تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف أوراق عمل ملخص الدرس الثاني الدوال العكسية مع الحل

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول

1	رياضيات متكاملة دليل المعلم
2	دليل المعلم
3	الفصل الاول الوحدة الأولى المتباينات غير الخطية
4	جميع أوراق عمل
5	مراجعة نهائية قبل الامتحان

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Inverse Functions الدوال العكسية (1-2)

➢ يكون للدالة $f(x)$ دالة عكسية $f^{-1}(x)$ إذا حققت الشرطان التاليان:

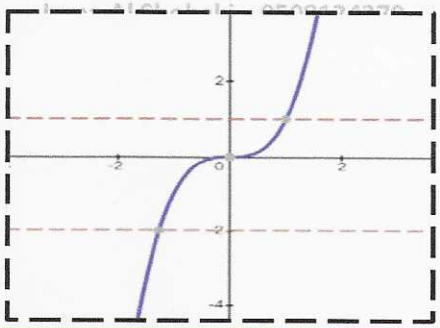
1) الدالة $f(x)$ هي دالة واحد لواحد (أي أنّ كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر) - نظرية 2.1 -

2) $f(g(x)) = x$ ، لكل قيم (x) تنتمي لمجال $g(x)$

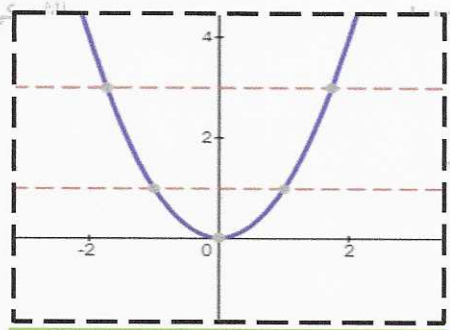
$g(f(x)) = x$ ، لكل قيم (x) تنتمي لمجال $f(x)$

- **The function $f(x)$ has an Inverse function $f^{-1}(x)$ If the following two conditions are met:**
  1) **It's one-to-one (every horizontal line intersects the curve of the function at one point at most)**
  2) $f(g(x)) = x$, $for\ all\ x \in domain\ of\ g(x)$

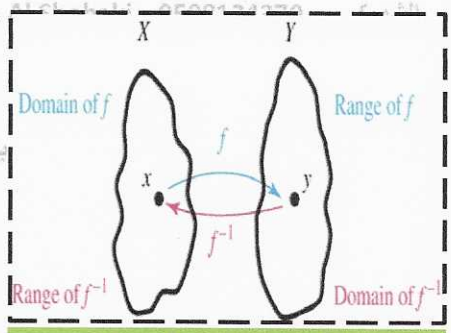
  $g(f(x)) = x$, $for\ all\ x \in domain\ of\ f(x)$



لا يفشل اختبار الخط الأفقي $\overset{\text{إذن}}{\Leftarrow}$ واحد لواحد



يفشل اختبار الخط الأفقي $\overset{\text{إذن}}{\Leftarrow}$ ليست واحد لواحد



للدالة $f(x)$ دالة عكسية $f^{-1}(x)$

➢ عندها فإنّ الرمز $f^{-1}(x)$ يعني دالة عكسية لـِ $f(x)$ ، ولكنه لا يعني $\frac{1}{f(x)}$ (أي مقلوب الدالة أو المعكوس الضربي لـِ $f(x)$)

حيث $\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$ ، و $\overset{\text{إذن}}{\Leftarrow}$ $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

- **The symbol $f^{-1}(x)$ means the inverse of $f(x)$, but it does not mean $\frac{1}{f(x)}$ (The reciprocal of the function or the multiplicative inverse of $f(x)$), where $\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$, and $\overset{so}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$**

✓ من خصائص الدوال العكسية:

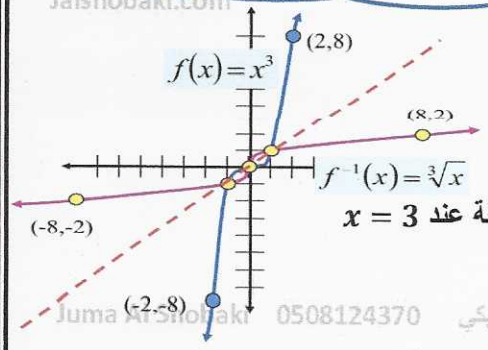
1) مجال الدالة $f(x)$ = مدى الدالة $f^{-1}(x)$

ومدى الدالة $f(x)$ = مجال الدالة $f^{-1}(x)$ أي أنّه إذا كانت $f(a) = b$ ، فإنّ $f^{-1}(b) = a$

2) (لكل قيم (x) في مجال f) ، $f^{-1}(f(x)) = x$

(لكل قيم (x) في مجال f^{-1}) ، $f(f^{-1}(x)) = x$

3) الرسم للدالة ومعكوسها متماثل حول $(y = x)$



4) إذا كانت (f) لا تقطع على سبيل المثال المستقيم $y = 3$ ، فإنّ $f^{-1}(x)$ ليست معرّفة عند $x = 3$

5) لنجد القيود على الدالة العكسية وجب أن نجد مدى الدالة الأصلية

6) لإيجاد نقطة التقاطع بين f ومعكوسها f^{-1} إن وجدت، فإنّنا نستطيع الحل كالآتي:

1) $f(x) = f^{-1}(x)$ 2) $f(x) = x$ 3) $f^{-1}(x) = x$

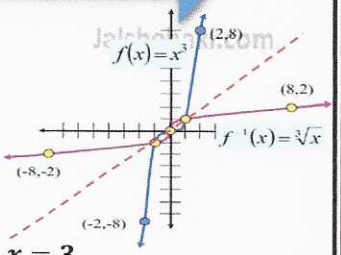
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

- **Properties of Inverse Functions:**

1) Domain of the function $f(x)$ = Range of the function $f^{-1}(x)$

Range of the function $f(x)$ = Domain of the function $f^{-1}(x)$

If $f(a) = b$, then $f^{-1}(b) = a$



2) (for all values of (x) in the domain of f) , $f^{-1}(f(x)) = x$

(for all values of (x) in the domain of f^{-1}) , $f(f^{-1}(x)) = x$

3) The graph of the function and its inverse is symmetric about $(y = x)$

4) If (f) does not intersect for example the line $y = 3$, then $f^{-1}(x)$ is not defined at $x = 3$

5) To find the constraints on the inverse function, we must find the range of the original function

6) To find the point of intersection between f and its inverse f^{-1} , if any, we can solve as follows:

1) $f(x) = f^{-1}(x)$ 2) $f(x) = x$ 3) $f^{-1}(x) = x$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

* ملاحظات:

لمعرفة ما إذا كانت الدالة واحد لواحد جبرياً نساوي الدالة بالصفر، فإذا كان لها أكثر من صفر فهي ليست واحد لواحد

إذا كانت (f) متصلة $[a, b]$ ، وكانت متزايدة أو متناقصة فإنّ لها دالة عكسية f^{-1}

الدوال الفردية متماثلة حول نقطة الأصل وهي دوال واحد لواحد

الدوال الفردية تحقّق $f(-x) = -f(x)$

الدوال الزوجية متماثلة حول (y) ، وهي ليست دوال واحد لواحد على R ، وقد يكون لها معكوس على فترة معينة

الدوال الزوجية تحقّق $f(-x) = f(x)$

إذا لم تكن الدالة متماثلة حول (y) أو حول نقطة الأصل فهي لا زوجية ولا فردية

- **Notes:**

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

To find out if the function is one to one algebraically we set the function to zero, if it has more than zero then it is not one to one

If (f) is continuous $[a, b]$, and it is increasing or decreasing, then it has an inverse function f^{-1}

The odd functions are symmetric about the origin and are one-to-one functions

Odd functions verify $f(-x) = -f(x)$

Even functions are symmetric about (y) , which are not one-to-one functions on R , and may have an inverse over a given interval

Even functions verify $f(-x) = f(x)$

If the function is not symmetric about (y) or about the origin then it is neither even nor odd

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Find the Inverse function of $f(x) = x^3 - 2$?

س1) جد معكوس الدالة $f(x) = x^3 - 2$ ؟

$y = x^3 - 2$

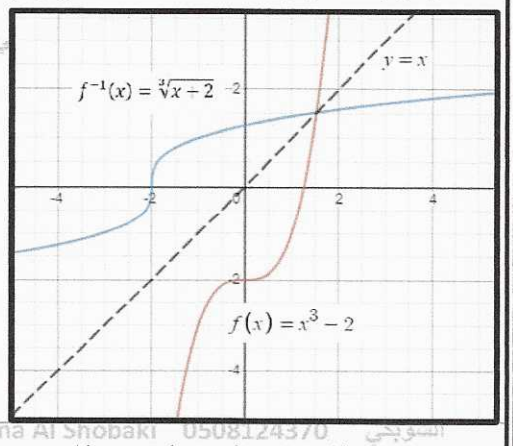
$x = y^3 - 2$ ← نبدّل المتغيرات

$-y^3 = -2 - x$ ← نحلّ بالنسبة لـ y

$y^3 = x + 2$

$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x+2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+2}$

$\therefore y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$



Show that $g(f(x)) = x$ and $f(g(x)) = x$ for all x ?

س2) بين أنّ $g(f(x)) = x$ ، وأنّ $f(g(x)) = x$ لكل قيم x ؟

A) $f(x) = x^5$, $g(x) = x^{\frac{1}{5}}$

$f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{5}}) = (x^{\frac{1}{5}})^5 = x$ ✓

$g(f(x)) = g(x^5) = (x^5)^{\frac{1}{5}} = x$ ✓

B) $f(x) = 2x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}) = 2(\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}})^3 + 1 = 2(\frac{x-1}{2}) + 1 = x - 1 + 1 = x$ ✓

$g(f(x)) = g(2x^3+1) = \sqrt[3]{\frac{2x^3+1-1}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$ ✓

س3) حدّد ما إذا كان للدالة دالة عكسية (أي أنّها واحد لواحد)، ثم جد الدالة العكسية ومثّلها بيانياً؟

Determine whether the function has an Inverse (is one-to-one), If so, find the Inverse and graph it?

$f(x) = x^3 + 4$

$x = y^3 + 4$

$y^3 = x - 4$

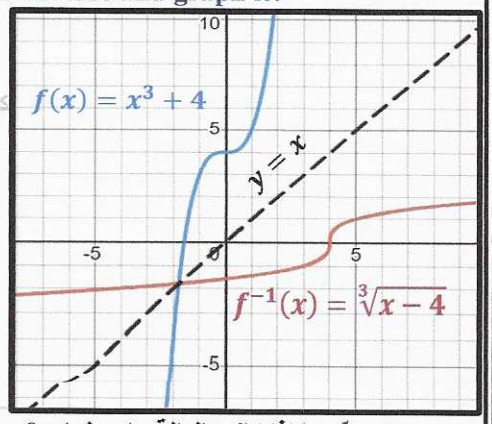
$y = \sqrt[3]{x-4}$

$\therefore y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$

$x^3 + 4 = 0$

بالحاسبة ⇒ $x = -1.58$

لها صفر واحد فقط، إذن دالة واحد لواحد.



Determine whether the function is one-to-one?

س4) حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد؟

$f(x) = x^5 - 1$

$x^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = 1 \Rightarrow x = 1$

لها صفر واحد إذن دالة واحد لواحد.

يحل الطالب السؤال مباشرة باستخدام الحاسبة

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Determine whether the function is one-to-one?

س5) حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد؟

$f(x) = x^4 - 2x - 1$

نجد أصفار الدالة باستخدام الآلة الحاسبة

$x^4 - 2x - 1 = 0$

$x_1 = -0.4746$

$x_2 = 1.395$

$\Rightarrow$ حيث يعني ليست دالة واحد لواحد.

Jalshobaki.com

س6) حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد ثم جد الدالة العكسية وارسم بيانياً؟

Determine if the function is one-to-one then find the inverse function and graph?

$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

ملاحظة هامة:

دالة الجذر التربيعي لها مجال مقيد، وبالتالي يجب أن نقيد مجال الدالة العكسية بمدى الدالة الجذرية الأصلية.

مجال f : $x^3 + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

مدى f : $y \geq 0$

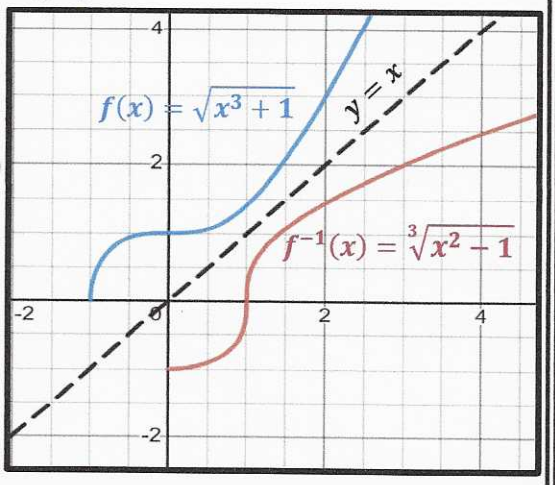
$y = \sqrt{x^3 + 1}$

$x = \sqrt{y^3 + 1} \Rightarrow x^2 = y^3 + 1$

$y^3 = x^2 - 1$

$\therefore y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ ، لكل $x \geq 0$

مجال $f^{-1}(x)$ هو نفس مدى f

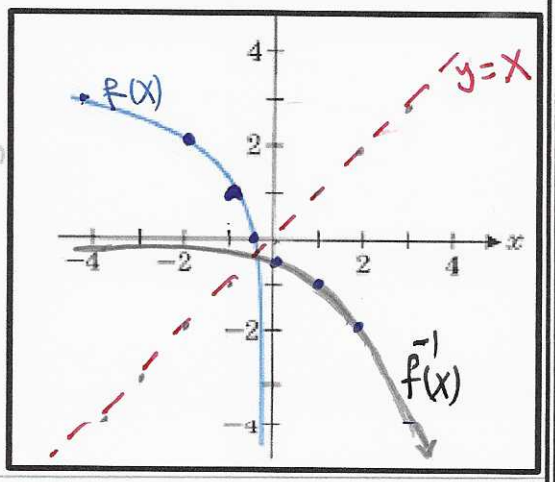


Use the given graph to graph the Inverse function?

س7) استخدم التمثيل البياني لتمثيل الدالة العكسية بيانياً؟

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$(-\frac{1}{2}, 0)$ (x, y)	$(0, -\frac{1}{2})$ (x, y)
$(-1, 1)$	$(1, -1)$
$(-2, 2)$	$(2, -2)$
$(-4, 3)$	$(3, -4)$

1. نرسم $y = x$
2. نلاحظ النقاط الموجودة على رسم f ونعكسها.
3. نصل النقاط على الرسم بنفس رسم f



Determine which function has an Inverse function ?

س8) حدّد الدالة التي يوجد لها دالة عكسية؟

A) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ليست واحد لواحد

B) $f(x) = x^3 - 1$ واحد لواحد

C) $f(x) = -2$ ليست $y = -2$

D) $f(x) = x^2 - 9$ ليست

2017
2018

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س9) بافتراض أنّ للدالة دالة عكسية، جد قيم الدالة المحدّدة بدون الحل لإيجاد الدالة العكسية؟

Assume that the function has an Inverse, Without solving for the Inverse, find the indicated function values?

$f(x) = x^3 + 4x - 1$

A) $f^{-1}(-1) = 0$

كأننا نقول عند أي قيمة لـ x تكون $f(x) = -1$

إذن نساوي $f(x)$ بـ (-1) ⇐ $x^3 + 4x - 1 = -1$

إذن ⇐ $x = 0$

معنى ⇐ $f(0) = -1$ ، $f^{-1}(-1) = 0$

B) $f^{-1}(4) = 1$

$f(1) = 4$

$\therefore f^{-1}(4) = 1$

$f(x) = x^3 + 2x + 1$

A) $f^{-1}(1) = 0$

$f(0) = 1$

$f^{-1}(1) = 0$

أو $x^3 + 2x + 1 = 1$

$x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

B) $f^{-1}(13) = 2$

$x^3 + 2x + 1 = 13 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 13$

$\therefore f^{-1}(13) = 2$

$f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$

A) $f^{-1}(4) = 2$

$\sqrt{x^3 + 2x + 4} = 4$

$x^3 + 2x + 4 = 16 \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$

$x = 2$

$f(2) = 4$

$f^{-1}(4) = 2$

B) $f^{-1}(2) = 0$

$f(0) = 2$

$f^{-1}(2) = 0$

س10) افترض أنّ للدالة f دالة عكسية، اشرح سبب صحة العبارة التالية؟

Assume that f has an inverse function, explain why the following statement is true ?

A) إذا كان مدى الدالة f هو كل قيم $y > 0$ ، فإنّ مجال الدالة f^{-1} هو جميع قيم $x > 0$؟

If the range of the function f is all values of $y > 0$, then the domain of the function f^{-1} is all values of $x > 0$?

عبارة صحيحة، لأن مدى الدالة f هو مجال معكوسها (خواص الدوال العكسية)

B) إذا كان التمثيل البياني للدالة f يتضمن النقطة (a, b) ، فإنّ التمثيل البياني للدالة f^{-1} سيتضمن النقطة (b, a) ؟

If the graph of function f includes the point (a, b) , then the graph of f^{-1} includes the point (b, a) ?

عبارة صحيحة ، خواص التمثيل البياني للدوال العكسية

$f(a) = b$

$f^{-1}(b) = a$

C) إذا كان التمثيل البياني للدالة f لا يقطع المستقيم $y = 3$ إذن $f^{-1}(x)$ ليست معرّفة عند $x = 3$ ؟

If the graph of the function f does not intersect the line $y = 3$ then $f^{-1}(x)$ is not defined at $x = 3$?

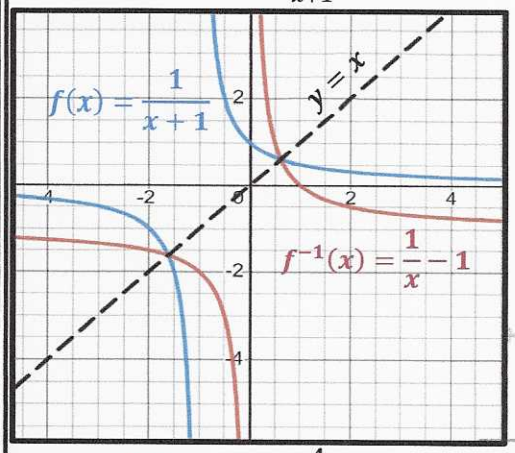
إذا لم يقطع المستقيم $y = 3$ منحنى الدالة f في أي نقطة فإن ما من x يجعل $f(x) = 3$ ، ما يعني أن f غير معرّفة عند $x = 3$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س11) باستخدام تمثيل بياني تقريبي، حدّد ما إذا كانت الدالة واحد لواحد، وفي حال كانت، مثّل الدالة المعكوسة؟

Using an approximate graph, determine whether the function is one-to-one and, if so, graph the inverse function?

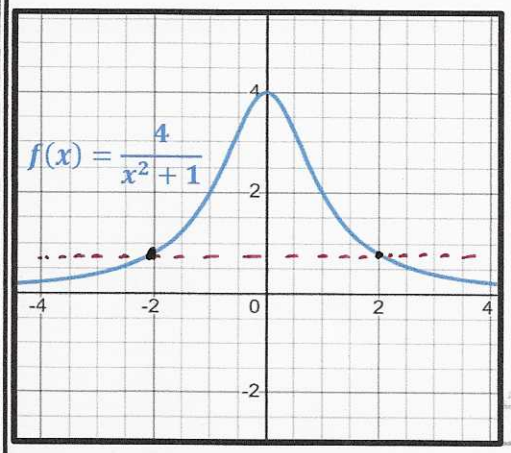
A) $f(x)=\frac{1}{x+1}$



x	-3	-2	-1	0	3
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	غير معرفة	1	$\frac{1}{4}$

1. نحدد بعض النقاط (x) ونجد قيمها ونختبرها بعد الرسم
2. نلاحظ من الجدول ومن الرسم البياني أيضاً أنها واحد لواحد.
3. نعكس النقاط ونرسم الدالة العكسية $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-1$

B) $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$



1. لاحظ أن مقام دالة كثيرة لس لها أصفار
أي $x^2+1\neq 0$
2. متماثلة حول محور (y)
$f(2)=\frac{4}{5}$ يعني
$f(-2)=\frac{4}{5}$
مما يعني أن اختبار الخط الأفقي يقبل
ليست واحد لواحد.

الأسئلة التالية تتضمّن مفهوم وجود دالة عكسية ضمن مجال محدّد (مقيّد)

The following exercises involve inverse functions on restricted domains

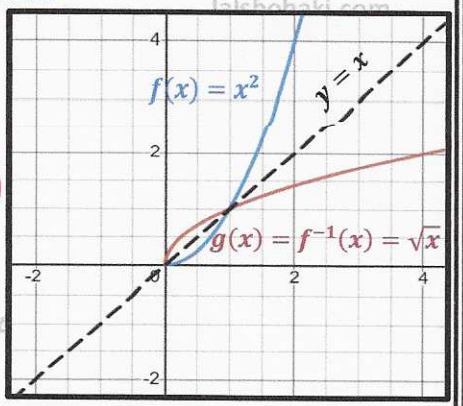
س12) وضّح أنّ $\begin{cases} f(x)=x^2 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x} & , \ x\geq 0 \end{cases}$ دالتان متعاكستان ومثّل كلتا الدالتين بيانياً؟

Show that $\begin{cases} f(x)=x^2 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x} & , \ x\geq 0 \end{cases}$ **are inverse functions. Graph both functions?**

$f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x$

$g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|=x \quad (x\geq 0)$ لأن $\sqrt{x^2}=|x|$

إذن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان متعاكستان عندما يكون كلاهما معرّف على $x\geq 0$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

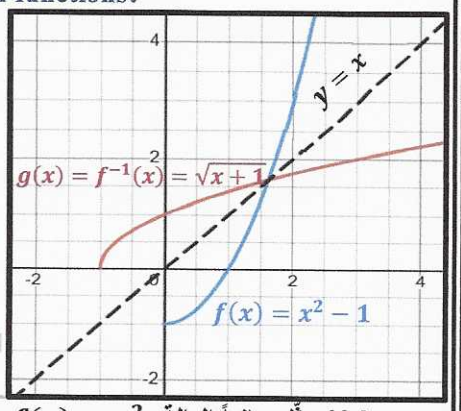
س13) وضّح أنّ $\begin{cases} f(x)=x^2-1 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x+1} & , \ x\geq -1 \end{cases}$ دالتان متعاكستان ومثّل كلتا الدالتين بيانياً؟

Show that $\begin{cases} f(x)=x^2-1 & , \ x\geq 0 \\ g(x)=\sqrt{x+1} & , \ x\geq -1 \end{cases}$ **are inverse functions. Graph both functions?**

$f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x+1-1 = x$

$g(f(x)) = g(x^2-1) = \sqrt{x^2-x+1} = |x| = x$ ($\because x \geq 0$ لأن f مجالها)

إذن دالتان متعاكستان



س14) مثّل بيانياً الدالة $f(x)=x^2$ من أجل $x\leq 0$ وتحقّق من أنّها دالة واحد لواحد، ثم جد معكوسها، ومثّل الدالتان بيانياً؟

Graph $f(x)=x^2$ **for** $x\leq 0$ **and verify that it is one-to-one. Find its inverse. Graph both functions?**

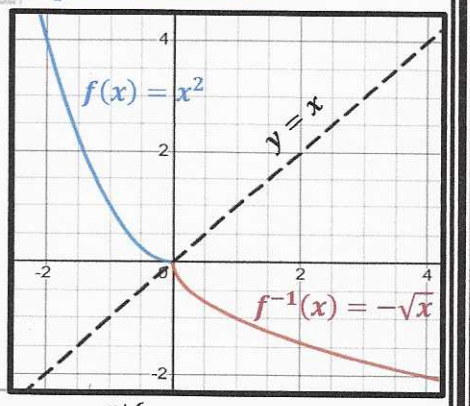
لاحظ أن دالة $f(x)=x^2$ على المجال المعطى $x\leq 0$ هي دالة واحد لواحد.

$y = x^2$

$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{y = -\sqrt{x}}$ (لأن $x\leq 0$)

مجال $f^{-1}(x)$ هو مدى الدالة f إذن $y\geq 0$

$\therefore \ y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad (x\geq 0)$



س15) إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{x+6}{x}$ لها دالة عكسية $g(x)$ بحيث $g(x)=\frac{a}{x-1}$، فجد عندها قيمة الثابت a ؟

If the function $f(x)=\frac{x+6}{x}$ **has an inverse function** $g(x)$ **such that** $g(x)=\frac{a}{x-1}$, **then find the value of the constant a?**

$f(g(x)) = x$
$g(f(x)) = x$

بما أن $g(x)$ هي دالة عكسية لـ $f(x)$ إذن

نختار أحدها ونتحقق: لإيجاد قيمة الثابت a.

$g(f(x)) = g\left(\frac{x+6}{x}\right) = \frac{a}{\frac{x+6}{x} - \frac{1}{1}} = \frac{x}{1}$

$\therefore \ a = x\left(\frac{x+6}{x} - \frac{1}{1}\right)$

$a = x\left(\frac{x+6-x}{x}\right) \Rightarrow a = x+6-x$

$\therefore \boxed{a = 6}$

ونفس الإجابة طبعاً لو أخذ الطالب $f(g(x))$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س16) إذا تقاطع منحنى الدالة f مع منحنى الدالة f^{-1} في النقطة $\left(3-c, \frac{c}{2}\right)$ فإنّ c ؟

If the curve of the function f intersects the curve of the function f^{-1} at the point $\left(3-c, \frac{c}{2}\right)$, then c ?

$x \; , \; y$

← عند التقاطع نأن $y=x$ ⇐

$3-c=\frac{c}{2}$

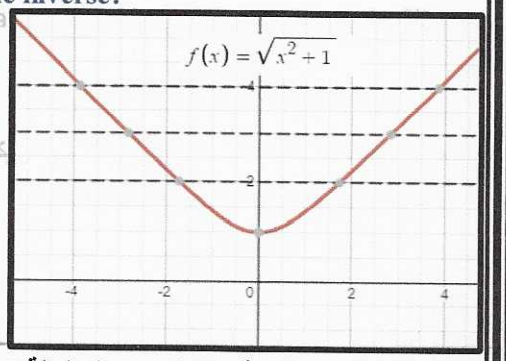
بالضرب (2) ⇒ $6-2c=c$

$3c=6$

$\boxed{c=2}$

س17) حدد ما إذا كانت الدالة $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ دالة واحد لواحد؟ ، إذا كانت كذلك فجد المعكوس؟

Determine whether the function has an inverse (is one-to-one)? If so, find the inverse?



← نختبر حالة لـ (x) موجبة ، ونفس الحالة لـ (x) سالبة

$f(1)=\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}$

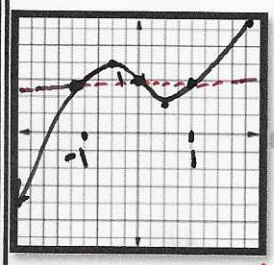
$f(-1)=\sqrt{(-1)^2+1}=\sqrt{2}$

⇒ إذن ليست واحد لواحد

Jalshobaki.com

س18) جد جميع قيم k التي تجعل الدالة $f(x)=x^3+kx+1$ دالة واحد لواحد؟ إرشاد: استعن بالرسومات البيانية

Find all values of k such that $f(x)=x^3+kx+1$ is one-to-one? Hint: Use the graphs



① إذا كانت $k<0$

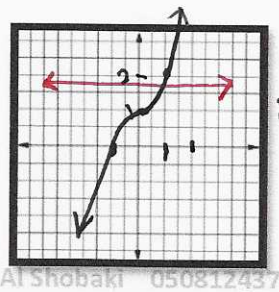
① $k<0^{(-)}$ عندما نأن

$f(x)=x^3-x+1$

$f(1)=1$

$f(-1)=1$

⇒ ليست واحد لواحد



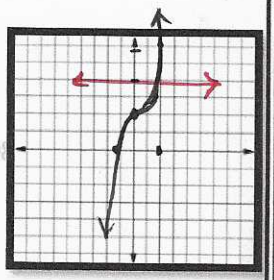
② $k=0$

$k=0 \Rightarrow f(x)=x^3+1$

$x^3+1=0$

$x^3=-1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

صفر واحد نقطة ⇐ دالة واحد لواحد



③ $k>0$

$k>0^{(+)} \Rightarrow f(x)=x^3+x+1$

$x^3+x+1=0$

$x=-0.6$

صفر واحد فقط ⇐ واحد لواحد

إذن واحد لواحد لكل $k \geq 0$.

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي