# حل مسائل جميع دروس الوحدة الخامسة

# فيديوهات الوحدة الخامسة

إعداد

د: حيدر عامر السعافين

# الدالة الأصلية والتكامل

حصة 1

$G'(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)$

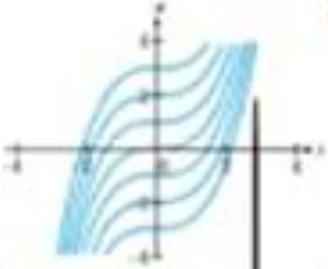
$\boxed{G(x)-F(x)=C}$

$f(x)=x^3$

$G(x)=\frac{1}{4}x^4+7$

$F(x)=\frac{1}{4}x^4+5$

$L(x)= \quad +C$



أمثلة:

(1) $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

(2) $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(3) $\int(5x^4-3x^2+2x^{-3}+2)\,dx=\frac{5x^5}{5}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^{-2}}{-2}+2x+C=x^5-x^3-\frac{1}{x^2}+x+C$

(4) $\int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-5)\,dx=\int(x-5x^{\frac{1}{3}})\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}(5)x^{\frac{4}{3}}+C=\frac{x^2}{2}-\frac{15}{4}x^{\frac{4}{3}}$

(5) $\int x^4\left(\frac{1}{x}-3x^2-x^{-4}\right)dx=\int(x^3-3x^6-1)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{7}x^7-x+C$

(6) $\int x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{4}{3}}-5x)\,dx=\int(x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{4}{3}})\,dx=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-5\left(\frac{3}{7}\right)x^{\frac{7}{3}}=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-\frac{15}{7}x^{\frac{7}{3}}$

الحصة 2

## تكامل الدوال المثلثية

1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

3) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

4) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

5) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

6) $\int \cot x . \csc x\,dx = -\csc x + c$

ملاحظة

$\int \sin \boxed{ax}\,dx = \dfrac{-\cos ax}{a} + c$


أمثلة

1) $\int (\sin 5x - \cos x)\,dx = \dfrac{-\cos 5x}{5} - \sin x + c$

2) $\int (\sec^2 x + \sqrt{x} - 4)\,dx = \tan x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 4x + c$

3) $\int (\sec x \tan x - 4\cos 3x)\,dx = \sec x - \dfrac{4\sin 3x}{3} + C$

4) $\int \dfrac{\sin 2x + \sec x}{\cos x}\,dx = \int \left(\dfrac{\sin 2x}{\cos x} + \dfrac{\sec x}{\cos x}\right) dx$

$= \int \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos x}\,dx + \int \sec^2 x\,dx$

$= -2\cos x + \tan x + $

5:20 / 5:29

الصف 3م

التكامل

أوجد:

① $\int \sin^2 2x\,dx$ $\rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + c\right) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + c$

② $\int \cos^2 2x\,dx$

$\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right] + c$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + c$

$1+\tan^2 x = \sec^2 x$

③ $\int \tan^2 3x\,dx$

$\int (\sec^2 3x - 1)\,dx$

$= \frac{\tan 3x}{3} - x + C$

④ $\int \cot^2 2x\,dx$ $\quad 1+\cot^2 x = \csc^2 x$

$= \int (\csc^2 2x - 1)\,dx$

$= -\frac{\cot 2x}{2} - x + C$

صفحة ٩

# التكامل

مثال ١ أوجد :

① $\int \left(e^x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

$= e^x + \tan^{-1}x + c$

② $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx$

$= \ln|\tan x| + C$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

③ $\int (x-1)(x+1)\, dx$

$= \int (x^2-1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x + C$

② $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

$(x^2+1)' = 2x$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int e^{-x} dx = e^{-x} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$

لكل $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, x \neq 0$

النتيجة 1-1

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ في اي فترة لا تحتوي على 0

النتيجة 1-2

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \,,\, f(x) \neq 0$ في اي فترة لا تحتوي على 0

4

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$$

① $\int x^{\frac{2}{3}}\left(4x^{-\frac{4}{3}} - 3\right)dx$

$$= \int \left(x^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 3x + c$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{9}(3)\,x^{\frac{5}{3}} - 3x + c$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{5}{3}} - 3x + c$$

② $\int\left(\frac{4}{x^2} + x^{-5} - 3\right)dx$

$$= \int\left(4x^{-2} + x^{-5} - 3\right)dx$$

$$= \frac{4x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-6}}{6} - 3x + c$$

$$= \frac{-4}{3x^3} + \frac{1}{6x^6} - 3x + c$$

③ $\int\left(\cos 3x + e^{5x} - 10\right)dx$

$$= \frac{\sin 3x}{3} + \frac{e^{5x}}{5} - 10x + C$$

# إيجاد موقع جسيم عند الهبوط بمعلومية تسارعه

تسارع جسيم عند الهبوط هو: $y'' = -9.8\,m/s^2$ على فرض أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $-30\,m/s$ والموقع الابتدائي هو $y(0) = 30000\,m$. أوجد الدالة المكانية $y(t)$

الحل

$$y''(t) = s''(t) = v'(t) = -9.8$$

$$\int y''(t)\,dt = \int -9.8\,dt$$

$$v = y'(t) = -9.8t + \underline{c} \qquad v(0) = -30$$

$$-30 = -9.8(0) + c \Rightarrow c = \boxed{-30}$$

$$\int v = \frac{ds}{dt} = -9.8t - 30$$

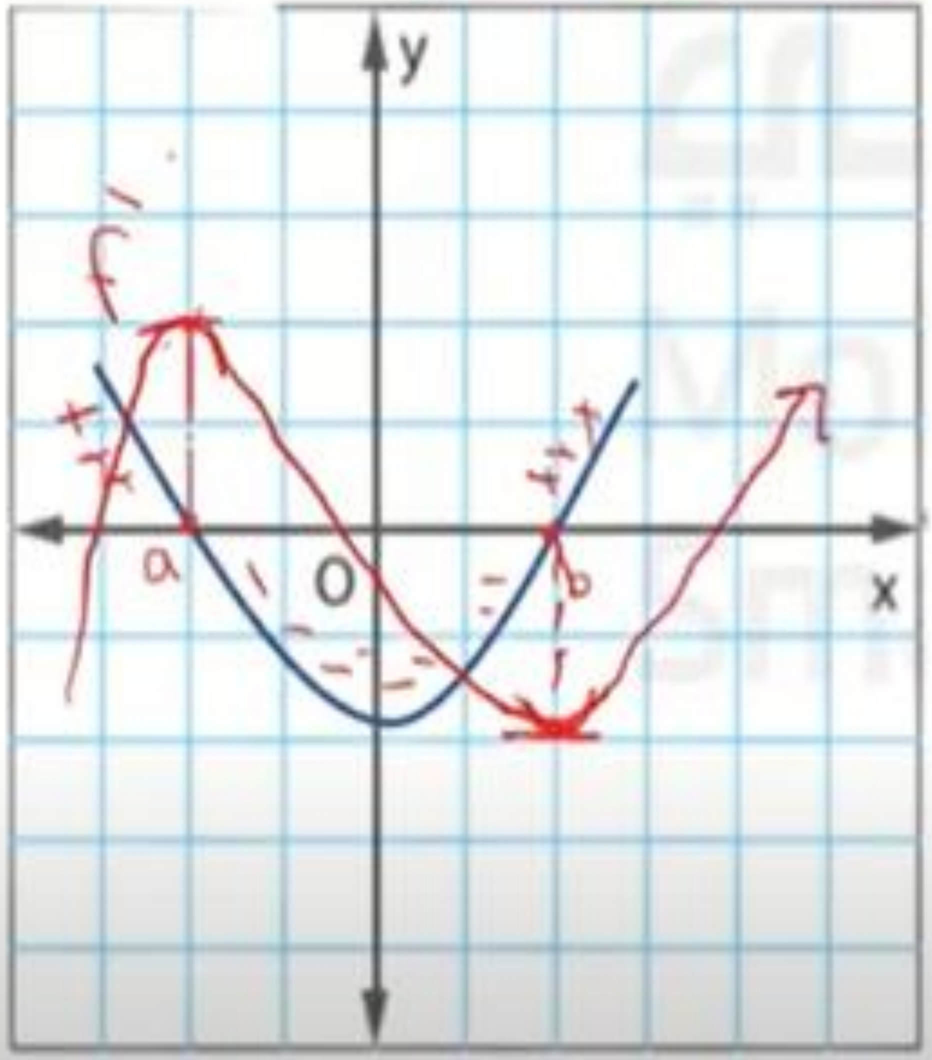
$$\int \frac{ds}{dt}\,dt = \int (-9.8t - 30)\,dt$$

$$\boxed{y(0) = 30000} \quad s = -\frac{9.8t^2}{2} - 30t + c$$

$$3000 = -4.9(0) - 30(0) + c \Rightarrow c = 30000$$

$$\boxed{s(t) = -4.9t^2 - 30t + 30000}$$

ارسم الدالة من بيان الدالة $f'$



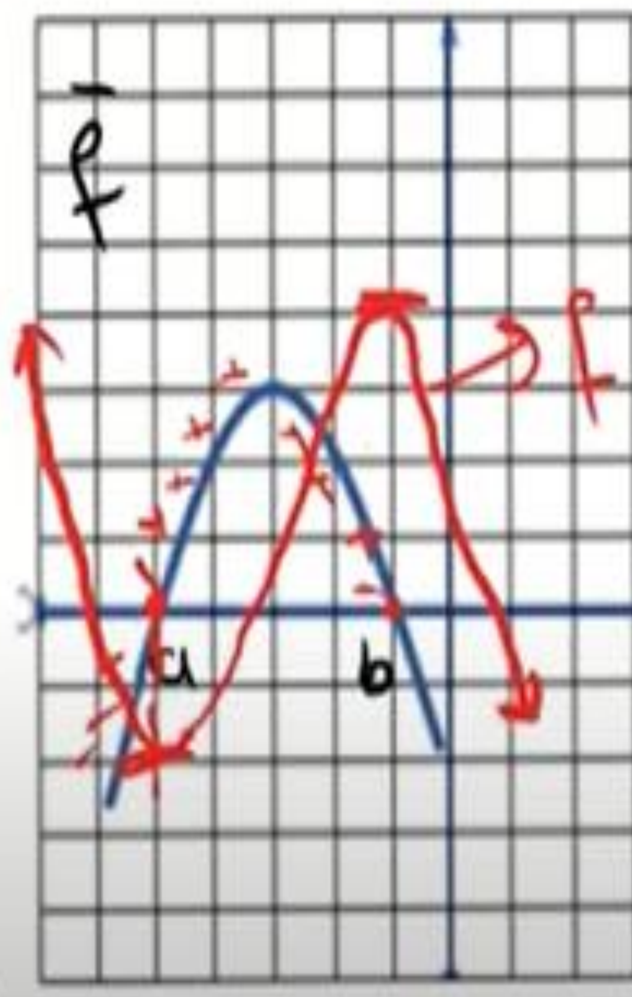

مثال

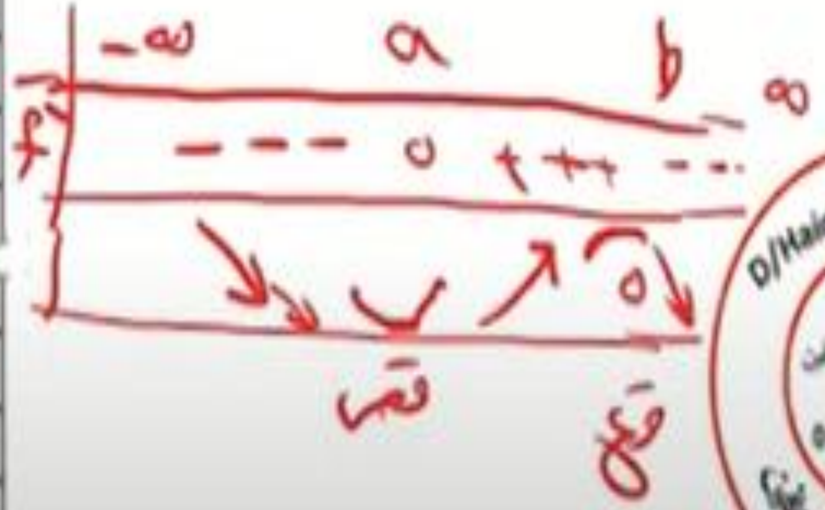
ارسم الدالة $f$ من بيان $f'$

| | $-\infty$ | $a$ | $b$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+++$ | $0$ | $---$ | $0$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

## مثال٢

ارسم الدالة f
من بيان f'

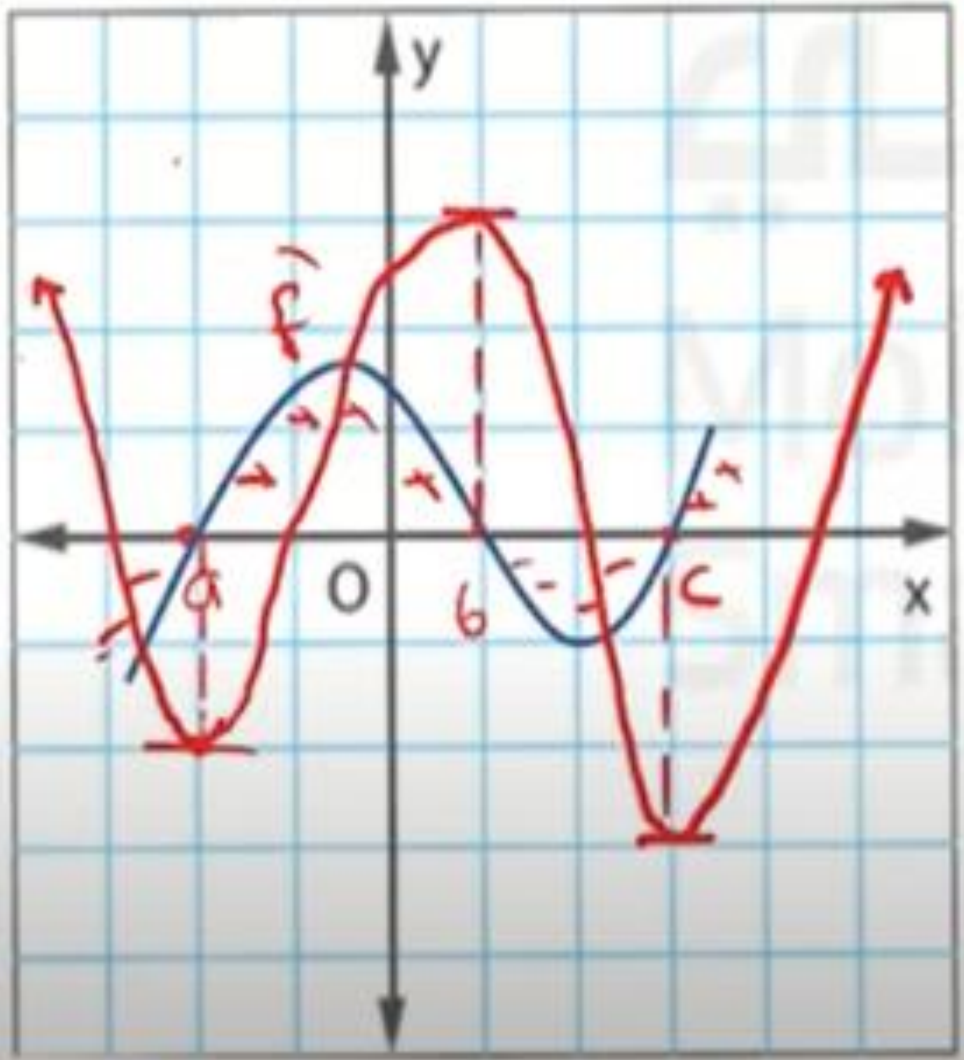


حصة ②

مثال ١/ ارسم بيان الدالة f صبيان f`

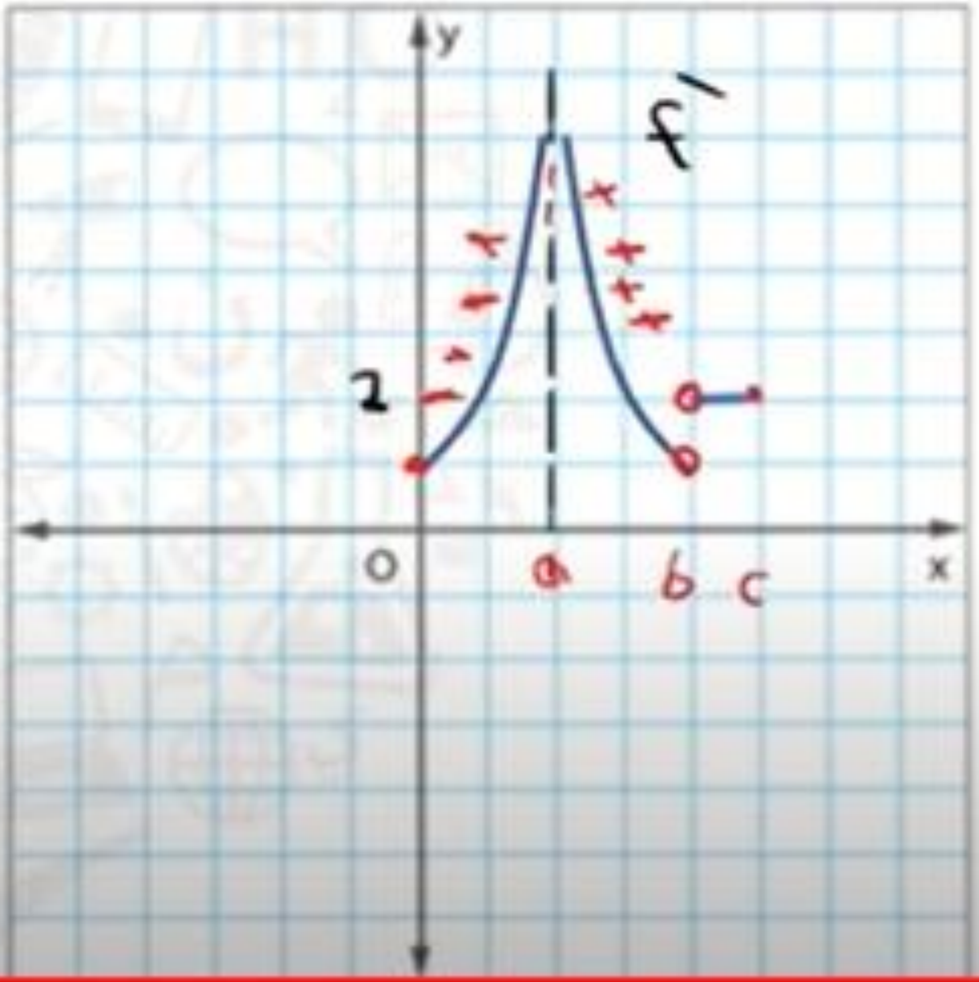
من بيان f`

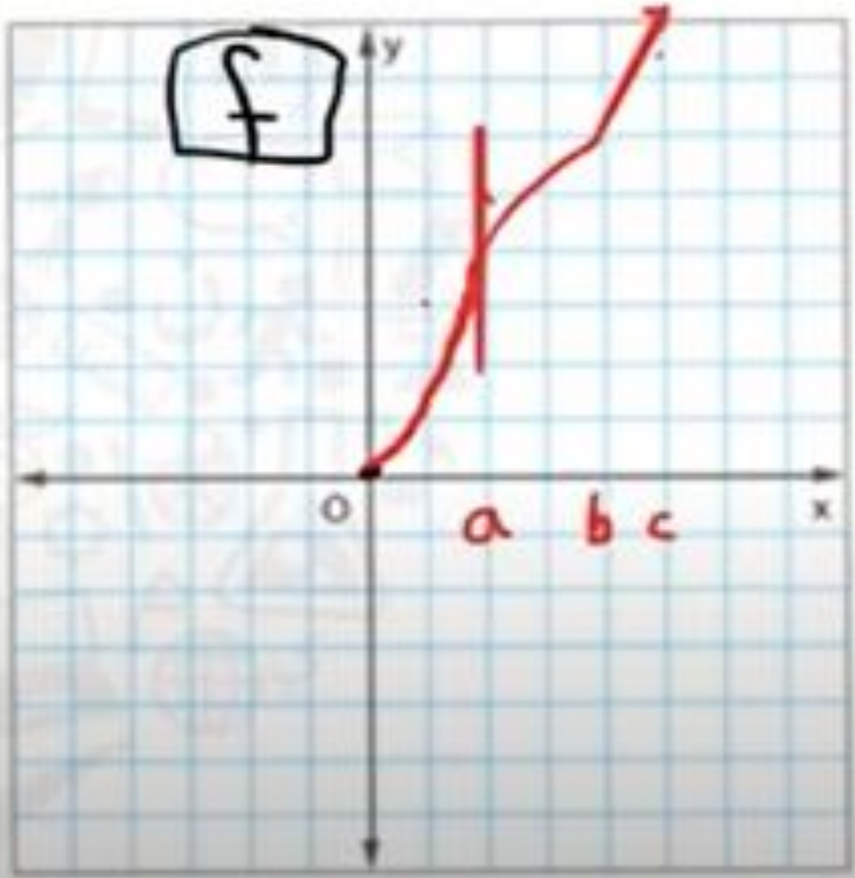



| | $-\infty$ | | a | | b | | c | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f` | | - - - - | 0 | + + | 0 | - - - | 0 | + + + | |
| f | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

مثال

-٣ الدالة f من بيان f`




$f` = m = 2$

# خواص التكامل المحدود

حصة رقم 3

خاصة الحد الأعلى والأدنى:

مثال: دون حساب قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

أوجد حداً أعلى وحد أدنى.

الطريقة الأولى: بناء الدالة:

$0 \le x \le 1$ بالتربيع

$0^{+1} \le x^2{+1} \le 1^{+1}$ بإضافة 1

$1 \le x^2+1 \le 2$ نقلب الدالة

$1 \ge \frac{1}{x^2+1} \ge \frac{1}{2}$ إجراء التكامل:

$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$

$\frac{1}{2}(1-0) \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \le 1(1-0)$

حد الأدنى $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \le 1$ حد الأعلى

حد أعلى $f(0) = \frac{1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

حد أدنى $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

مثال ٢ قدّر الحد الأعلى والأدنى: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

الحل

طريقة بناء الدالة:

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

بأخذ $\boxed{\cos}$ : $\cos 0 \le \cos x \le \cos\frac{\pi}{2}$

بإضافة ١ : $1+1 \le 1+\cos x \le 1+0$

نقلب

$2 \le 1+\cos x \le 1$

$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+\cos x} \le 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx \le 1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$

حد أدنى ← $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx \le \frac{\pi}{2}$ → حد أعلى

---

حد أدنى $f(0) = \frac{1}{1+\cos 0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\cos 0 \to 1$

حد أعلى $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$

مثال ٤ ابحث قابلية الدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ للتكامل على الفترة $[3,5]$

الحل

الدالة قابلة للتكامل على أي فترة جزئية اذا كانت معرفة ومتصلة. نوجد المجال:

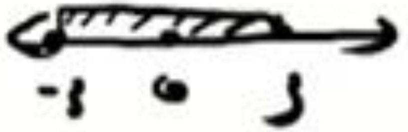
$$9 - x^2 \geq 0$$

ناخذ الجذر $9 \geq x^2$

$$\sqrt{9} \geq \sqrt{x^2} \Rightarrow 3 \geq |x|$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

المجال $[-3,3]$




$[3,5] \not\subset [-3,3]$

الدالة غير معرفة على $[3,5]$

∴ الدالة غير متصلة على $[3,5]$

∴ غير قابلة للتكامل على $[3,5]$

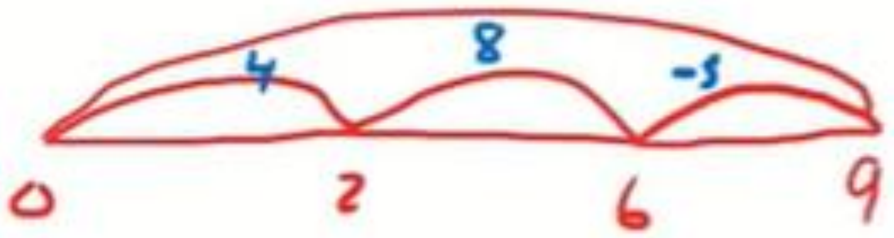
Whiteboard

## القيمة المتوسطة للتكامل حصة 3

(1) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx = 3$ ، $\int_2^6 2f(x)\,dx = 16$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$

س ١ د




$$\int_2^6 \frac{2}{2} f(x)\,dx = \frac{16}{2}$$

$$\int_2^6 f(x)\,dx = \boxed{8}$$

$$\int_6^9 f(x)\,dx = -3$$

$$\Rightarrow \int_0^9 f(x)\,dx = \int_0^2 + \int_2^6 + \int_6^9 = 4 + 8 + (-3) = 9$$

الحل

$$f_{(ave)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

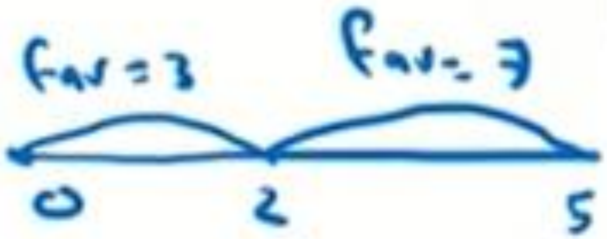
$$= \frac{1}{9-0}\int_0^9 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{9}(9) = \boxed{1}$$

سؤال 2

2) اذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,2]$ هي 3 والقيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[2,5]$ هي 7 فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,5]$

الحل




$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f_{ave}\cdot(b-a)$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3(2-0) = 6$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = 7(5-2) = 21$$

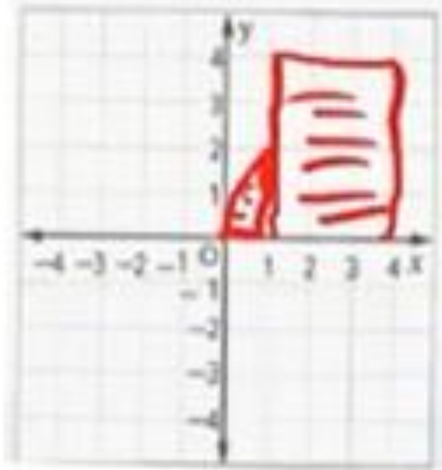
$$\Rightarrow \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 + \int_2^5 = 6+21 = 27$$

$$f_{ave} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}(27) = \frac{27}{5} = \boxed{5.4}$$

سؤال 3

احسب $\int_0^4 f(x)\,dx$ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & ,x<1\\ 4 & ,x\ge 1\end{cases}$



$f(x) = 2x \quad , x<1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | |
| y | 0 | 2 | |

$f_{ave}$

$[0,4]$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(2)(1) + 3(4) = \boxed{13}$$

$$f_{ave} = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{4}(13) = \frac{13}{4}$$

Microsoft Whiteboard

حصة ١

النظرية الأساسية للتكامل

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

اذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ $f$ فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

① $\int_1^3 (3x^2+1)\,dx = \left(\frac{3x^3}{3} + x\right)$

$(x^3+3)\Big|_1^3 = [(3^3+3) - (1^3+1)] = [30-2] = 28$

---

$\int_0^1 (6e^{-2x}+4)\,dx = 6\frac{e^{-2x}}{-2} + 4x = (-3e^{-2x} + 4x)\Big|_0^1$

$= [-3(e^{-2} - e^{0}) + 4(1-0)] = [-3(e^{-2}-1)+4] = -3e^{-2}+7$

---

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

اذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

مثال (1) لاجل $F(x)=\int_1^x \left(t^2-2t+3\right)dt$ احسب $F'(x)$

$$F'(x)=x^2-2x+3$$

$$F(x)=\left.\frac{t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}+3t\right|_1^x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)$$

$$F'(x)=\frac{3x^3}{3}-2x+3-0$$

$$=x^3-2x+3$$

استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الأساسية (الجزء الثاني)

إذا كانت $F(x)=\int_2^{x^2}\cos t\,dt$ فاحسب $F'(x)$

$$F'(x)=2x\cos 2x-0=2x\cos 2x$$

مثال 2

إذا كانت $F(x)=\int_{2x}^{x^2}\sqrt{t^2+1}\,dt$ فاحسب $F'(x)$

الحل

$$F'(x) = 2x\sqrt{(x^2)^2+1} - 2\sqrt{(2x)^2+1}$$

$$= 2x\sqrt{x^4+1} - 2\sqrt{4x^2+1}$$



مثال 3

حسابات مسافة الهبوط لجسم يسقط

على فرض أن السرعة المتجهة (إلى الأسفل) لأحد لاعبي القفز معطى بالدالة $v(t)=9(1-e^{-t})\,ft/s$ لأول 5 ثوان من القفز ،احسب المسافة المجتازة عند الهبوط .

$[0,5]$

الحل

$$d = \int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 (9 - 9e^{-t})\,dt$$

$$= \left(9t + 9e^{-t}\right)\Big|_0^5$$

$$= \left[9(5) + 9e^{-5}\right] - \left[0 + 9e^{0}\right]$$

$$= \left[45 + 9e^{-5}\right] - 9$$

$$= 36 + 9e^{-5} \approx 36\ m$$

مثال: ... التغير في حجم الخزان

... في خزان وتتسرب خارجه . يساوي المعدل الصافي للتغير ( وهو معدل التدفق للداخل ناقص معدل التسرب للخارج ) في الماء $f(t)=20(t^2-1)$ لترات في الدقيقة لكل $0 \le t \le 3$

a) حدد متى يزداد مستوى الماء في الخزان ومتى ينخفض

نرمز لها ب $w(t)$

عدد اللترات في الخزان بعد $t$

ينخفض مستوى الماء عندما: $w'(t)=f(t)<0$

$f(t)=20t^2-20<0$

يزداد عندما $w'(t)=f(t)=20t^2-20>0$

b) إذا كان الخزان يسع 200 لتراً من الماء عند الزمن $t=0$ ، فحدد كم لتراً في الخزان في الزمن $t=3$ دقائق

نجري عليه التكامل من 0 إلى 3

$$\int_0^3 w'(t)\,dt=\int_0^3 (20t^2-20)\,dt$$

$$=w(3)-w(0)=\left.\frac{20t^3}{3}-20t\right]_0^3 \qquad w(0)=200$$

$$w(3)-200=20(9-3)=120$$

$$w(3)=120+200=320$$

مثال: إيجاد المماس للدالة المعرفة على أنها تكامل

للدالة $F(x)=\int_4^{x^2}\ln(t^3+4)\,dt$ ، اوجد معادلة المماس عند $x=2$

$$F'(x)=2x\left[\ln\left((x^2)^3+4\right)\right]-0$$

$$=2x\ln(x^6+4)$$

$$F'(2)=2(2)\ln\left[2^6+4\right]$$

$$=4\ln 68\simeq 16.876$$

# التكامل بالتعويض حصة ١

التكامل بالتعويض: هو عملية تحويل التكامل من شكل صعب إلى شكل سهل يمكن إجراء عملية التكامل بسهولة.

مثال

$$\int x(2x^2+1)^5\,dx$$

الحل

$$u = 2x^2+1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4x}{1}$$

$$dx = \frac{du}{4x}$$

$$= \int x\,(u^5)\,\frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int u^5\,du$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{1}{24}(2x^2+1)^6 + c$$

مثال 2 أوجد $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

الحل

$$u = x^4 + 3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4x^3}{1}$$

$$dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$= \int x^3 \sqrt{u}\,\frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)\left(u^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6}\left(x^4+3\right)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+3\right)^3} + c$$

مثال 3

$$\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{dx}{x^2}$$

الحل

$$u = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\Rightarrow dx = -x^2 du$$

$$= \int u^3 \frac{(\cancel{-x^2} du)}{\cancel{x^2}}$$

$$= -\int u^3 du$$

$$= -\frac{u^4}{4} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 + C$$

مثال ٦

أوجد $\int \frac{1}{9-12x+4x^2}\,dx$

مربع كامل

$9-12x+4x^2$

$3^2 \qquad (2x)^2$

$=(3-2x)^2$

$u = 3-2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2$

$dx = \frac{du}{-2}$

$= \int \frac{1}{(3-2x)^2}\,dx$

$= \int \frac{1}{u^2}\,\frac{du}{-2}$

$= -\frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{1}{2u} + c = \frac{1}{2(3-2x)} + c$

# التكامل بالتعويض    الحصة ②

مثال ① أوجد: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$dx = x\,du$

الحل

$$\int \frac{\cos u}{\cancel{x}}\,\cancel{x}\,du$$

$$= \int \cos u\,du = \sin \underline{u} + c$$

$$= \sin(\ln u) + C$$

$$\int \tan^5 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx :$$ [illegible]

[illegible]

$$\int (f(x))^{n} \cdot f'(x)\, dx$$

$$= \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x \cdot \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^{3} \cdot \sec^2 x\, dx$$

$$= \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

$$\int u^3 \, \cancel{\sec^2 x} \times \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}} = \frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{(\tan x)^4}{4} + c$$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \, dx$$ أوجد {سؤال 3

$$= \int \sin^4 x \cdot \sin x \, \cos^4 x \, dx$$ سؤال 1

$u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\sin x}{1}$$

$$dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$dx = -\frac{du}{\sin x}$$

$$= \int \sin^4 x \, \cancel{\sin x} \, u^4 \left(-\frac{du}{\cancel{\sin x}}\right)$$

$$= -\int (\sin^2 x)^2 u^4 \, du$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^2 u^4 \, du$$

$$= -\int (1 - u^2)^2 u^4 \, du$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4) u^4 \, du$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$(\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2$

$$= \int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{(\cos x)^5}{5} - \frac{2}{7}(\cos x)^7 + \frac{1}{9}(\cos x)^9 + C$$

③ حصة

## التكامل بالتعويض

نشاط ①

أوجد: $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

الحل

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$dx = -\frac{du}{\sin x}$

$$= \int \frac{\cancel{\sin x}}{1+u^2}\cdot\frac{-du}{(\cancel{\sin x})}$$

$$= -\int \frac{du}{1+u^2} = -\tan^{-1} u + c$$

$$= \tan^{-1}(\cos x) + c$$

مثال 2

أوجد: $\int \frac{2+\sin x+2\cos x}{1+\cos x}\,dx$

الحل

$$=\int \frac{(2+2\cos x)+\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

$$=\int \frac{2(1+\cos x)+\sin x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{2\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{1+\cos x}}\,dx+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

$$=\int 2\,dx-\int \frac{-\sin x}{(1+\cos x)}\,dx$$

$$=2x-\ln|1+\cos x|+C$$

مثال 3 أوجد: $\int \frac{x}{x+1}\, dx$

الحل

$u-1=x$

$u=x+1$

$\frac{du}{dx}=1$

$du=dx$

$$=\int \frac{u-1}{u}\, du$$

$$=\int \frac{u}{u}\, du-\int \frac{1}{u}\, du$$

$$=\int 1\, du-\int \frac{1}{u}\, du$$

$$=u-\ln|u|+C$$

$$=x+1-\ln|x+1|+C$$

مثال ٤ أوجد: $\int \frac{1}{x(5+\ln x)}dx$

$u = 5 + \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$dx = x\,du$

$= \int \frac{1}{x(u)} x\,du = \int \frac{1}{u} du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|5 + \ln x| + c$

## حصة (٦) التكامل بالتعويض

أوجد: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x}\,dx$

**الحل**

$u = \sin^{-1}x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$dx = \sqrt{1-x^2}\,du$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}\,u}\,du\left(\cancel{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$$

$$= \ln(\sin^{-1}x) + c$$

مثال ٣  أوجد: $\int 3^x \, dx$

$$\int 3^x \, dx = \int e^{\ln 3^x} \, dx = \int e^{x \ln 3} \, dx$$

$$= \int e^u \, \frac{du}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3} \int e^u \, du$$

$$= \frac{1}{\ln 3} e^u + c$$

$$= \frac{1}{\ln 3} e^{x \ln 3} + c = \frac{1}{\ln 3} e^{\ln 3^x} + c$$

$$= \frac{1}{\ln 3} 3^x + c = \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$u = x \ln 3$$

$$\frac{du}{dx} = \ln 3$$

$$dx = \frac{du}{\ln 3}$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{5+\sin 3x}}\,dx$$ مثال 3

$u = 5 + \sin 3x$

$\frac{du}{dx} = 3\cos 3x$

$dx = \frac{du}{3\cos 3x}$

$$= \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{3\cos 3x}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}\,u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(5+\sin 3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{5+\sin 3x} + C$$

$\int x \sec^2(ax^2)\, dx$ : مثال (4) أخيره

اول

$u = ax^2$

$\frac{du}{dx} = \frac{2ax}{1}$

$dx = \frac{du}{2ax}$

$= \int x \sec^2 u \, \frac{du}{2ax}$

$= \frac{1}{2a} \int \sec^2 u \, du$

$= \frac{1}{2a} \tan(u) + c$

$= \frac{1}{2a} \tan(ax^2) + c$

ملاحظة :

إذا لم يمكن الاختزال
من المرحلة الأولى
نرجع لها

مثال 5

أوجد: $\int \frac{1}{x} \sin(\ln x)\, dx$

الحل

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$dx = x\, du$

$= \int \frac{1}{x} \sin u\, (x\, du)$

$= \int \sin u\, du$

$= -\cos u + C$

$= -\cos(\ln x) + C$

## ⑤ الحصة

## التكامل بالتعويض

مثال ① أوجد $\int \sin^3 x \, dx$

الحل

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$dx = \frac{du}{-\sin x} = -\frac{du}{\sin x}$$

$$= \int \sin x \, \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - \int \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= -\cos x - \int \underline{\sin x} (\cos x)^2 \, dx$$

$$= -\cos x + \int \cancel{\sin x} \, u^2 \, \frac{du}{\cancel{\sin x}}$$

$$= -\cos x + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

حل 2: أوجد $\int \frac{3}{\sqrt{x}+x}\,dx$

حل 1

$$= \int \frac{3}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,dx$$

$$= \int \frac{3}{\cancel{\sqrt{x}}\cdot u}\, 2\cancel{\sqrt{x}}\,du = \int 6\,\frac{1}{u}\,du$$

$$= 6\ln|u| + c$$

$$= 6\ln|1+\sqrt{x}| + c$$

$x = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$

$u = 1+\sqrt{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$dx = 2\sqrt{x}\,du$

مثال 3 أوجد:

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^4+5}\,dx.$$

الحل

$$u = x^4 + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$dx = \frac{du}{4x^3}$$

| $x$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $u$ | $6$ | $21$ |

$$u = 1^4 + 5 = 6$$

$$= 2^4 + 5 = 21$$

$$\int_6^{21} \cancel{x^3}\, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_6^{21} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(u^{\frac{3}{2}}\right)_6^{21}$$

$$= \frac{1}{6}\left(21^{\frac{3}{2}} - 6^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{21^3} - \sqrt{6^3}\right] \simeq$$

Microsoft Whiteboard

مثال ٦

أوجد:

$$\int_0^{15} t e^{-t^2/2}\,dt.$$

$u = -\frac{t^2}{2}$

$\frac{du}{dt} = -\frac{2t}{2} = -t$

$dt = \frac{du}{-t}$

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $15$ |
| $u$ | $0$ | $-\frac{225}{2}$ |

$$= \int_0^{-\frac{225}{2}} \cancel{t}\, e^{u}\, \frac{du}{-\cancel{t}}$$

$$= -\int_0^{-\frac{225}{2}} e^{u}\,du = -\left[e^{u}\right]_0^{-112.5}$$

$$= -\left(e^{-112.5} - e^{0}\right)$$

$$= -e^{-112.5} + 1$$

Black pen