تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15math

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الأول اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15math1

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade15

* لتحميل جميع ملفات المدرس سيف الدين العلي اضغط هنا

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

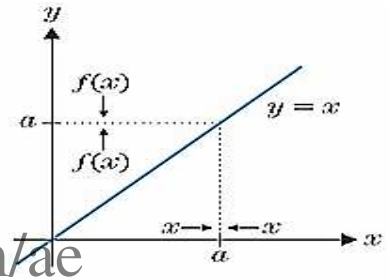
https://t.me/almanahj_bot

الدرس 2.3 حساب النهايات

SAIF ALDEEN

لأي عدد حقيقي a،

$$\lim_{x\to a} x = a.$$



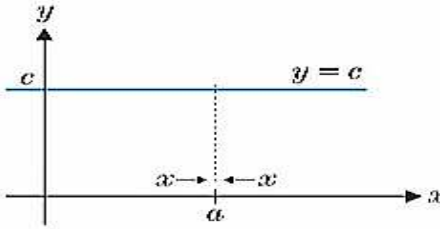
الشكل 2.15

$\lim_{x\to a} x = a$

SAIF ALDEEN

لأي ثابت c وأي عدد حقيقي a،

$$\lim_{x\to a} c = c.$$



الشكل 2.14

$\lim_{x\to a} c = c$

Almanahj.com/ae

النظرية 3.1

افترض أنّ $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين وافترض أنّ c هو أي ثابت. إذًا سينطبق ما يلي:

(i) $\lim_{x\to a}[c \times f(x)] = c \times \lim_{x\to a} f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\left(\text{بشرط } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$.

مثال 3.1 إيجاد نهاية كثيرة حدود

طبّق قواعد النهايات لإيجاد $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)$.

مثال 3.2 إيجاد نهاية دالة نسبية

طبّق قواعد النهايات لإيجاد $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x+4}{x^2-2}$.

مثال 3.3 إيجاد نهاية بالتحليل إلى عوامل

أوجد قيمة $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{1-x}$.

SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN

النظرية 3.2

لأي كثيرة حدود $p(x)$ وأي عدد حقيقي a،

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Almanahj.com/ae

النظرية 3.3

افترض أنّ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ وأنّ n هو أي عدد صحيح موجب. إذًا،

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

حيث إنّه لكل n زوجي، نفترض أن $L > 0$.

مثال 3.4 إيجاد قيمة نهاية الجذر النوني لكثيرة حدود

أوجد قيمة $\lim_{x\to 2}\sqrt[5]{3x^2-2x}$.

مثال 3.5 إيجاد نهاية بتنسيب المقام أو البسط

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

بشكل عام، في الحالة التي تكون فيها النهايات لكل من البسط والمقام تساوي 0، ينبغي أن تحاول تبسط التعبير جبريًا إلى أبسط صورة

SAIF ALDEEN

النظرية 3.4

لأي عدد حقيقي a، لدينا:

(i) $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$,

(ii) $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$,

(iii) $\lim_{x\to a}e^x=e^a$

(iv) $\lim_{x\to a}\ln x=\ln a,\ a>0$ لكل.

(v) $\lim_{x\to a}\sin^{-1}x=\sin^{-1}a$, لكل $-1<a<1$,

(vi) $\lim_{x\to a}\cos^{-1}x=\cos^{-1}a$, لكل $-1<a<1$,

(vii) $\lim_{x\to a}\tan^{-1}x=\tan^{-1}a$, لكل $-\infty<a<\infty$

(viii) إذا كانت p كثيرة حدود و $\lim_{x\to p(a)}f(x)=L$، فإن $\lim_{x\to a}f(p(x))=L$.

Almanahj.com/ae

مثال 3.6 إيجاد قيمة نهاية معكوس دالة مثلثية

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\sin^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

مثال 3.7 نهاية ناتج ضرب ليس بناتج ضرب النهايات

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0}(x\cot x)$.

النظرية 3.5 (نظرية الشطيرة)

افترض أنّ

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

لكل x في الفترة (c, d) ما عدا النقطة $a \in (c, d)$ وأنّ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

ولعدد L. إذًا، يكون:

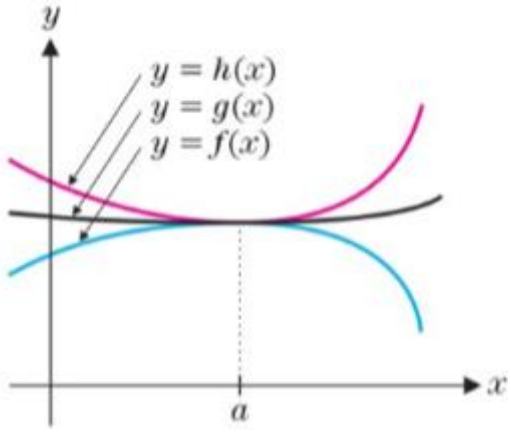
$$\lim_{x\to a} g(x) = L \quad \text{كما أن}$$

مثال 3.8 استخدام نظرية الشطيرة للتحقق من صحة نهاية

حدّد قيمة $\lim_{x\to 0}\left[x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

Almanahj.com/ae

تنطبق نظرية الشطيرة على النهايات أحادية الطرف.



افترض أنّ $f(x)$ محدودة، بمعنى أن هناك M ثابتة بحيث تكون $|f(x)| \le M$ لجميع قيم x. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

مثال 3.9 نهاية الدالة متعددة التعريف

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث تُعرّف f كما يلي

Almanahj.com/ae

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\cos x + 1, & \text{عندما } x < 0 \\ e^x - 4, & \text{عندما } x \ge 0 \end{cases}$$

مثال 3.10 إيجاد نهاية تصف السرعة اللحظية

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

افترض أنّ الدالة التي تحدد موقعًا لجسم ما عند الزمن t (بالثواني) تتمثل بـ

$$f(t) = t^2 + 2 \text{ (قدم)}$$

أوجد السرعة اللحظية للجسم عند الزمن $t = 1$.

إذا كانت $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ أثبت أن

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

Almanahj.com/ae

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$

أوجد

7) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

8) $\lim_{x\to 0} 2x \csc x$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
Almanahj.com/ae

10) $\lim_{x\to 0} \left(3 + x^2 \cos\frac{1}{x}\right)$

11) $\lim_{x\to 0}\left(x^2\csc^2 x+5\right)$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

أوجد قيمة النهايات في كل مما يلي

1. $\lim_{x\to 0}(x^2-3x+1)$

2. $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x+1}$

Almanahj.com/ae

3. $\lim_{x\to 0}\cos^{-1}(x^2)$

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-5}{x^2+4}$

5. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

6. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
Almanahj.com/ae

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^{-2x+1}}{x^2 + x}$

12. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc^2 x$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

Almanahj.com/ae

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

16. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x-4}$

17. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
Almanahj.com/ae

18. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{|x|}\right)$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{1-e^{x}}$

20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin|x|}{x}$

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 2 \\ x^2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

22. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x < -1 \\ 3x+1 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$

Almanahj.com/ae

23. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < -1 \\ 3 & , \quad -1 < x < 1 \\ 2x+1 & , \quad x > 1 \end{cases}$

24. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x<-1 \\ 3 & , \quad -1<x<1 \\ 2x+1 & , \quad x>1 \end{cases}$

25. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN
Almanahj.com/ae

26. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

27. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{5x}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

29) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)$

30) $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

Almanahj.com/ae

استخدم دالة الموقع $f(t)$ لايجاد السرعة اللحظية عند الزمن $t = a$

33) $f(t) = t^2 + 2, a = 2$

36) $f(t) = t^3, a = 1$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

37. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ سريعًا. أوجد قيمة $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

38. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ سريعًا $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$ أوجد قيمة

Almanahj.com/ae

41. أوجد قيمة كل نهاية وعلّل كل خطوة مشيرًا إلى النظرية أو المعادلة المناسبة.

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1)$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2+1}$

42. أوجد قيمة كل نهاية وعلّل كل خطوة مشيرًا إلى النظرية أو المعادلة المناسبة.

(a) $\lim_{x\to -1}[(x+1)\sin x]$ (b) $\lim_{x\to 1}\frac{xe^x}{\tan x}$

تمارين 43-46

استخدم $\lim_{x\to a} f(x) = 2$، $\lim_{x\to a} g(x) = -3$ $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ لتحديد النهاية، إن أمكن.

$\lim_{x\to a} [3f(x)g(x)]$

$\lim_{x\to a} [2f(x) - 3g(x)]$

$\lim_{x\to a} \frac{2f(x)h(x)}{f(x)+h(x)}$

$\lim_{x\to a} \frac{[f(x)]^2}{g(x)}$

SAIF ALDEEN
SAIF ALDEEN
Almanahj.com/ae

إذا كانت $p(x) = x^2 - 1$ **فأوجد** (47 and 48

$\lim_{x\to 0} p(p(p(p(x))))$

$\lim_{x\to 0} p(3 + 2p(x - p(x)))$

49. أوجد كل الأخطاء في المعادلات الاتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=0\cdot ?=0.$$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

50. أوجد كل الأخطاء في المعادلات الاتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{0}{0}=1$$

51. أعط مثالًا للدالتين f و g بحيث توجد $\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ ولا توجد $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to 0}g(x)$.

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

52. أعط مثالاً للدالتين f و g بحيث توجد $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ ولا توجد واحدة على الأقل من $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to 0}g(x)$.

Almanahj.com/ae

53. إذا وُجدت $\lim_{x\to a}f(x)$ ولم توجد $\lim_{x\to a}g(x)$. فهل يكون من الصواب دومًا أنّ $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ غير موجودة؟ اشرح ذلك.

54. هل ما يلي صواب أم خطأ؟ إذا كانت $\lim_{x\to 0}f(x)$ غير موجودة، فعندها تكون $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ غير موجودة. اشرح ذلك.

55. $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$

56. $\lim_{x\to 0} e^{1/x}$

57. $\lim_{x\to 0^+} x^{-x^2}$

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

58. $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

59. $\lim_{x\to 0} \tan^{-1}\frac{1}{x}$

60. $\lim_{x\to 0} \ln\left|\frac{1}{x}\right|$

Almanahj.com/ae

65. افترض أنّ القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة موضّح بـ

$$T(x) = \begin{cases} 0.14x, & 0 \le x < 10{,}000 \\ 1500 + 0.21x, & 10{,}000 \le x \end{cases}$$

احسب $\lim_{x \to 0^+} T(x)$. لماذا يُعدّ هذا جيدًا؟ احسب $\lim_{x \to 10{,}000} T(x)$. لماذا يُعدّ هذا سيئًا؟

SAIF ALDEEN SAIF ALDEEN

Almanahj.com/ae

66. افترض أنّ القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن نسبة الالتزام الضريبي تبلغ 12% على أول $20,000 من الأرباح الخاضعة للضريبة و 16% على الباقي. أوجد الثابتين a و b لدالة الضريبة

$$T(x) = \begin{cases} a + 0.12x, & x \le 20{,}000 \\ b + 0.16(x - 20{,}000), & x > 20{,}000 \end{cases}$$

بحيث توجد $\lim_{x \to 0^+} T(x) = 0$ و $\lim_{x \to 20{,}000} T(x)$. لماذا من المهم أن يكون هاتان النهايتان موجودتين؟