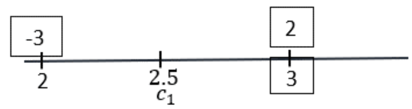
$$c_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a\,,b]$ ، وكانت $f(a)$ و $f(b)$ لهما اشارتان مختلفتان فانه يوجد عدد على الاقل مثل c ينتمي الى الفترة $[a\,,b]$ بحيث $f(c)=0$

(1) اذا كانت $f(x)=x^2-7$ دالة متصلة على الفترة $[2\,,3]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

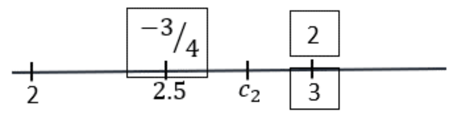
التقريب الأول

$$c_1=\frac{2+3}{2}=2.5$$



التقريب الثاني

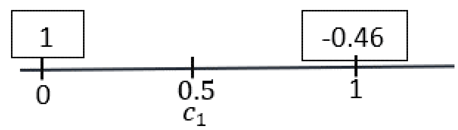
$$c_1=\frac{2.5+3}{2}=2.75$$



(2) اذا كانت $f(x)=\cos x-x$ دالة متصلة على الفترة $[0\,,1]$ فاوجد التقريب الثاني لجذر الدالة.

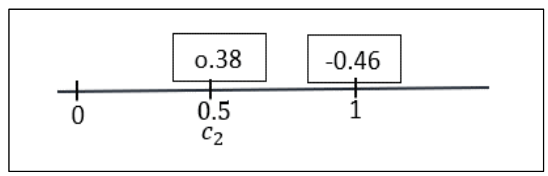
التقريب الأول

$$c_1=\frac{0+1}{2}=0.5$$



التقريب الثاني

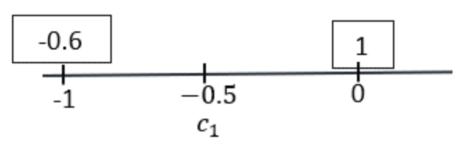
$$c_1=\frac{0.5+1}{2}=0.75$$



(3) اذا كانت $f(x)=e^x+x$ دالة متصلة على الفترة $[-1\,,0]$ فاوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة مقرباً لأقرب منزلتين عشريتين .

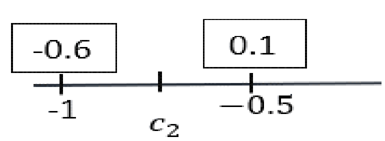
التقريب الأول

$$c_1=\frac{-1+0}{2}=-0.5$$



التقريب الثاني

$$c_1=\frac{-1+-0.5}{2}=-0.75$$



الوحدة الثانية: النهايات والاتصال///الدرس الخامس :النهايات التي تتضمن اللانهاية (خطوط التقارب)

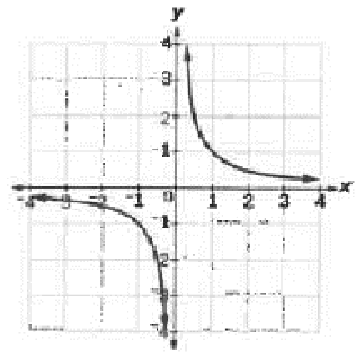
أولاً: نهاية الدالة عندما تساوي ما لانهاية:

ملاحظة:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

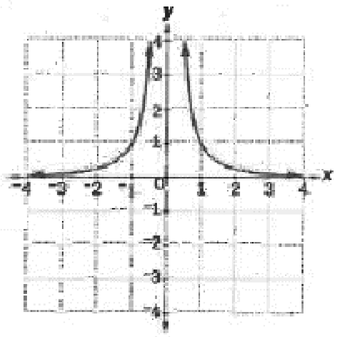
$$2)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ \boxed{\text{غير موجودة}}$$



ملاحظة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$



الكميات المعينة

$$\frac{a}{0}=\pm\infty \quad , \quad \frac{a}{\pm\infty}=0 \quad if \quad a\neq 0$$

$$\infty\pm a=\infty \quad , \quad \infty+\infty=\infty$$

$$a\times\infty=\pm\infty$$

$$a^0=1 \quad , \quad \infty^\infty=\infty$$

$$a^\infty=\infty \ \ if\ a>1 \quad , a^\infty=0 \ \ if\ 0<a<1$$

الكميات غير المعينة

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\infty-\infty$$

$$0\times\infty$$

$$0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to -1}\frac{1-x}{(x^2-1)^2} \qquad = -\infty$

(2) $\lim_{x\to -1^-}(x^2-2x-3)^{-2/3} = \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2-2(-1)-3}} = \infty$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{e^x}{x^2-4}$ غ م

+ + + +   - - - - - - - - -   + + + +

-2   2

(4) $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \quad = \infty$

+ + + +   - - - - - -

0

(5) $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} b^x = \begin{cases} \infty & ,b>1 \\ 0 & ,0<b<1 \end{cases}$$

(6) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ غ م

(7) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x \quad = \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{sinx}{cosx} - \infty$

+ + + +   - - - - - - -

$\frac{\pi}{2}$

(8) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x \qquad = \quad +\infty$

(9) $\lim_{x\to 0}\cot x \quad = \quad \lim_{x\to 0}\frac{cosx}{sinx}$ غ م

- - - - - - -   + + + +

o

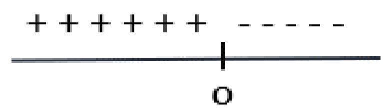
(10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sec^2 x \quad = \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{x}{cos^2x} = \ \infty$

+ + + +   + + + +

$\frac{\pi}{2}$

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} e^{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} e^{\frac{sinx}{cosc}} = e^{-\infty} = 0$

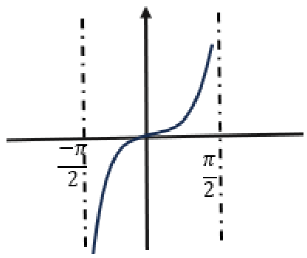


(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{-\tan x} = e^{\infty} = \infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln(x) = -\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln(x\sin x) = -\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \tan^{-1}(\ln x) = tan^{-1}(-\infty) = -tan^{-1}(\infty) =$



ثانيا : نهاية الدالة عند اللانهاية (خطوط التقارب الافقية)

اذا كانت الدالة : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ حيث عدد حقيق L فان للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي معادلته $y = L$

ملاحظات مهمة :

(1) اذا كانت k عدد حقيق لا يساوي صفر فان : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k = k$

(2) اذا كانت n عدد صحيح موجب فان : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ حيث k عدد حقيقي لا يساوي صفر

(3) اذا كانت n عدد صحيح موجب زوجي فان : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ,a>0 \\ -\infty & ,a<0 \end{cases}$

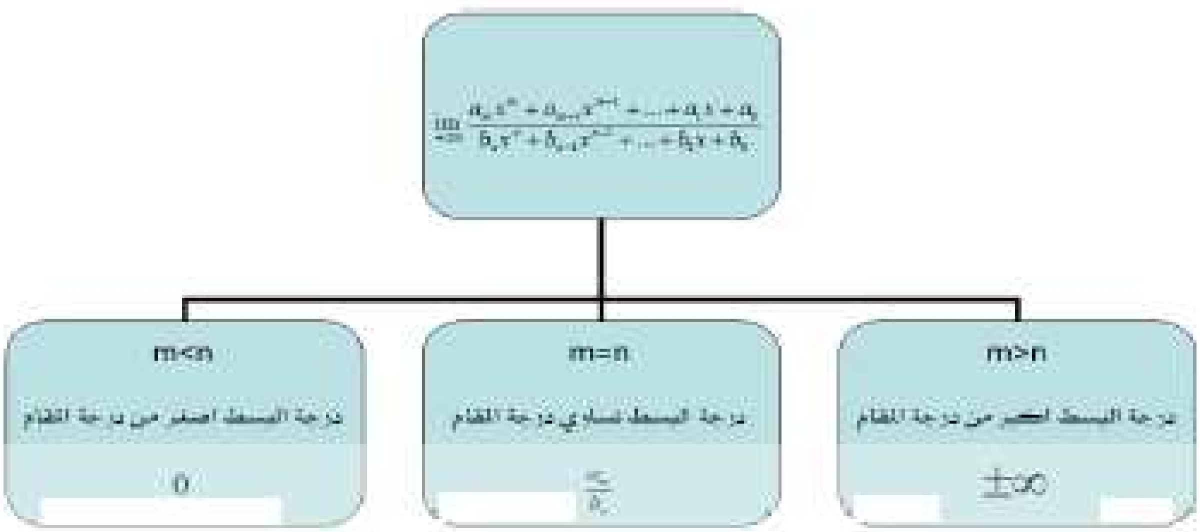
(4) اذا كانت n عدد صحيح موجب فردي فان :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ,a>0 \\ -\infty & ,a<0 \end{cases} \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & ,a>0 \\ \infty & ,a<0 \end{cases}$$

(5) اذا كانت $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود فان :

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

(6) نهاية الدالة النسبية تكون حسب القاعدة التالية او (نقسم كل من البسط والمقام على اعلى درجة في المقام)



اوجد قيمة كل مما ياتي

$$\lim_{x\to +\infty} b^x = \begin{cases} \infty & ,b>1 \\ 0 & ,0<b<1 \end{cases}$$

(1) $\lim_{x\to -\infty} 3x^2 - 5x + 3 \quad = \infty$

(2) $\lim_{x\to \infty} -x^7 - 5x^4 + 8 \quad = -\infty$

(3) $\lim_{x\to -\infty} x^4 - 5x^3 + 7 \quad = \infty$

(4) $\lim_{x\to \infty} e^x + x \quad = \infty$

(5) $\lim_{x\to \infty} 2^{-x} \quad = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0$

(6) $\lim_{x\to \infty} (0.8)^x \quad = 0$

(7) $\lim_{x\to -\infty} 5 - \frac{2}{x} \quad = 0$

(8) $\lim_{x\to \infty} x - \frac{3}{x} \quad = \infty$

(9) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x} \quad = \infty$

(10) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2} \quad = \lim_{x\to-\infty} |x| = \infty$

(11) $\lim_{x\to -\infty} (x-5)^{-2/3} \quad = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-5)^{2/3}} = 0$

(12) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3 + 4x - 5}{x^4 - 1} \quad = 0$

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-5x^2}{10x^2-5x+1} \qquad = \dfrac{-5}{10} = \dfrac{-1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4+x^5}{x^4+1} \qquad = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{2x} \qquad = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x}{2x^2+\cos x} \quad = \dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{2x+\sin x} \quad = \dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+4}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2\left(1+{}^{4}/_{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{|x|\sqrt{1+{}^{4}/_{x^2}}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{-x\sqrt{1+{}^{4}/_{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{1+{}^{4}/_{x^2}}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-5}\right) \quad = \ln(\infty) = \infty$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x^2-5}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to\infty} \ln(ex-2)-\ln(x+4) = \lim_{x\to\infty} ln\left(\frac{ex-2}{x+4}\right) = lne = 1$

(2) $\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1}x) = \lim_{x\to\infty} sin(tan^{-1}\infty) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

(3) $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}(\frac{x^2+1}{x+1}) =$

(7) $\lim_{x\to-\infty} e^{\cos(1/x)} = e^{1} = e.$

(8) $\lim_{x\to-\infty} 4\tan^{-1}(3x-1) = 4\ tan^{-1}(-\infty) = 4(\frac{-\pi}{2}) = -2\pi$

(9) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x = e^{-2}$

محمد عمر الخطيب

(4) $\lim_{x\to-\infty} e^{-1/(x^2+1)} = e^0 = 1$

(5) $\lim_{x\to-\infty} e^{(x+1)/(x^2+1)} = e^0 = 1$

(6) $\lim_{x\to-\infty} e^{\cos(1/x)} = e^1 = e$

(7) $\lim_{x\to-\infty} 4\tan^{-1}(3x-1) = 4tan^{-1}(-\infty) = 4\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2\pi$

(8) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x = e^{-2}$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a \quad a\neq 0$$

(9) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

اوجد قيمة كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{80x^{-0.3}+60}{2x^{-0.3}+5}$ $= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{80}{x^{0.3}}+60}{\frac{2}{x^{0.3}}+5}=\frac{60}{5}=12$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{300}{9(0.8)^{x}+1}$ $=\frac{300}{1}=300$

(3) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}-2x$ $= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)\times\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-2x+1-4x^2)}{\sqrt{x^2-2x+1}+2x}\ \lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+1}+2x}\quad = \lim_{x\to\infty}\frac{-2+{}^{1}\!/_{x}}{\sqrt{4-{}^{2}\!/_{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$ $= \lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

اوجد خطوط التقارب الافقية والرأسية والمائلة (ان وجدت)

$(1)\ f(x) = \frac{2}{x-3} + 1$

خطوط التقارب الرأسية (أصفار المقام)

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-3} + 1 = 1 \,,\, \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-3} + 1 = 1$$

$y = 1$ خطوط التقارب الأفقية

$(2)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

خطوط التقارب الرأسية (أصفار المقام)

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = 1$ خطوط التقارب الأفقية

$(3)\ f(x) = \frac{x}{x^2-x-6}$

خطوط التقارب الرأسية (أصفار المقام)

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \,,\, x = -2$$

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$y = 0$ خطوط التقارب الأفقية

اوجد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة (ان وجدت)

$$(1)\ f(x)=\frac{x^2+4x-2}{x+1}$$

لا توجد خطوط التقارب الأفقية

خطوط التقارب الرأسية (أصفار المقام)

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

	1	4	-2
-1		-1	-3
	1	3	-5

يوجد خط تقارب مائل

$$y=x+3$$

$$(2)\ f(x)=3\tan^{-1}x-2$$

خطوط التقارب الرأسية

لا يوجد

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x\to-\infty} 3\ tan^{-1}x=-\frac{3\pi}{2}\ ,\lim_{x\to\infty} 3\ tan^{-1}x=\frac{3\pi}{2}$$

$y=\ \pm\frac{3\pi}{2}$ خطوط التقارب الأفقية

$$(3)\ f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

خطوط التقارب الرأسية

لا يوجد

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+{}^{1}/_{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+{}^{1}/_{x^2}}}=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+{}^{1}/_{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1+{}^{1}/_{x^2}}}=2$$

$y=\ \pm 2$ خطوط التقارب الأفقية

(1) اذا كانت للدالة $f(x)=\dfrac{2}{x-a}-b$ خط تقارب رأسي معادلته $x=1$ وخط تقارب افقي معادلته $y=-3$ فاوجد قيمة الثوابت a,b

خط التقارب الرأسي

$$x = 1$$

$\leftarrow$ المقام يكون $x-1$

$$x - 1 = x - a$$

$$a = 1$$

أو نعوض في المقام $x = 2$

$$2 - a = 0 \rightarrow a = 0$$

خط التقارب الأفقي $y = -3$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-a} + b = -3$$

$$b = -3$$

(2) اذا كانت للدالة $f(x)=\dfrac{ax}{bx+1}$ خط تقارب رأسي معادلته $x=-2$ وخط تقارب افقي معادلته $y=-2$ فاوجد قيمة الثوابت a,b

خط التقارب الرأسي

نعوض بدل $x = -2$

في المقام فيكون صفراً

$$b(-2) + 6 = 0$$

$$-2b = -6$$

$$b = 3$$

خط التقارب الأفقي

$$y = \frac{a}{b} = -3$$

$$\frac{a}{3} = -3$$

$$a = -9$$

تمارين عامة على الوحدة الثانية

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{e^{x}-1}=$

(a) 2 (b) -2 (c) 1 (d) ∞

(2) $\lim_{x\to 0^-}\frac{3\sin x}{|x|}-[x]=$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) -4

(3) $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x =$

(a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) ∞

(4) $\lim_{x\to\infty}\sin(\tan^{-1}2x)=$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(6) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$

(a) 2 (b) -2 (c) e^2 (d) e^{-2}

(7) $\lim_{x\to 0^+}\ln(x^2+x)-\ln x$

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

(8) $\lim\limits_{x\to 3^{+}} e^{\ln\frac{x-3}{x^2-9}}$

(a) $\frac{-1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{-1}{9}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \sin^{-1}(\frac{x+1}{2})$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $-\frac{\pi}{6}$

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) 0

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}$

(a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) 0

(12) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)$

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 0

(13) $\lim\limits_{x\to 0^{-}} \frac{2x-|x|}{|x|-2x}$

(a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) 0

(14) $\lim\limits_{x\to 0^{-}} \sqrt{3+\tan^{-1}\frac{1}{x}}$

(a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$ (c) $\sqrt{3+\frac{\pi}{2}}$ (d) غير موجودة

(15) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{2+10^{1/x}}$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{-1}{2}$ (d) غير موجودة

(16) $\lim_{x\to3}\frac{\sin 2(x^2-9)}{x^2-9}$

(a) 6 (b) 1 (c) 2 (d) 3

(17) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 8x^3}{4x^3}$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(18) $\lim_{x\to0}2x^2\sin\frac{3}{x^3}$

(a) 0 (b) 3 (c) 2 (d) 6

(19) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\sin x+1}-1}{x}$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(20) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-3x^5}{2|x^5|+x}$

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

(21) ان قيمة a التي تجعل النهاية $\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax-6}{x-3}$ موجودة هي

(a) 1 (b) -1 (c) 5 (d) -5

22) الفترة التي تكون عليها الدالة $g(x)=\cos^{-1}(x-1)$ متصلة هي

(a) $[0,\pi]$ (b) $[0,4]$ (c) $[0,2]$ (d) $[-1,1]$

23) الفترة التي تكون عليها الدالة $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ متصلة هي

(a) $[0,2]$ (b) $(0,2]$ (c) $[0,2)$ (d) $(0,2)$

24) للدالة $g(x)=\dfrac{2x-6}{x^2-9}$ انفصال لانهائي عند

(a) 3 (b) -3 (c) $3,-3$ (d) -9

25) خط التقارب الافقي للدالة $g(x)=e^{1/x}-1$ هو

(a) $y=0$ (b) $y=-1$ (c) $y=1$ (d) $y=e$

26) خط التقارب الرأسي للدالة $g(x)=\dfrac{3}{e^x-2}$ هو

(a) $x=0$ (b) $x=2$ (c) $x=3$ (d) $x=\ln 2$

27) اذا كان للدالة $f(x)$ خط التقارب رأسي عند $x=3$ وخط مقارب افقي عند $y=2$ فان $\lim\limits_{x\to\infty} 2f(x)$ تساوي

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

28) ان قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{1-x} & x>1\\ a & x\le 1\end{cases}$ متصلة عند $x=1$ هي

(a) -1 (b) 2 (c) -2 (d) 0

29) ان قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{4x} & x>0\\ a & x\le 0\end{cases}$ عند $x=0$ هي

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

30) اذا كانت الدالة $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=x^2-5$ فان مجموعة قيم x التي تجعل الدالة $f(g(x))$ غير متصلة هي

(a) $-1,1$ (b) $\pm\sqrt{5}$ (c) $-1,\sqrt{5}$ (d) $-2,2$

31) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على R حيث $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-x}{[x]-1}=3$ فان $f(3)$ تساوي

(a) 6 (b) 9 (c) 0 (d) 1

32) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على R حيث $\lim_{x\to 0} f(\frac{\sin x}{x})-1=3$ فان $f(1)$ تساوي

(a) 3 (b) 4 (c) 2 (d) 0

33) اي من الدوال التالية له نقطة انفصال عند $x=0$ ويمكن التخلص منه

(a) $f(x)=\frac{x^2+x}{x}$

(b) $g(x)=\frac{x+1}{x^2+x}$

(c) $h(x)=e^{1/x}$

(d) $k(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le 0\end{cases}$

34) اي من الدوال التالية متصلة على الفترة $[0,1]$

(a) $f(x)=[x+1]$

(b) $g(x)=\frac{\sin x}{x}$

(c) $h(x)=\sqrt{1-x}$

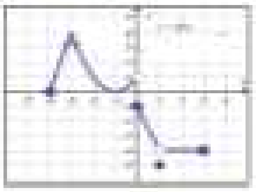
(d) $k(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<0.5\\ -1 & 0.5\le x\le 1\end{cases}$

(35) عند تقدير طول منحنى الدالة $f(x)=x^2$ على الفترة $[0,1]$ باستخدام قطعتين مستقيمتين فانه يكون

(a) 1.46 (b) 1.24 (c) 0.92 (d) 0.55

(36) عند استخدام تعريف النهاية في اثبات ان $\lim_{x\to 10} 2x = 20$ حيث قيمة $\varepsilon = 0.01$ فان δ تكون

(a) 0.01 (b) 0.05 (c) 0.005 (d) 0.5



(37) في الشكل المجاور ان قيمة $\lim_{x\to 0}|f(x)|$

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) غير موجودة

(38) في الشكل المجاور ان قيمة $\lim_{x\to -2}\sqrt{f(x)}$

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) غير موجودة

(39) للدالة $f(x)=\dfrac{|2-x|}{2x-4}$ نقطة انفصال عند $x=2$ نوعها

(a) قفزة (b) قابلة (c) لانهائي (d) تذبذبي

(40) عدد خطوط التقارب الرأسية للدالة $f(x)=\tan x$ -

(a) واحد (b) اثنان (c) لانهائي (d) لا يوجد

(41) التقريب الثاني لجذر الدالة $f(x)=x-\cos x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ هو

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) $\frac{5\pi}{8}$

(42) اي من الدوال التالية تحقق نظرية القيمة الوسيطية ويكون لها جذر في الفترة $[0,1]$ هو

(a) $f(x)=x^2-1$ (b) $g(x)=x-\log x$ (c) $h(x)=x-e^x$ (d) $r(x)=x(x-2)^{-1}$

(43) اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[-1,3]$ حيث $f(-1)=-2, f(1)=-1, f(3)=4$
فان التقريب الثاني لجذر الدالة في الفترة $[-1,3]$ هو

(a) -1.5 (b) 0.5 (c) 2 (d) 2.5

(44) ان قيمة a التي تجعل $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ موجودة هي

(a) 1 (b) 8 (c) -8 (d) -10

(45) ان قيمة (قيم) a التي تجعل $\lim_{x\to 1} g(x)$ موجودة حيث $g(x)=\begin{cases} a^2x+4 & ,x\geq 1 \\ 4a & ,x<1 \end{cases}$ a هي

(a) $2,-2$ (b) -2 (c) 2 (d) $0,-4$

(46) إذا كانت: $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to 3^-} a[x]$ فا قيمة a تساوي

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

(47) اذا كانت : $|g(x)|\leq M$ حيث M عدد حقيقي موجب فان ، $\lim_{x\to 0} x^2\, g(x)$ تساوي

(a) 0 (b) 1 (c) $-M$ (d) M

(48) ان قيمة a التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sin 3x} & x\neq 0 \\ a & x=0\end{cases}$ متصلة عند $x=0$ هي

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

(49) ان قيمة (قيم) a التي تجعل $\lim_{x\to\infty}\frac{|a|x^3-4}{2+3x^3}=1$ هي a

(a) 3 (b) 1 (c) $1,-1$ (d) $-3,3$

(50) عدد نقاط انفصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-x} & x\leq 2\\ 1 & x>2\end{cases}$ هي

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

الاجابات

1	B	11	D	21	B	31	A	41	B
2	D	12	A	22	C	32	B	42	D
3	A	13	B	23	D	33	A	43	C
4	B	14	B	24	B	34	C	44	C
5	C	15	A	25	B	35	A	45	C
6	D	16	C	26	D	36	C	46	B
7	B	17	C	27	D	37	B	47	A
8	B	18	A	28	C	38	D	48	A
9	C	19	A	29	B	39	B	49	D
10	B	20	A	30	D	40	C	50	C

إنتهت الوحدة الثانية بحمد الله

واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق