المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث	
نموذج امتحان نهاية الفصل وفق الهيكل الوزاري	5

إجابات هيكل الرياضيات 2023 - 2024

الصـــــــــــف : الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي : الثالـــــــــــث

أولاً : الالكترونـــــــــي

: إعداد

د: حيدر عامر السعافين

0505712489

في التمارين 1—4، جـــــد المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المُعطاة.

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \le x \le 3$

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \le x \le 2$

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \le x \le 0$

4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \le x \le 4$

في التمارين 5—12، ارسم وجـــــد مساحة المنطقة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات.

5. $y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$

6. $y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$

7. $y = x^3, y = 3x + 2$

8. $y = \sqrt{x}, y = x^2$

9. $y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$

10. $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}, y = |x|$

11. $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}, y = x$

12. $y = \sin x \ (0 \le x \le 2\pi), y = \cos x$

the Definite Integral

5.1 Area Between Curves

1. Area $= \int_1^3 [x^3 - (x^2 - 1)]\,dx$
$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3$
$= \left(\frac{81}{4} - \frac{27}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right)$
$= \frac{160}{12} = \frac{40}{3}$

2. Area $= \int_0^2 [(x^2 + 2) - \cos x]\,dx$
$= \left(\frac{x^3}{3} + 2x - \sin x\right)\Big|_0^2 = \frac{20}{3} - \sin 2$

3. Area $= \int_{-2}^0 [e^x - (x - 1)]\,dx$
$= \left(e^x - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-2}^0$
$= (1 - 0 + 0) - \left(e^{-2} - \frac{4}{2} + (-2)\right)$
$= 5 - e^{-2}$

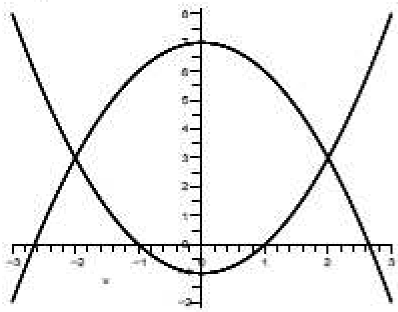
4. Area $= \int_1^4 (x^2 - e^{-x})\,dx$
$= \left(\frac{x^3}{3} + e^{-x}\right)\Big|_1^4 = 21 + e^{-4} - e^{-1}$

5. Area $= \int_{-2}^{2} [7 - x^2 - (x^2 - 1)]\,dx$

$= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$

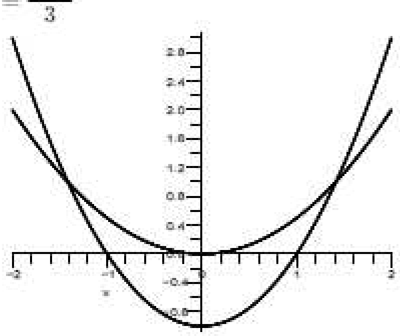
$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right)$

$= \frac{64}{3}$

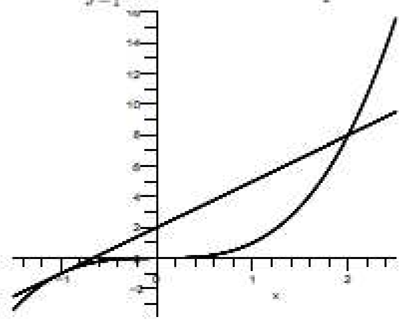


6. Area $= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{2} - (x^2 - 1)\right] dx$

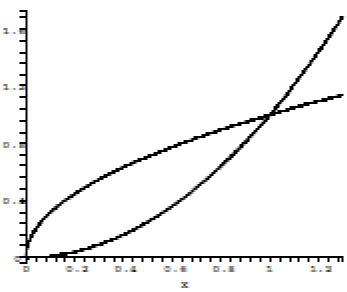
$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$



7. Area $= \int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)dx = \frac{27}{4}$



8. Area $= \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$



ت : 0505712489

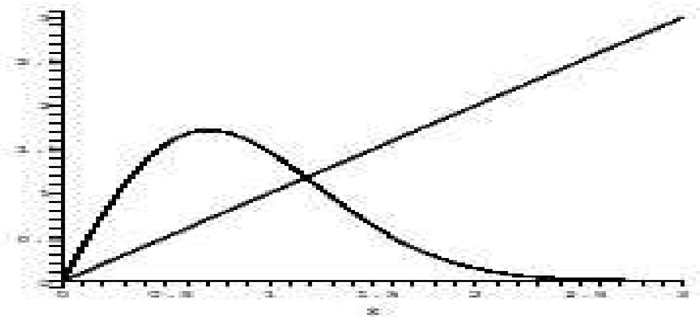
د: حيدر عامر السعافين

9. Area $= \int_0^{\sqrt{\ln 4}} \left(4xe^{-x^2} - x\right) dx$

$$= -2e^{-x^2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 4}}$$

$$= -2\left[\frac{1}{4} - 1\right] - \frac{\ln 4}{2}$$

$$= \frac{3 - \ln 4}{2}$$



10. Area $= \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{x^2+1} + x\right) dx$

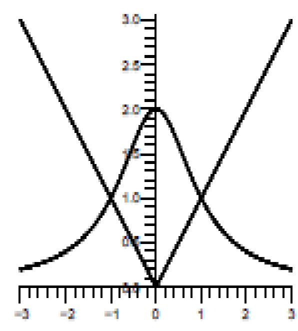
$$+ \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2+1} - x\right) dx$$

$$= (2\tan^{-1} x + \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{0}$$

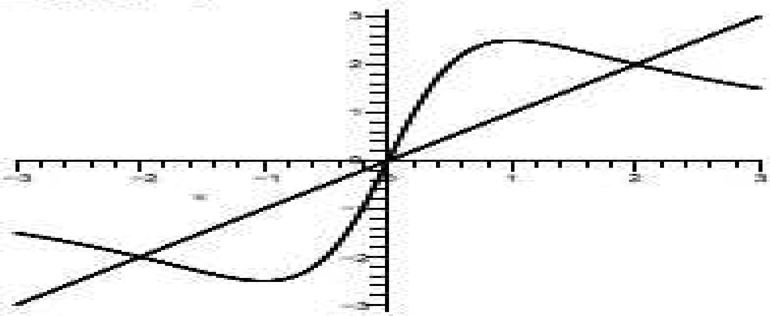
$$+(2\tan^{-1} x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

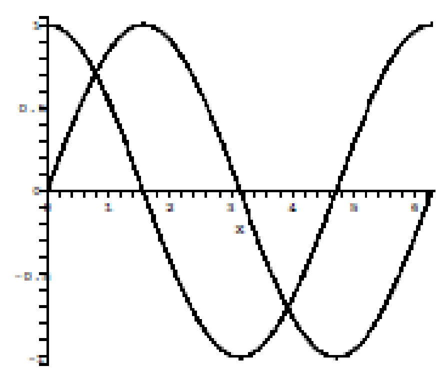
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$



11. $$\text{Area} = \int_{-2}^{0}\left[x - \frac{5x}{x^2+1}\right]dx + \int_{0}^{2}\left[\frac{5x}{x^2+1} - x\right]dx$$
$$= 2\int_{0}^{2}\left[\frac{5x}{x^2+1} - x\right]dx$$
$$= 2\left(\frac{5}{2}\ln|x^2+1| - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2$$
$$= 5[\ln 5 - \ln 1] - [4 - 0]$$
$$= 5\ln 5 - 4$$



12. $$\text{Area} = \int_{0}^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x - \cos x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi}(\cos x - \sin x)dx$$
$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\sin x + \cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi}$$
$$= 4\sqrt{2}$$



ت : 0505712489
د: حيدر عامر السعافين

في التمارين 18–13، ارسم وقدّر المساحة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات.

13. $y = e^x, y = 1 - x^2$

14. $y = x^4, y = 1 - x$

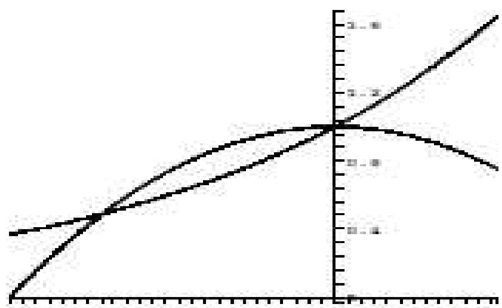
15. $y = \sin x, y = x^2$

16. $y = \cos x, y = x^4$

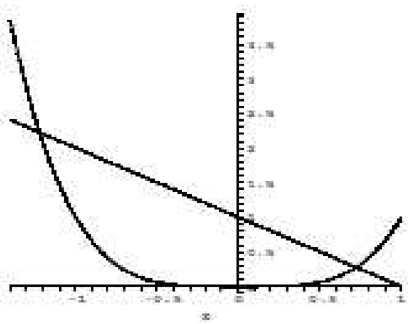
17. $y = x^4, y = 2 + x$

18. $y = \ln x, y = x^2 - 2$

13. $$\text{Area} = \int_{-.7145}^{0} (1 - x^2) - e^x \, dx$$
$$= \left(-e^x + x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-.7145}^{0}$$
$$= (-1 + 0 - 0) - (-1.08235)$$
$$= .08235$$



14. $$\text{Area} \approx \int_{-1.2207}^{0.72449} [(1 - x) - x^4] dx$$
$$\approx 1.845787$$



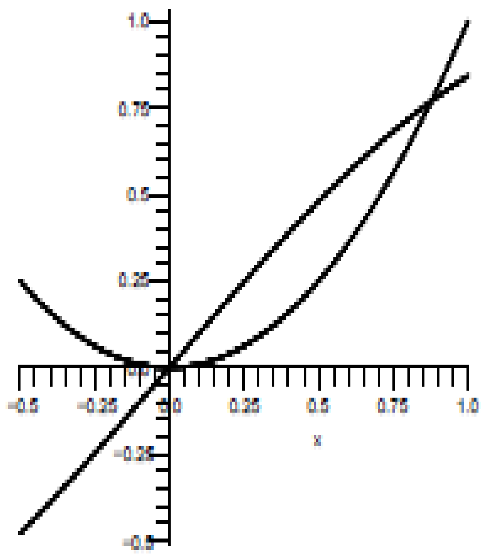
د: حيدر عامر السعافين

ت : 0505712489

15. $$\text{Area} = \int_0^{.8767} \left(\sin x - x^2\right) dx$$

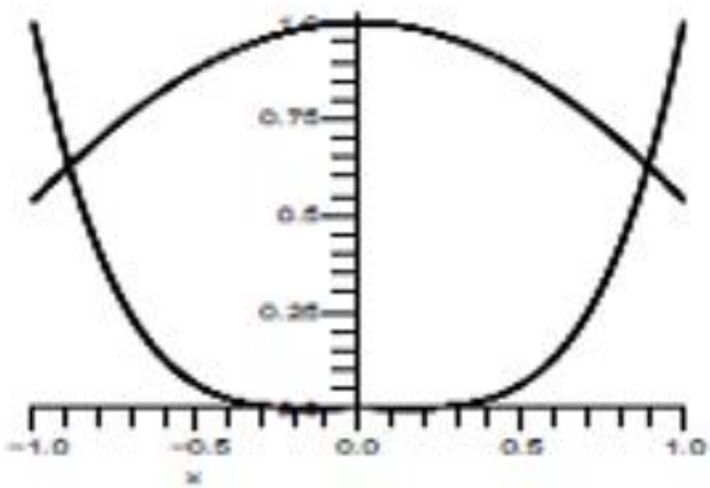
$$= \left(-\cos x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{.8767}$$

$$\approx .135697$$



16. $$\text{Area} \approx \int_{-.89055}^{0.89055} (\cos x - x^4) dx$$

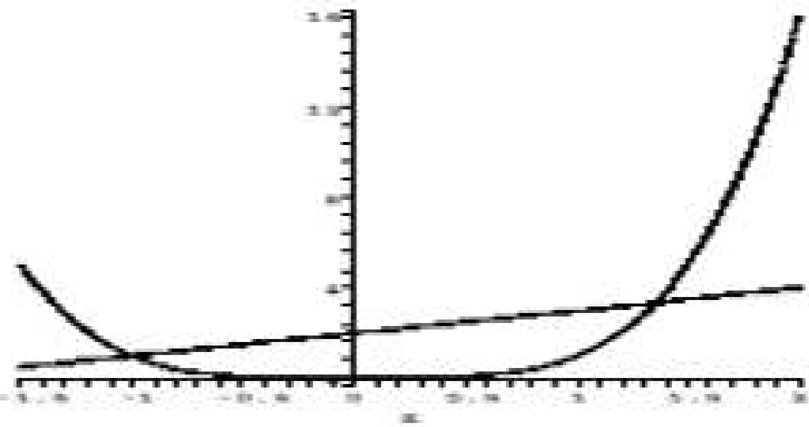
$$\approx 1.330782$$



17. Area $= \int_{-1}^{1.3532} (2 + x - x^4)\,dx$

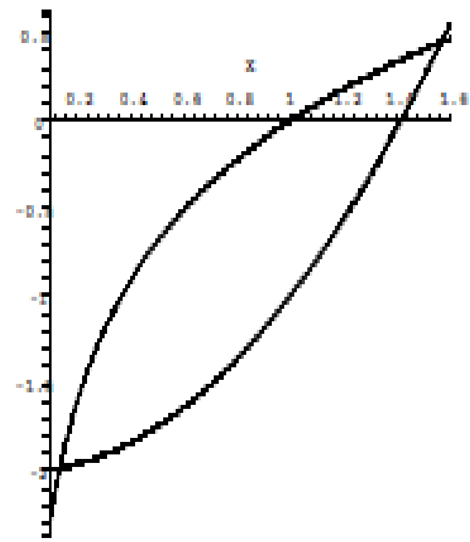
$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1.3532}$$

$$= 4.01449$$



18. Area $\approx \int_{0.13793}^{1.0646} \left[\ln x - \left(x^2 - 2\right)\right] dx$

≈ 1.124448



تمارين 2 – 6

حساب الحجم بالتكامل المحدود مع استخدام مساحة المقاطع العرضية

في التمارين 1–4، جـــد حجم المجسّم مع مساحة المقطع العرضي $A(x)$.

1. $A(x) = x + 2, -1 \le x \le 3$

2. $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \le x \le 10$

5.2 Volume: Slicing, Disks and Washers

1. $V = \int_{-1}^{3} A(x)dx = \int_{-1}^{3} (x+2)dx$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{9}{2} + 6\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= 12$$

2. $V = \int_{0}^{10} 10e^{0.01x} dx = \left(1000e^{0.01x}\right)\Big|_{0}^{10}$

$$= 1000(e^{0.1} - 1)$$

3. $A(x) = \pi(4-x)^2, 0 \le x \le 2$

4. $A(x) = 2(x+1)^2, 1 \le x \le 4$

3. $V = \pi \int_0^2 (4-x)^2 dx = -\frac{\pi}{3}(4-x)^3 \Big|_0^2$

$= -\frac{\pi}{3}(8-64) = \frac{56\pi}{3}$

4. $V = \int_1^4 2(x+1)^2 dx$

$= \int_1^4 (2x^2 + 4x + 2) dx = 78$

في التمارين 20-17، احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

17. المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x, y = 0$ و $x = 0$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 3$

17. (a) $V = \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx$

$$= -\pi \left(\frac{(2-x)^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

(b) $V = \pi \int_0^2 [3^2 - \{3 - (2-x)\}^2] dx$

$$= \pi \int_0^2 [9 - \{1+x\}^2] dx$$

$$= \pi \left[9x|_0^2 - \frac{(1+x)^3}{3} \Big|_0^2 \right]$$

$$= \pi \left[18 - \frac{3^3 - 1^3}{3} \right] = \frac{28\pi}{3}$$

19. المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{x}, y=2$ و $x=0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y=4$

19. (a) $V=\pi\int_0^2 (y^2)^2dy=\pi\int_0^2 y^4dy$

$$=\pi\left(\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}$$

(b) $V=\pi\int_0^2 (4)^2dy$

$$-\pi\int_0^2 (4-y^2)^2dy$$

$$=\pi\int_0^2 (-y^4+8y^2)dy$$

$$=\pi\left(-\frac{y^5}{5}+\frac{8y^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

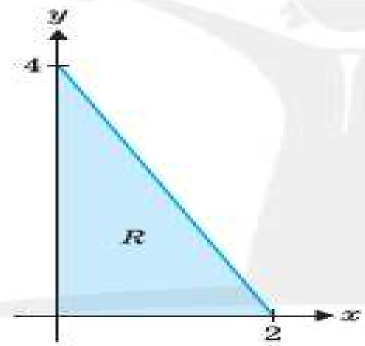
$$=\pi\left[\left(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}\right)-(0+0)\right]$$

$$=\frac{224\pi}{15}$$

25. لتكنْ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$

(d) $y = -4$ (e) $x = 2$ (f) $x = -2$



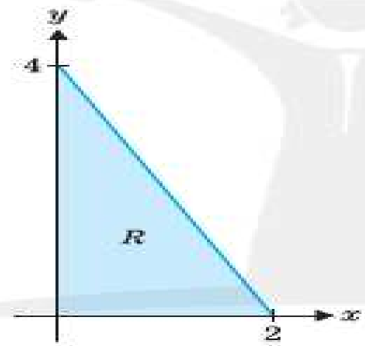
25. (a)
$$V = \int_0^4 \pi \left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^4 (16 - 8y + y^2)dy$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[16y - 4y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^4$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[64 - 64 + \frac{64}{3}\right] = \frac{16\pi}{3}$$

(b)
$$V = \int_0^2 \pi (4-2x)^2 dx$$
$$= \pi\int_0^2 (16 - 16x + 4x^2)dx$$
$$= \pi\left[16x - 16\frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2$$
$$= \pi\left[32 - 32 + \frac{32}{3}\right] = \frac{32\pi}{3}$$

25. لتكنْ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$

(d) $y = -4$ (e) $x = 2$ (f) $x = -2$



$$(c)\quad V = \int_0^2 \pi(4)^2 dx - \int_0^2 \pi(2x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16 - 4x^2) dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[32 - \frac{32}{3}\right] = \frac{64\pi}{3}$$

$$(d)\quad V = \int_0^2 \pi(8 - 2x)^2 dx - \int_0^2 \pi(4)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (64 - 32x + 4x^2 - 16) dx$$

$$= \pi \left[48x - 32\frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[96 - 64 + \frac{32}{3}\right] = \frac{128\pi}{3}$$

27. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $x = 1$

(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

27. (a) $$V = \int_0^1 \pi (1)^2 dy - \int_0^1 \pi \left(\sqrt{y}\right)^2 dy$$
$$= \pi \int_0^1 (1 - y) dy$$
$$= \pi \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(b) $$V = \int_0^1 \pi \left(x^2\right)^2 dx$$
$$= \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

(c) $$V = \int_0^1 \pi \left(1 - \sqrt{y}\right)^2 dy$$
$$= \pi \int_0^1 \left(1 - 2y^{1/2} + y\right) dy$$
$$= \pi \left(y - \frac{4}{3} y^{3/2} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

27. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $x = 1$

(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

$$\text{(d)}\quad V = \int_0^1 \pi(1)^2 dx - \int_0^1 \pi\left(1 - x^2\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(2x^2 - x^4\right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{7\pi}{15}$$

$$\text{(e)}\quad V = \int_0^1 \pi(2)^2 dy - \int \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 dy$$
$$= \pi \int_0^1 \left(3 - 2y^{1/2} - y\right) dy$$
$$= \pi \left(3y - \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{(f)}\quad V = \int_0^1 \pi\left(x^2 + 1\right)^2 dx$$
$$= - \int_0^1 \pi(1)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + 2x^2\right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{13\pi}{15}$$

د: حيدر عامر السعافين
ت : 0505712489

28. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x, y = -x$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور x (b) المحور y

(c) $y = 1$ (d) $y = -1$

28. (a) $V = \int_0^1 \pi x^2 dx = \frac{\pi}{3}$

(b) $V = \int_{-1}^0 \pi \left[1 - (1+y)^2\right] dy$

$+ \int_0^1 \pi \left[1 - (1-y)^2\right] dy$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

(c) $V = \int_0^1 \pi \left[(1+x)^2 - (1-x)^2\right] dx$

$= 2\pi$

(d) $V = \int_0^1 \pi \left[(1+x)^2 - (1-x)^2\right] dx$

$= 2\pi$

تمارين 4 – 6

إيجاد طول قوس من منحنى دالة في فترة معطاة باستخدام التكامل المحدود

إيجاد طول قوس من منحنى دالة في فترة معطاة باستخدام التكامل المحدود

في التمارين 14–5، احسب طول المنحنى بدقة.

5. $y = 2x + 1, 0 \le x \le 2$

6. $y = \ln(\sec x)$ between $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

5. This is a straight line segment from $(0, 1)$ to $(2, 5)$. As such, its length is

$$s = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

6. $$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= (\sin^{-1} x)\Big|_{-1}^{1} = \pi$$

د: حيدر عامر السعافين
ت : 0505712489

7. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \le x \le 2$

8. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 1 \le x \le 3$

7. $y'(x) = 6x^{1/2}$, the arc length integrand is $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+36x}$.

Let $u = 1 + 36x$ then

$$s = \int_1^2 \sqrt{1+36x}\,dx$$

$$= \int_{37}^{73} \sqrt{u}\left(\frac{du}{36}\right)$$

$$= \frac{2}{3(36)} u^{3/2}\Big|_{37}^{73}$$

$$= \frac{1}{54}(73\sqrt{73} - 37\sqrt{37})$$

$$\approx 7.3824$$

8. $$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (e^{2x} - e^{-2x})^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{e^{4x} - 1 + e^{-4x}}\,dx$$

$$\approx 3.056$$

9. $$y'(x) = \frac{2x}{4} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2$$

$$s = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

9. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \le y \le -1$

10. $x = e^{y/2} + e^{-y/2}, -1 \le y \le 1$

9. $y'(x) = \frac{2x}{4} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2$$

$$s = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \ln 2\right)$$

$$\approx 1.0965$$

10. $y'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x^{-2})$

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{\sqrt{x^8 + 6x^4 + 1}}{x^2}dx$$

$$\approx 5.152$$

11. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}, 1 \le x \le 4$

12. $y = 2\ln(4 - x^2), 0 \le x \le 1$

11. $x'(y) = \frac{y^3}{2} - \frac{1}{2y^3} = \frac{1}{2}\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right)$

$$1 + (x')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(y^6 - 2 + \frac{1}{y^6}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(y^6 + 2 + \frac{1}{y^6}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}(y^3 + \frac{1}{y^3})\right]^2$$

$$s = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$$

$$= -\frac{-1}{-2}\int_{-2}^{-1}\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{y^4}{4}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{2y^2}\Big|_{-2}^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{33}{16}$$

12. Here $x(y) = e^{y/2} + e^{-y/2}$

$$x'(y) = \frac{1}{2}\left(e^{y/2} - e^{-y/2}\right)$$

Now

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{y/2} - e^{-y/2}\right)\right]^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^{y/2} + e^{-y/2}\right) dy$$

$$= \int_{0}^{1}\left(e^{y/2} + e^{-y/2}\right) dy$$

$$= 2\left(e^{y/2} - e^{-y/2}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{e-1}{\sqrt{e}}\right)$$

ت : 0505712489 د: حيدر عامر السعافين

في التمارين 22–15، ضع تكامل طول المنحنى ثم قرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

13. $y = x^3, -1 \le x \le 1$ 14. $y = x^3, -2 \le x \le 2$

13. $y'(x) = \dfrac{x^{1/2}}{2} - \dfrac{x^{-1/2}}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^2$$

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3}\Big|_1^4 + \sqrt{x}\Big|_1^4$$

$$= \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$$

14. Here $f(x) = 2\ln(4 - x^2)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4x}{(4 - x^2)}$$

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(\frac{-4x}{(4 - x^2)}\right)^2 = \left(\frac{4 + x^2}{4 - x^2}\right)^2$$

$$\text{Now },\ s = \int_0^1 \left(\frac{4 + x^2}{4 - x^2}\right) dx = 2\ln(3) - 1$$

تمارين 4 – 6

حساب مساحة السطح الناتج عن دوران منطقة معينة باستخدام التكامل المحدود

في التمارين 36–29، ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من الدوران وقرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

(29) $y = x^2$، $0 \le x \le 1$، ثم دورانها حول المحور x

(30) $y = \sin x$، $0 \le x \le \pi$، ثم دورانها حول المحور x

29. $$S = 2\pi \int_0^1 y\,ds = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx \approx 3.8097$$

30. $$S = \int_0^{\pi} 2\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx \approx 14.42360$$

(31) $y = 2x - x^2$، $0 \le x \le 2$، ثم دورانها حول المحور x

(32) $y = x^3 - 4x$، $-2 \le x \le 0$، ثم دورانها حول المحور x

31. $$S = 2\pi \int_0^2 y\,ds = 2\pi \int_0^2 (2x - x^2)\sqrt{1 + (2 - 2x)^2}\,dx \approx 10.9654$$

32. $$S = \int_{-2}^{0} 2\pi (x^3 - 4x)\sqrt{1 + (3x^2 - 4)^2}\,dx \approx 67.06557$$

(33) $y = e^x$، $0 \le x \le 1$، ثم دورانها حول المحور x

(34) $y = \ln x$، $1 \le x \le 2$، ثم دورانها حول المحور x

33. $$S = 2\pi \int_0^1 y\,ds = 2\pi \int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx \approx 22.9430$$

34. $$S = \int_1^2 2\pi \ln x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx \approx 2.86563$$

(35) $y = \cos x$، $0 \le x \le \pi/2$، ثم دورانها حول المحور x

(36) $y = \sqrt{x}$، $1 \le x \le 2$، ثم دورانها حول المحور x

35. $$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} y\,ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \approx 7.2117$$

36. $$S = \int_1^2 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx \approx 8.28315$$

د: حيدر عامر السعافين ت : 0505712489

المقذوفات 5 – 6

حل مسائل تطبيقية فيزيائية على السرعة المتجهة

في التمارين 4–1، حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

1. أسقط جسم من ارتفاع 80 ft.

1. $y(0) = 80, y'(0) = 0$

2. أسقط جسم من ارتفاع 100 ft.

2. $y(0) = 100, y'(0) = 0$

3. أطلق جسم من ارتفاع 60 ft مع سرعة متجهة صعوداً 10 ft/s.

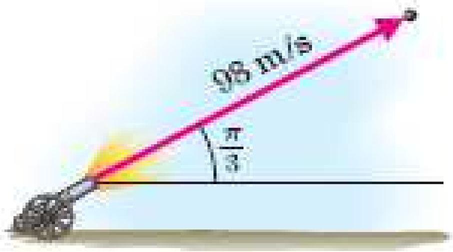
3. $y(0) = 60, y'(0) = 10$

4. أطلق جسم من ارتفاع 20 ft مع سرعة متجهة نزولاً 4 ft/s.

4. $y(0) = 20, y'(0) = -4$

حل مسائل تطبيقية على حركة المقذوفات

17. يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية 98 m/s. حدّد زمن التحليق والمدى الأفقي. قارن مع المثال 5.4.



17. The starting point is

$y'' = -9.8,\ y'(0) = 98\sin(\pi/3) = 49\sqrt{3}.$

We get $y(t) = -4.9t^2 + ty'(0)$

$= -4.9t(t - [v(0)/4.9])$

$= -4.9t(t - 10\sqrt{3})$

The flight time is $10\sqrt{3}$. As to the horizontal range, we have $x'(t)$ constant and forever equal to $98\cos(\pi/3) = 49$. Therefore $x(t) = 49t$ and in this case, the horizontal range is $49(10\sqrt{3})$ (meters).

18. جـــد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية °30 مع سرعة ابتدائية 40 m/s. كرر العملية مع زاوية °60.

18. Here $y'(0) = 40\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 20$

Therefore $y(t) = -4.9t^2 + 20t$
$= t(-4.9t + 20)$

$\Rightarrow$ the time of flight $= t = \dfrac{20}{4.9} = 4.082$

Now, for the horizontal range $x(t)$

$x'(t) = 40\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 20\sqrt{3}$

Therefore

$x(t) = 20\sqrt{3}t$ and

$x(4.082) = 20(1.7321)(4.082) = 141.3919$

Repeating the same for the angle 60^0

$y'(0) = 40\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 34.6410$

Therefore

$y(t) = -4.9t^2 + (34.6410)t$

$\Rightarrow y(t) = t(-4.9t + 34.6410)$

$\Rightarrow$ the time of flight $= t = \dfrac{34.6410}{4.9} = 7.0696$

Now, for the horizontal range $x(t)$

$x'(t) = 40\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 20$

Therefore $x(t) = 20t$ and

$x(7.0696) = 20(7.0696) = 141.3919$

د: حيدر عامر السعافين
ت : 0505712489

19. كرر المثال 5.5 مع زاوية ابتدائية °6. باستخدام التجربة والخطأ. جـــد أصغر وأكبر زاوية ستكون عندها رمية الإرسال.

19. This problem modifies Example 5.5 by using a service angle of 6° (where the Example 5.5 used 7°) and no other changes. Here the serve hits the net.

Next we want to find the range for which the serve will be in.

If θ is the angle, then the initial conditions are
$x'(0) = 176\cos\theta$, $x(0) = 0$
$y'(0) = 176\sin\theta$, $y(0) = 10$

Integrating $x''(t) = 0$ and $y''(t) = -32$, then using the initial conditions gives
$x'(t) = 176\cos\theta$
$x(t) = 176(\cos\theta)t$
$y'(t) = -32t + 176\sin\theta$
$y(t) = -16t^2 + 176(\sin\theta)t + 10$

To make sure the serve is in, we see what happens at the net and then when the ball hits the ground. First, the ball passes the net when $x = 39$ or when $39 = 176(\cos\theta)t$. Solving gives $t = \dfrac{39}{176\cos\theta}$ Plugging this in for the function $y(t)$ gives

$$y\left(\frac{39}{176\cos\theta}\right)$$
$$= -16\left(\frac{39}{176\cos\theta}\right)^2$$
$$+ 176(\sin\theta)\left(\frac{39}{176\cos\theta}\right) + 10$$
$$= -\frac{1521}{1936}\sec^2\theta + 39\tan\theta + 10$$

We want to ensure that this value is greater than 3 so we determine the values of θ that give $y > 3$ (using a graphing calculator or CAS). This restriction means that we must have $-0.15752 < \theta < 1.5507$

Next, we want to determine when the ball hits the ground. This is when $0 = y(t) = -16t^2 + 176(\sin\theta)t + 10$ We solve this equation using the quadratic formula to get

$$t = \frac{-176\sin\theta \pm \sqrt{176^2\sin^2\theta + 640}}{-32}$$

We are interested in the positive solution, so

$$t = \frac{176\sin\theta + \sqrt{176^2\sin^2\theta + 640}}{32}$$

Substituting this in to $x(t) = 176(\cos\theta)t$ gives

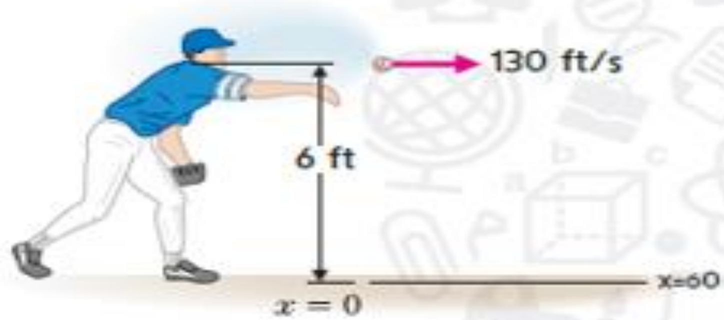
$$x = 44\cos\theta\left(22\sin\theta + \sqrt{484\sin^2\theta + 10}\right)$$

We want to determine the values of θ that ensure that $x < 60$. Using a graphing calculator or a CAS gives $\theta < -0.13429$

Putting together our two conditions on θ now gives the possible range of angles for which the serve will be in:

$-0.15752 < \theta < -0.13429$

21. يُطلق ضارب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 130 ft/s. جـــــد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسة على بعد 60 ft. (إرشاد: حدد زمن التحليق من المعادلة -x. ثم استخدم المعادلة -y لتحديد الارتفاع).



21. Let $(x(t), y(t))$ be the trajectory. In this case

$y(0) = 6, x(0) = 0$
$y'(0) = 0, x'(0) = 130$
$x''(t) \equiv 0, x'(t) \equiv 130$
$x(t) = 130t$

This is 60 at time $t = 6/13$. Meanwhile,

$y''(t) = -32, y'(t) = -32t$
$y(t) = -16t^2 + 6$

$$y\left(\frac{6}{13}\right) = -16\left(\frac{6}{13}\right)^2 + 6 = \frac{438}{169}$$

$$y\left(\frac{6}{13}\right) \approx 2.59 \text{ ft}$$

22. كرر التمرين 21 مع سرعة ابتدائية 80 ft/s (إرشاد: فسّر الإجابة السالبة بعناية).

22. If the initial speed is now 80 ft/s, the equations become

$x(t) = 80t$

$y(t) = -16t^2 + 6$

The ball crosses home plate when $x = 60$, or when $t = 3/4$. At the home plate, we then have,

$y(3/4) = -16(3/4)^2 + 6 = -3$

In other words, the ball is "under" the ground and the ball hits the ground before reaching

الوحدة السابعة

إيجاد تكاملات دوال متنوعة بصيغة مباشرة باستخدام الصيغ

7-1

في التمارين 1–40، جـــد قيمة التكامل.

1. $\int e^{ax}\, dx, a \neq 0$ 2. $\int \cos(ax)\, dx, a \neq 0$

1. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$, for $a \neq 0$.

2. $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$, for $a \neq 0$.

5. $\int \sin(6t) dt = -\frac{1}{6} \cos(6t) + c$

10. $\frac{2}{4+4x^2} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

17. $\int e^{3-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{3-2x} + c$

18. $\int 3e^{-6x}dx = -\frac{3}{6}e^{-6x} + c$

25. $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\, dx$

$= \sec x \Big|_{-\pi/4}^{0} = 1 - \sqrt{2}$

26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\, dx = -\cot x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1$

33. $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx$

$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

36. $\int_1^3 e^{2\ln x}dx = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{26}{3}$

38. $\int_0^1 x(x-3)^2 dx$

$= \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx$

$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{4}$

39. $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$

$= \int_1^4 x^{3/2}dx + \int_1^4 x^{-1/2}dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_1^4 + 2x^{1/2}\Big|_1^4 = \frac{72}{5}$

<u>إيجاد تكاملات دوال متنوعة باستخدام طريقة التعويض</u>

$$27. \quad \int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$$

Let $u = x^3,\ du = 3x^2dx$

$$\frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}u + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}x^3 + c$$

$$30. \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$$

Let $u = e^x,\ du = e^x dx$

$$\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$= \sin^{-1}u + C = \sin^{-1}e^x + c$$

د: حيدر عامر السعافين
ت : 0505712489

31. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Let $u = x^2, du = 2x dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}u + C = \frac{1}{2}\sin^{-1}x^2 + c$$

32. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

. Let $u = 1 - x^4, du = -4x^3 dx$

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$$

$$= -u^{1/2} + C = -(1-x^4)^{1/2} + c$$

في التمرينين 53 و 54، اذكر اسم الطريقة من تحديد ما إذا كان يمكن استخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة التكامل.

53. (a) $\int x \sin x^2 \, dx$

بالتعويض ويكون :

$u = x^2$

(b) $\int x^2 \sin x \, dx$

بالأجزاء (الجدولي)

(c) $\int x \ln x \, dx$

بالأجزاء (الجدولي)

(d) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

بالتعويض ويكون :

$u = \ln x$

54. (a) $\int x^3 e^{4x} \, dx$

بالأجزاء (الجدولي)

(b) $\int x^3 e^{x^4} \, dx$

بالتعويض ويكون :

$u = x^4$

(c) $\int x^{-2} e^{4/x} \, dx$

بالتعويض ويكون :

$u = \frac{1}{x}$

(d) $\int x^2 e^{-4x} \, dx$

بالأجزاء (الجدولي)

د: حيدر عامر السعافين

ت : 0505712489

في التمارين 56—61، استخدم الطريقة الموجودة بالتمرين 55 لإيجاد قيمة التكامل.

56. $\int x^4 \sin x \, dx$

	$\sin x$	
x^4	$-\cos x$	$+$
$4x^3$	$-\sin x$	$-$
$12x^2$	$\cos x$	$+$
$24x$	$\sin x$	$-$
24	$-\cos x$	$+$

$$\int x^4 \sin x dx$$
$$= -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x + 12x^2 \cos x$$
$$- 24x \sin x - 24 \cos x + c$$

57.

	$\cos x$	
x^4	$\sin x$	$+$
$4x^3$	$-\cos x$	$-$
$12x^2$	$-\sin x$	$+$
$24x$	$\cos x$	$-$
24	$\sin x$	$+$

$$\int x^4 \cos x dx$$
$$= x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x$$
$$- 24x \cos x + 24 \sin x + c$$

58. $\int x^4 e^x \, dx$

	e^x	
x^4	e^x	$+$
$4x^3$	e^x	$-$
$12x^2$	e^x	$+$
$24x$	e^x	$-$
24	e^x	$+$

$$\int x^4 e^x dx$$
$$= (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)e^x + c$$

59.

	e^{2x}	
x^4	$e^{2x}/2$	$+$
$4x^3$	$e^{2x}/4$	$-$
$12x^2$	$e^{2x}/8$	$+$
$24x$	$e^{2x}/16$	$-$
24	$e^{2x}/32$	$+$

$$\int x^4 e^{2x} dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{2x} + c$$

60.

	$\cos 2x$	
x^5	$\sin 2x/2$	$+$
$5x^4$	$-\cos 2x/4$	$-$
$20x^3$	$-\sin 2x/8$	$+$
$60x^2$	$\cos 2x/16$	$-$
$120x$	$\sin 2x/32$	$+$
120	$-\cos 2x/64$	$-$

$$\int x^5 \cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}x^5 \sin 2x \quad + \frac{5}{4}x^4 \cos 2x$$
$$- \frac{20}{8}x^3 \sin 2x - \frac{60}{16}x^2 \cos 2x$$
$$+ \frac{120}{32}x \sin 2x + \frac{120}{64} \cos 2x + c$$

61.

	e^{-3x}	
x^3	$-e^{-3x}/3$	$+$
$3x^2$	$e^{-3x}/9$	$-$
$6x$	$-e^{-3x}/27$	$+$
6	$e^{-3x}/81$	$-$

$$\int x^3 e^{-3x} dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}\right) e^{-3x} + c$$

في التمارين 1–44، جـــــد قيمة التكاملات.

1. $\int \cos x \sin^4 x \, dx$ 2. $\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$

1. Let $u = \sin x$, $du = \cos x dx$

$$\int \cos x \sin^4 x dx = \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

2. Let $u = \sin x, du = \cos x dx$

$$\int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int (1-u^2)u^4 du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

3. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x \, dx$

. Let $u = \sin 2x, du = 2\cos 2x dx.$

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

د: حيدر عامر السعافين

ت : 0505712489

4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$

Let $u = \cos 3x, du = -3 \sin x dx$.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\cos^3 3x)(\sin^3 3x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{2}}^{-1} u^3 (1-u^2)\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6}\right]_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{16} - \frac{7}{48}\right) = -\frac{1}{72}$$

5. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$

. Let $u = \cos x, du = -\sin x dx$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = \int_1^0 u^2(-du)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_1^0 = \frac{1}{3}$$

ت : 0505712489 د: حيدر عامر السعافين

6. $\int_{-\pi/2}^{0} \cos^3 x \sin x \, dx$

Let $u = \cos x, du = -\sin x dx$

$$\int_{-\pi/2}^{0} \cos^3 x \sin x dx = -\int_{0}^{1} u^3 du = -1$$

9. $\int \tan x \sec^3 x \, dx$

Let $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x dx$

$$\int \tan x \sec^3 x dx$$

$$= \int \tan x \sec x \sec^2 x dx$$

$$= \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} \sec^3 x + c$$

11. $\int x \tan^3(x^2+1) \sec(x^2+1)\, dx$

Let $u = x^2 + 1$, so that $du = 2x dx$.

$$\int x\tan^3(x^2+1)(\sec(x^2+1))\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \tan^3 u\,(\sec u)\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int [(\sec^2 u - 1)\tan u\,(\sec u)]\,du$$

Let $\sec u = t, dt = \tan u \sec u du$

$$= \frac{1}{2}\int (t^2-1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - t\right] + c$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sec^3 u}{3} - \sec u\right] + c$$
$$= \frac{1}{6}\sec^3(x^2+1) - \frac{1}{2}\sec(x^2+1) + c.$$

12. $\int \tan(2x+1)\sec^3(2x+1)\,dx$

ت : 0505712489 د: حيدر عامر السعافين

Let $u = 2x + 1$, so that $du = 2dx$.

$$\int \tan(2x+1).\sec^3(2x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \tan u.\sec u.\sec^2 u du$$
$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u \tan u \sec u du$$

Let $t = \sec u$, so that $dt = \tan u \sec u du$.

$$= \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right] + c$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sec^3 u}{3}\right] + c = \frac{1}{6}\sec^3(2x+1) + c.$$

 15. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x\, dx$

Let $u = \tan x, du = \sec^2 x dx$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x \sec^2 x dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \tan^4 x(1 + \tan^2 x)\sec^2 x dx$$
$$= \int_0^1 u^4(1+u^2)\,du$$
$$= \int_0^1 (u^4 + u^6)du = \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{12}{35}$$

16. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

Let $u = \tan x, du = \sec^2 x dx$.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x dx$$

$$= \int_{-1}^{1} u^4 du = \left.\frac{u^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} \, dx$

Let $x = 3\tan\theta, dx = 3\sec^2\theta d\theta$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$$
$$= \int \frac{27\tan^2\theta\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}d\theta$$
$$= \int 9\tan^2\theta\sec\theta d\theta$$
$$= 9\int(\sec^2\theta - 1)\sec\theta d\theta$$
$$= 9\int\sec^3\theta d\theta - 9\int\sec\theta d\theta$$
$$= \frac{9}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{9}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$
$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right| + c$$
$$= \frac{x\sqrt{9+x^2}}{2} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right| + c$$

34. $\int x^3\sqrt{8+x^2}\,dx$

Let $x = 2\sqrt{2}\tan\theta, dx = 2\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta$

$$\int x^3\sqrt{8+x^2}dx$$

$$= \int (16\sqrt{2}\tan^3\theta)(2\sqrt{2}\sec\theta)d\theta$$

$$= 64\int \tan^3\theta\sec\theta\, d\theta$$

$$= 64\int (\sec^2\theta - 1)(\sec\theta\tan\theta\, d\theta)$$

$$= 64\int (u^2-1)du = \frac{64}{3}u^3 - 64u + c$$

$$= \frac{64}{3}\sec^3\theta - 64\sec\theta + c$$

$$= \frac{64}{3}\left(\frac{\sqrt{8+x^2}}{2\sqrt{2}}\right)^3 - 64\left(\frac{\sqrt{8+x^2}}{2\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}(8+x^2)^{3/2} - 16\sqrt{2}(8+x^2)^{1/2} + c$$

35. $\int \sqrt{16+x^2}\, dx$

Let $x = 4\tan\theta, dx = 4\sec^2\theta d\theta$

$$\int \sqrt{16+x^2}dx$$
$$= \int \sqrt{16+16\tan^2\theta}\cdot 4\sec^2\theta d\theta$$
$$= 16\int \sec^3\theta d\theta$$
$$= 16\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta\right)$$
$$= 8\sec\theta\tan\theta + 8\int \sec\theta d\theta$$
$$= 8\sec\theta\tan\theta + 8\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$
$$= \frac{1}{2}x\sqrt{16+x^2}$$
$$+ 8\ln\left|\frac{1}{4}\sqrt{16+x^2}+\frac{x}{4}\right| + c$$

36. $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

Let $x = 2\tan\theta, dx = 2\sec^2\theta d\theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}d\theta$$

$$= \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right| + c$$

38. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^2+9}\,dx$

Let $x = 3\tan\theta, dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$

$$I = \int x^2\sqrt{x^2+9}dx$$

$$= \int 27\tan^2\theta\sec^2\theta\sqrt{9\tan^2\theta+9}dx$$

$$= 81\int \tan^2\theta\sec^3\theta dx$$

$$= 81\int (\sec^2\theta - 1)\sec^3\theta dx$$

$$= \frac{17\sqrt{13}}{4} - \frac{81}{8}\ln\left|\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right|$$

39. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

. Let $x = \tan\theta, dx = \sec^2\theta d\theta.$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \left(\frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\right)\sec^2\theta d\theta$$

$$= \int \left(\tan^2\theta\right)\left(\tan\theta\sec\theta\right)d\theta$$

Let $t = \sec\theta,\ dt = \tan\theta\sec\theta d\theta.$

$$= \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\tan\theta\sec\theta d\theta$$

$$= \int (t^2-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right] + c$$

$$= \left[\frac{\sec^3\theta}{3} - \sec\theta\right] + c$$

$$= \left[\frac{\sec^3\left(\tan^{-1}x\right)}{3} - \sec\left(\tan^{-1}x\right)\right] + c.$$

40. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

Let $x = 2\tan\theta, d\theta = (2\sec^2\theta)\,d\theta.$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}}dx$$
$$= \int \left(\frac{2\tan\theta+1}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\right) 2\sec^2\theta d\theta$$
$$= \int \left(\frac{2\tan\theta+1}{2\sec\theta}\right) (2\sec^2\theta)\,d\theta$$
$$= \int (2\tan\theta+1)(\sec\theta)\,d\theta$$
$$= 2\int \sec\theta\tan\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta$$
$$= 2\sec\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$
$$= 2\sec\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \ln\left|\sec\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right| + c$$
$$= 2\sec\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$
$$+ \ln\left|\sec\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \left(\frac{x}{2}\right)\right| + c.$$

إجابات هيكل الرياضيات 2023 - 2024

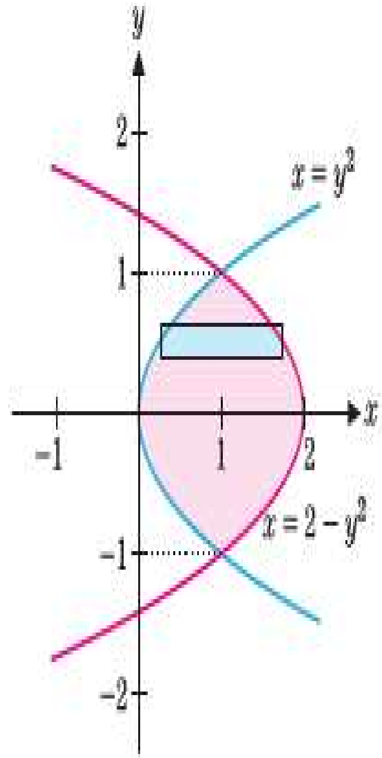
الصـــــــــف : الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي : الثالــــــــــث

ثانياً : الورقــــي

1-6 إيجاد مساحة منطقة كتكامل محدود بمعلومية y عوض عن x

د: حيدر عامر السعافين
ت : 0505712489



الشكل 6.10

$x = y^2$ و $x = 2 - y^2$

المثال 1.6 **مساحة منطقة محدودة بدوال y**

جـــد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$.

الحل من الشكل 6.10، لاحظ أنّه من الأسهل حساب هذه المساحة بالتكامل بالنسبة إلى y، نظرًا إلى أنّ التكامل بالنسبة إلى x يتطلب منا تقطيع المنطقة إلى جزأين. ويتقاطع المنحنيين عندما $y^2 = 2 - y^2$، أو $y^2 = 1$، ومنها $y = \pm 1$. على الفترة $[-1, 1]$، لاحظ أنّ $2 - y^2 \geq y^2$ (نظرًا إلى أنّ المنحنى $x = 2 - y^2$ يظل على يمين المنحنى $x = y^2$). لذا، من (1.2)، تُعطى المساحة من العلاقة

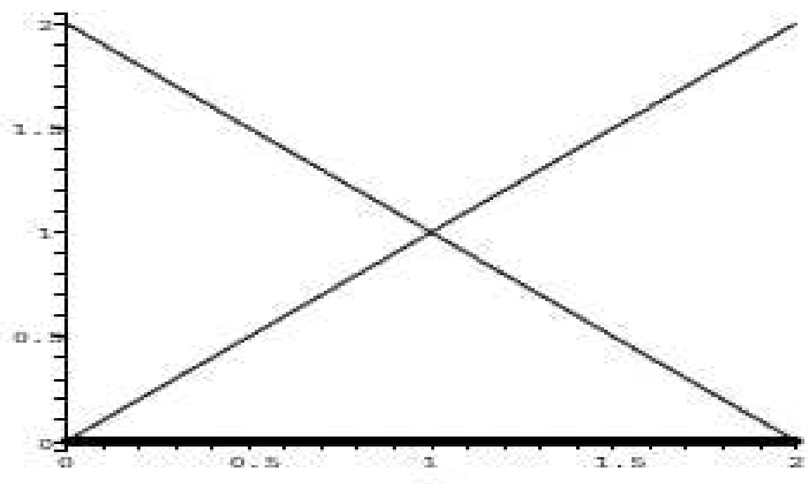
$$A = \int_{-1}^{1} [(2 - y^2) - y^2]\, dy = \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\, dy$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

في التمارين 26–19، ارسم وجـــد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات المُعطاة. اخترْ متغيّر التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد. تحقق من إجاباتك على التمارين 21–19 باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة.

19. $y = x, y = 2 - x, y = 0$

19. $$\text{Area} = \int_0^1 [(2-y)-y]dy$$
$$= \int_0^1 [2-2y]dy$$
$$= (2y - y^2)\Big|_0^1$$
$$= 1 - 0 = 1$$



$$\text{Area of triangle} = \tfrac{1}{2}(base)(height)$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot(2)\cdot(1) = 1$$

20. $y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$

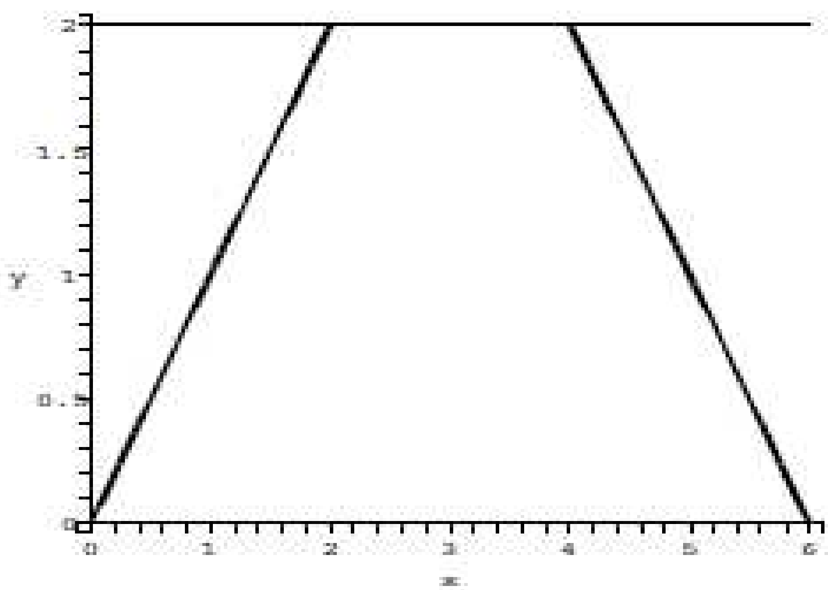
20. Area $= \int_0^2 [(6-y) - y]dy$

$= \int_0^2 (6-2y)dy$

$= (6y - y^2)\Big|_0^2$

$= (12-4) - (0-0)$

$= 8$



Area of Trapazium $= \frac{1}{2}(a+b)(h)$

$= \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (2) = 8$

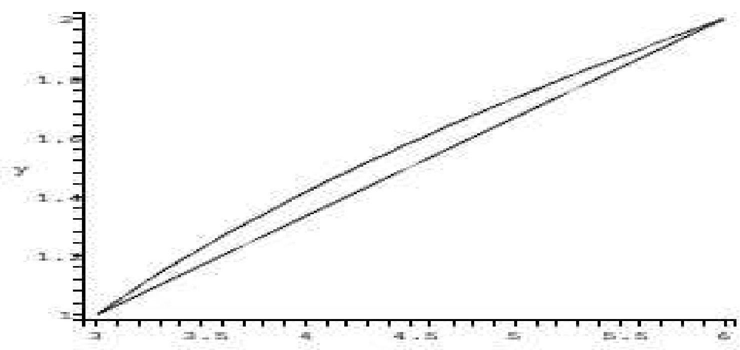
22. $x = 3y, x = 2 + y^2$

22. Area $= \int_1^2 [3y - (2 + y^2)]\,dy$

$$= \left(\frac{3}{2}y^2 - 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

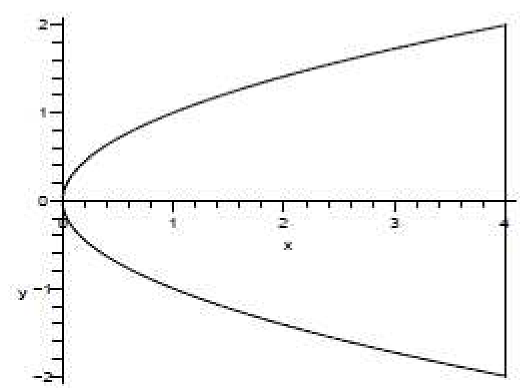
$$= \left(6 - 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$



24. $x = y^2, x = 4$

24. Area $= \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\,dy = \frac{32}{3}$



ت : 0505712489

د: حيدر عامر السعافين

2-6 إيجاد حجم مجسم باستخدام طريقة الحلقات

في التمارين 20–17، احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

17. المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x, y = 0$ و $x = 0$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 3$

17. (a) $V = \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx$

$$= -\pi \left(\frac{(2-x)^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

(b) $V = \pi \int_0^2 [3^2 - \{3 - (2-x)\}^2] dx$

$$= \pi \int_0^2 [9 - \{1+x\}^2] dx$$

$$= \pi \left[9x|_0^2 - \frac{(1+x)^3}{3} \Big|_0^2 \right]$$

$$= \pi \left[18 - \frac{3^3 - 1^3}{3} \right] = \frac{28\pi}{3}$$

19. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = 4$

19. (a) $V = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy$

$$= \pi \left(\frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

(b) $V = \pi \int_0^2 (4)^2 dy$

$$- \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 (-y^4 + 8y^2) dy$$

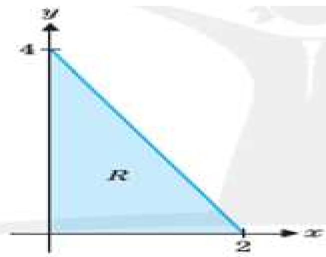
$$= \pi \left(-\frac{y^5}{5} + \frac{8y^3}{3} \right) \Big|_0^2$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} \right) - (0+0) \right]$$

$$= \frac{224\pi}{15}$$

25. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$



(a)
$$V = \int_0^4 \pi\left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\int_0^4 (16 - 8y + y^2)\,dy = \frac{\pi}{4}\left[16y - 4y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{\pi}{4}\left[64 - 64 + \frac{64}{3}\right] = \frac{16\pi}{3}$$

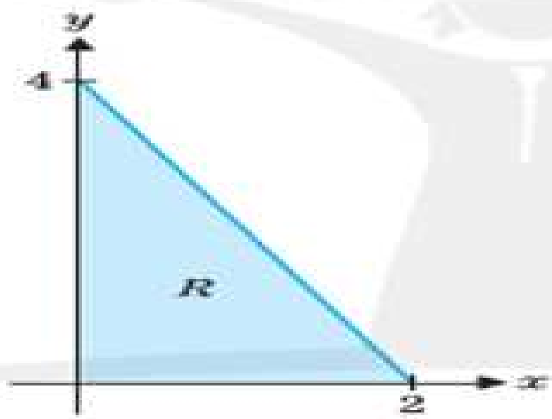
(b)
$$V = \int_0^2 \pi(4-2x)^2 dx = \pi\int_0^2 (16 - 16x + 4x^2)\,dx = \pi\left[16x - 16\frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \pi\left[32 - 32 + \frac{32}{3}\right] = \frac{32\pi}{3}$$

(c)
$$V = \int_0^2 \pi(4)^2 dx - \int_0^2 \pi(2x)^2 dx = \pi\int_0^2 (16 - 4x^2)\,dx = \pi\left[16x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \pi\left[32 - \frac{32}{3}\right] = \frac{64\pi}{3}$$

د: حيدر عامر السعافين ت : 0505712489

25. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

$x = -2$ (f) $x = 2$ (e) $y = -4$ (d)



(d) $$V = \int_0^2 \pi(8-2x)^2 dx - \int_0^2 \pi(4)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (64 - 32x + 4x^2 - 16) dx$$

$$= \pi \left[96 - 64 + \frac{32}{3}\right] = \frac{128\pi}{3}$$

$$= \pi \left[48x - 32\frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[96 - 64 + \frac{32}{3}\right] = \frac{128\pi}{3}$$

(e) $$V = \int_0^4 \pi(2)^2 dy - \int_0^4 \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{1}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[16 - \frac{16}{3}\right] = \frac{32\pi}{3}$$

(f) $$V = \int_0^4 \pi\left(\frac{8-y}{2}\right)^2 dy - \int_0^4 \pi(2)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\frac{64 - 16y + y^2}{4} - 4\right) dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[64y - 16\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - 16y\right]_0^4$$

$$= \pi \left[64 + \frac{64}{3}\right] = \frac{256\pi}{3}$$

ت : 0505712489

د: حيدر عامر السعافين

27. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2, y=0$ و $x=1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $x=1$

$$\text{(a)}\quad V=\int_0^1 \pi(1)^2 dy-\int_0^1 \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 dy$$
$$=\pi\int_0^1 (1-y)dy$$
$$=\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{(b)}\quad V=\int_0^1 \pi\left(x^2\right)^2 dx$$
$$=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

$$\text{(c)}\quad V=\int_0^1 \pi\left(1-\sqrt{y}\right)^2 dy$$
$$=\pi\int_0^1 \left(1-2y^{1/2}+y\right)dy$$
$$=\pi\left(y-\frac{4}{3}y^{3/2}+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

27. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

$$\text{(d)}\quad V = \int_0^1 \pi(1)^2 dx - \int_0^1 \pi\left(1 - x^2\right)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(2x^2 - x^4\right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{7\pi}{15}$$

$$\text{(e)}\quad V = \int_0^1 \pi(2)^2 dy - \int \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 dy$$
$$= \pi \int_0^1 \left(3 - 2y^{1/2} - y\right) dy$$
$$= \pi \left(3y - \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{(f)}\quad V = \int_0^1 \pi\left(x^2 + 1\right)^2 dx$$
$$= -\int_0^1 \pi(1)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + 2x^2\right) dx$$
$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{13\pi}{15}$$

د: حيدر عامر السعافين

ت : 0505712489

28. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x, y = -x$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور x (b) المحور y

$$\text{(a)}\quad V = \int_0^1 \pi x^2 dx = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{(b)}\quad V = \int_{-1}^0 \pi \left[1 - (1+y)^2\right] dy + \int_0^1 \pi \left[1 - (1-y)^2\right] dy = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

(c) $y = 1$ (d) $y = -1$

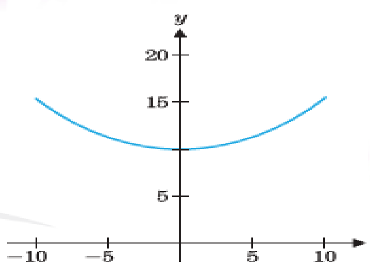
$$\text{(c)}\quad V = \int_0^1 \pi \left[(1+x)^2 - (1-x)^2\right] dx = 2\pi$$

$$\text{(d)}\quad V = \int_0^1 \pi \left[(1+x)^2 - (1-x)^2\right] dx = 2\pi$$

23. في المثال 4.4، احسب قيمة "الارتخاء" الموجودة في الكابل– التي تشكّل الفرق بين قيم y في الوسط $(x = 0)$ وعند العمودين $(x = 10)$. على أساس ذلك، هل كان حساب طول المنحنى مثيرًا للدهشة؟

المثال 4.4 حساب طول كابل معلق بين عمودين

لربط كابل بين عمودين متساويين في الارتفاع والبعد بينهما 20 m. يمكن توضيح أنّ مثل هذا الكابل المعلق معادلته سلسلة، وعموماً معادلته $y = a\cosh x/a = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. في هذه الحالة، على فرض أنّ الكابل يتخذ شكل $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$، لأجل $-10 \le x \le 10$، كما هو ظاهر في الشكل 6.37. كم يبلغ طول هذا الكابل؟



hhhhhhhhh

3. Here $f(x) = 10\left(e^{x/20} + e^{-x/20}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{10}{20}\left(e^{x/20} - e^{-x/20}\right)$$

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\left(e^{x/20} - e^{-x/20}\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(e^{x/20} + e^{-x/20}\right)\right)^2$$

Now,

$$s = \int_{-20}^{20} \frac{1}{2}\left(e^{x/20} + e^{-x/20}\right) dx$$

$$= \int_{0}^{20} \left(e^{x/20} + e^{-x/20}\right) dx$$

$$= 20\left(e^{x/20} - e^{-x/20}\right)\Big|_0^{20}$$

$$= 20\left(e - e^{-1}\right) \approx 47.0080$$

9. $\int e^x \sin 4x\,dx$

Let $I = \int e^x \sin 4x dx$

$u = e^x,\ dv = \sin 4x dx$

$du = e^x dx,\ v = -\frac{1}{4}\cos 4x$

$$I = -\frac{1}{4}e^x \cos 4x - \int \left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) e^x dx$$
$$= -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 4x dx$$

Use integration by parts again, this time let

$u = e^x,\ dv = \cos 4x dx$

$du = e^x dx,\ v = \frac{1}{4}\sin 4x$

$$I = -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^x \sin 4x - \int \frac{1}{4}(\sin 4x)e^x dx\right)$$

$$I = -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{16}e^x \sin 4x - \frac{1}{16}I$$

So,

$$\frac{17}{16}I = -\frac{1}{4}e^x \cos 4x + \frac{1}{16}e^x \sin 4x + c_1$$

$$I = -\frac{4}{17}e^x \cos 4x + \frac{1}{17}e^x \sin 4x + c$$

10. $\int e^{2x} \cos x \, dx$

Let, $u = e^{2x}$, $dv = \cos x \, dx$ so that,
$du = 2e^{2x} \, dx$ and $v = \sin x$.

$\int e^{2x} \cos x \, dx - \int$

$= e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx$

Let, $u = e^{2x}$, $dv = \sin x \, dx$ so that,
$du = 2e^{2x} \, dx$ and $v = -\cos x$.

$\int e^{2x} \sin x \, dx$

$= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx$

$\int e^{2x} \cos x \, dx$

$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx$

Now we notice that the integral on both of these is the same, so we bring them to one side of the equation.

$5 \int e^{2x} \cos x \, dx$

$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x + c_1$

$\int e^{2x} \cos x \, dx$

$= \frac{1}{5} e^{2x} \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + c$

$$11. \quad \int \cos x \cos 2x \, dx$$

Let $I = \int \cos x \cos 2x dx$
and $u = \cos x, dv = \cos 2x dx$
$du = \sin x dx, \; v = \frac{1}{2} \sin 2x$
$I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x (-\sin x) dx$
$= \frac{1}{2} \cos x \sin 2x + \frac{1}{2} \int \sin x \sin 2x dx$
Let, $u = \sin x, dv = \sin 2x dx$

$du = \cos x dx \;\; v = -\frac{1}{2} \cos 2x$
$I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \sin x \right.$
$\left. - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \cos x dx \right]$
$= \frac{1}{2} \cos x \sin 2x \quad - \frac{1}{4} \cos 2x \sin x + \frac{1}{4} I dx$
So,
$\frac{3}{4} I = \frac{1}{2} \cos x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \sin x + c_1$
$I = \frac{2}{3} \cos x \sin 2x - \frac{1}{3} \cos 2x \sin x + c$

14. $\int (\ln x)^2\, dx$

Let $u = (\ln x)^2,\ dv = dx$

$du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx,\ v = x$

$I = \int (\ln x)^2 dx$

$= x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\dfrac{\ln x}{x}dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx$

Integration by parts again,

$u = \ln x,\ dv = dxdu = \dfrac{1}{x}dx,\ v = x$

$I = x(\ln x)^2 - 2\left[x\ln x - \int x \cdot \dfrac{1}{x}dx\right]$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int dx$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$$

$$\textbf{21.}\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

. Let $x = 3\sin\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta d\theta = -\frac{1}{9}\cot\theta + C$$

By drawing a diagram, we see that if

$x = \sin\theta$, then $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.

Thus the integral $= -\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$

$$\textbf{22.}\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

Let $x = 4\sin\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$dx = 4\cos\theta d\theta$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}dx = \int \frac{\cos\theta}{16\sin^2\theta\cos\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \csc^2\theta d\theta = -\frac{1}{16}\cot\theta + c$$

$$= -\frac{\sqrt{16-x^2}}{16x} + c$$

ت : 0505712489 د: حيدر عامر السعافين

$$23.\quad \int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

Let $x = 4\sin\theta$, so that $dx = 4\cos\theta d\theta$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx = \int \frac{(16\sin^2\theta)\,4\cos\theta}{\sqrt{16-(4\sin\theta)^2}}d\theta$$

$$= 64\int \frac{(\sin^2\theta)\cos\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}d\theta$$

$$= 64\int \frac{(\sin^2\theta)\cos\theta}{4\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}d\theta$$

$$= 16\int \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos\theta}d\theta = 16\int \sin^2\theta d\theta$$

$$= 16\int \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 8\left[\int d\theta - \int(\cos 2\theta)\,d\theta\right]$$

$$= 8\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$$

$$= 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - 4\sin\left[2\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right] + c.$$

$$= 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + c$$

ت : 0505712489 د: حيدر عامر السعافين

24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

Let $x = 3\sin\theta$, so that $dx = 3\cos\theta d\theta$.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$$
$$= \int \frac{27\left(\sin^3\theta\right)}{\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}}(3\cos\theta)\,d\theta$$
$$= 81\int \frac{\sin^3\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}(\cos\theta)\,d\theta$$
$$= 81\int \left(\frac{\sin^3\theta}{3\cos\theta}\right)\cos\theta d\theta = 27\int \sin^3\theta d\theta$$
$$= 27\int \left(\frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}\right)d\theta$$

$$= \frac{27}{4}\left[3\int \sin\theta d\theta - \int \sin 3\theta d\theta\right]$$
$$= \frac{27}{4}\left[-3\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{3}\right] + c$$
$$= \frac{27}{4}\left\{-3\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + \frac{\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]}{3}\right\} + c.$$

ت : 0505712489

د: حيدر عامر السعافين