تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف أوراق عمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم			
روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام			
التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
1	كل مايخص الاختبار التكويني لمادة الرياضيات للصف الثاني عشر يوم الأحد 9/2/2020
2	تدريبات متنوعة مع الشرح على الوحدة الرابعة(النهايات والاتصال)
3	تدريبات متنوعة على تطبيقات الاشتقاق
4	قوانين هندسية
5	الاختبار القياسي في الرياضيات

تذكر قواعد التكامل غير المحدود:

1) $\int a \ dx = ax + c$ حيث a ثابت :

2) $\int x^n \ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $, n \neq -1$

تكاملات الدوال المثلثية:

اشتقاق

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \ \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \ \cot x$

تكامل

تكاملات الدوال المثلثية العكسية:

اشتقاق

$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

تكامل

تكاملات الدوال اللوغاريتمية:

اشتقاق

$\ln\lvert f(x)\rvert + c$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\ln\lvert x\rvert + c$	$\frac{1}{x}$

تكامل

تكاملات الدوال الأسية:

اشتقاق

$e^{f(x)} + c$	$f'(x) \ e^{f(x)}$
$e^x + c$	e^x

تكامل

أولًا: النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الجزء 1)

النظرية 5.1 (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل، الجزء الأول)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $F(x)$ هي أيّ دالة أصليّة لـ $f(x)$ ، فإنّ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (5.1)$$

تمارين صـ 366 :- استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1. $\int_0^2 (2x - 3)\ dx$

.....

.....

.....

.....

3. $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x)\ dx$

.....

.....

.....

.....

5. $\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx$

.....

.....

.....

.....

7. $\int_0^1 (6e^{-3x} + 4)\ dx$

.....

.....

.....

.....

تمارين صـ 366 ـ: استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

11. $\int_0^{\pi/4} \sec t \tan t \, dt$

13. $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

15. $\int_1^4 \frac{t-3}{t} \, dt$

18. $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx$

تمارين ص 367: ابحث عن كل الأخطاء.

51. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (1) = -2$ ... ...

52. $\int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\pi} = \tan \pi - \tan 0 = 0$ ... ...

ثانيًا: خواص التكامل المحدود

إذا كانت f و g قابلتين للتكامل على $[a,b]$ فإن:

1) تكامل الثابت: لأي عدد ثابت k يكون: $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

2) ترتيب التكامل: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) خاصية الصفر: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4) الثابت المضروب: لأي عدد ثابت k يكون: $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

5) المجموع أو الفرق: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6) خاصية الإضافة: لأي عدد ثابت c في $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

تمارين صـ 356 ـ: أكتب كل تعبير في صورة تكامل منفرد

35. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

(b) $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$

.....

36. (a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$

(b) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

.....

.....

تمارين صـ 356 ـ: فرضًا أن $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ أوجد:

37. (a) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$

38. (b) $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

.....

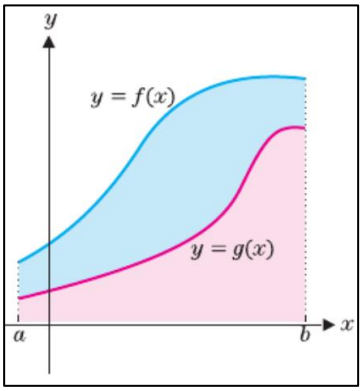
.....

.....

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

تابع خواص التكامل المحدود

7) خاصية السيادة: " الدالة الأكبر لها التكامل الأكبر"



على فرض أنّ $g(x) \le f(x)$ لكل $x \in [a, b]$ وأنّ f و g قابلتان للتكامل على $[a, b]$. إذًا،

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

تمارين صـ 356 ـ:

41. (a) أثبت أن: $\sin(1) \le \int_1^2 x^2 \sin x\,dx \le 4$

.....

.....

.....

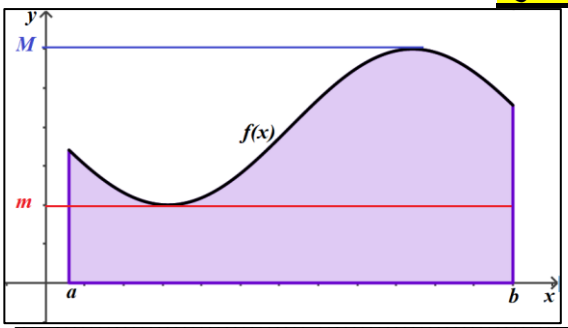
.....

.....

.....

.....

تابع خواص التكامل المحدود



8) خاصية العظمى والصغرى:

إذا كانت: M هي القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في $[a,b]$ ، m هي القيمة الصغرى للدالة $f(x)$ في $[a,b]$ فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

المثال 4.7 ص355: استخدم متباينة العظمى والصغرى لتقدير قيمة $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

M = ...

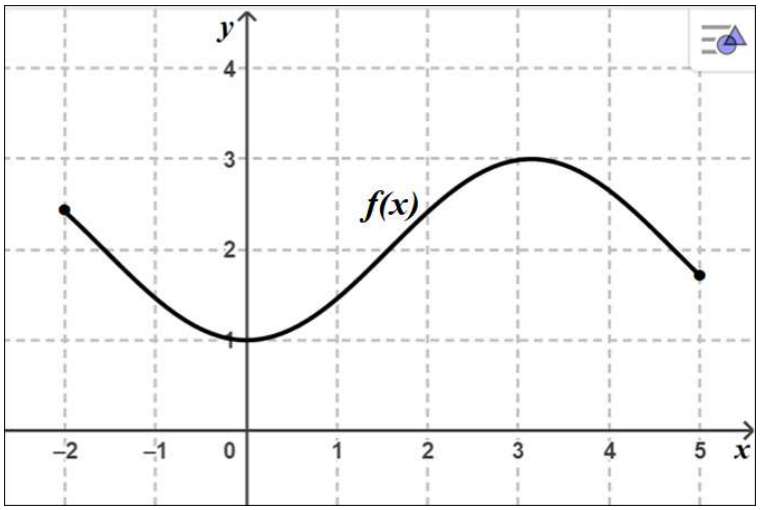
m = ...

.....

.....

الاختبارات المعيارية:

الشكل يمثل الدالة $f(x)$ المتصلة على $[-2,5]$، أيًا مما يلي صحيح عن الدالة $f(x)$:



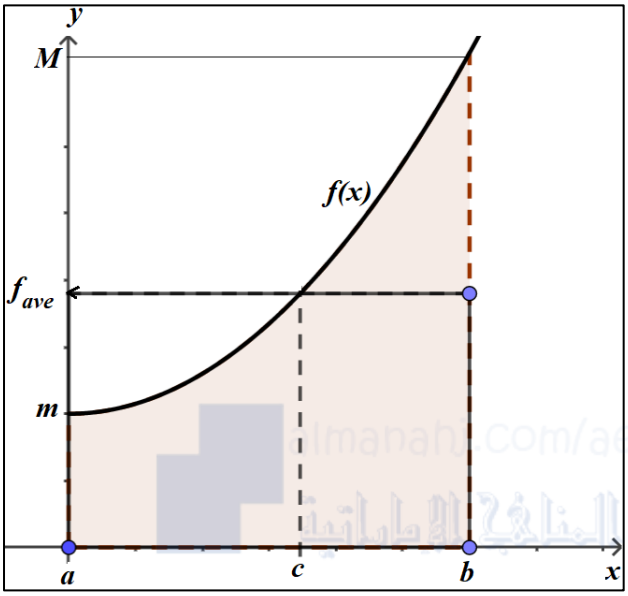
$A)\ \ 21 \le \int_{-2}^{5} f(x)\ dx \le 7$

$B)\ \ 7 \le \int_{-2}^{5} f(x)\ dx \le 21$

$C)\ \ -21 \le \int_{-2}^{5} f(x)\ dx \le -7$

$D)\ \ -7 \le \int_{-2}^{5} f(x)\ dx \le -21$

ثالثًا: نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات المحدودة



إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ فإن متوسط قيمة f في $[a,b]$ تقع بين قيمتي f الصغرى m والعظمى M ويكون عندها:

المساحة بين منحنى f ومحور x

= مساحة المستطيل الذي قاعدته $[a,b]$ وارتفاعه $f(c)$

$$f(c) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

ملاحظة:

القيمة المتوسطة للدالة f قد تحدث عند قيم متعددة لـ c حيث: $c \in (a,b)$

تمارين ص 367:

55. $f(x) = x^2 - 1$, $[1,3]$

a) جد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) جد قيمة c التي تتحقق عندها هذه القيمة المتوسطة

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين ص 367:

57. $f(x) = \cos x \quad , \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) جد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

b) جد قيمة c التي تتحقق عندها هذه القيمة المتوسطة

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين ص 367:

58. $f(x) = e^x \quad , [0, 2]$

a) جد القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

b) جد قيمة c التي تتحقق عندها هذه القيمة المتوسطة

.....

.....

.....

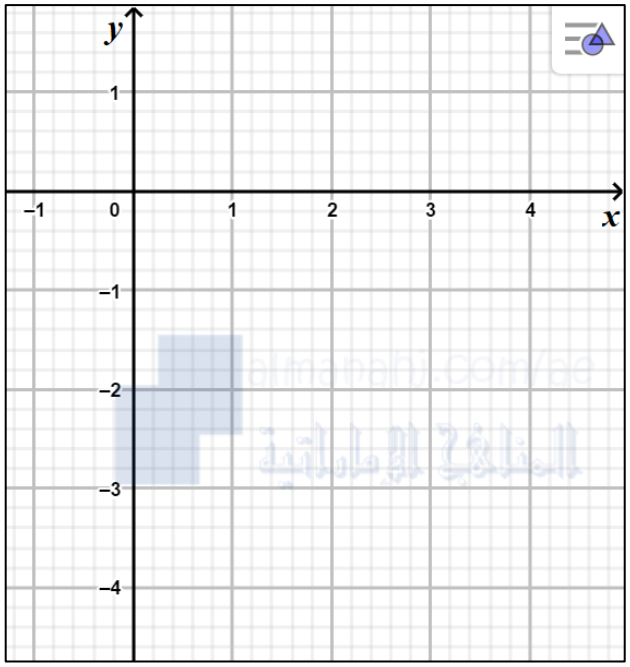
.....

.....

رابعًا: المساحات باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الجزء 1)

تمارين ص 366: جد المساحة المعطاة.

20. المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$



رأس القطع: .....

التقاطعات مع محور x: .....

x					
y					

المساحة: .....

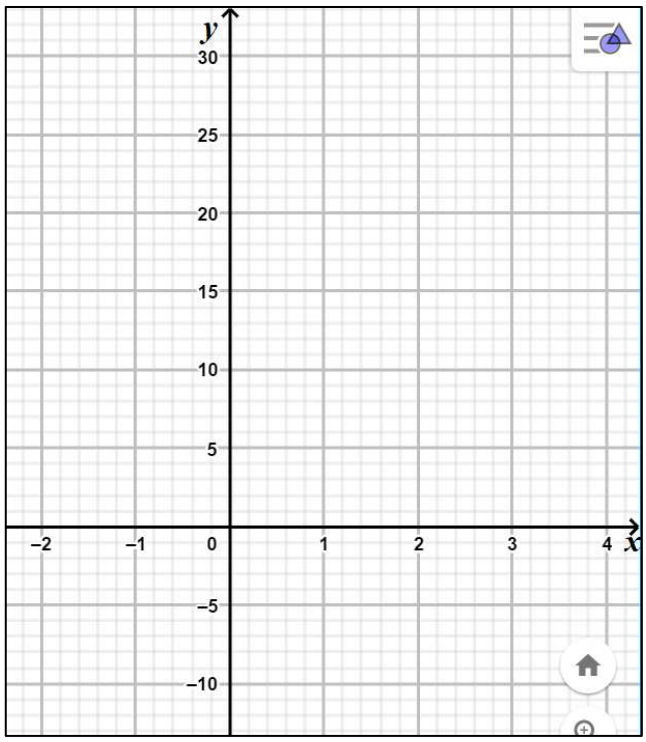
.....

.....

.....

تمارين ص 366: جد المساحة المعطاة.

22. مساحة المنطقة المحدودة بين الدالة $y = x^3$ و $x = 3$ والمحور x



التقاطعات مع محور x: .....

x					
y					

المساحة: .....

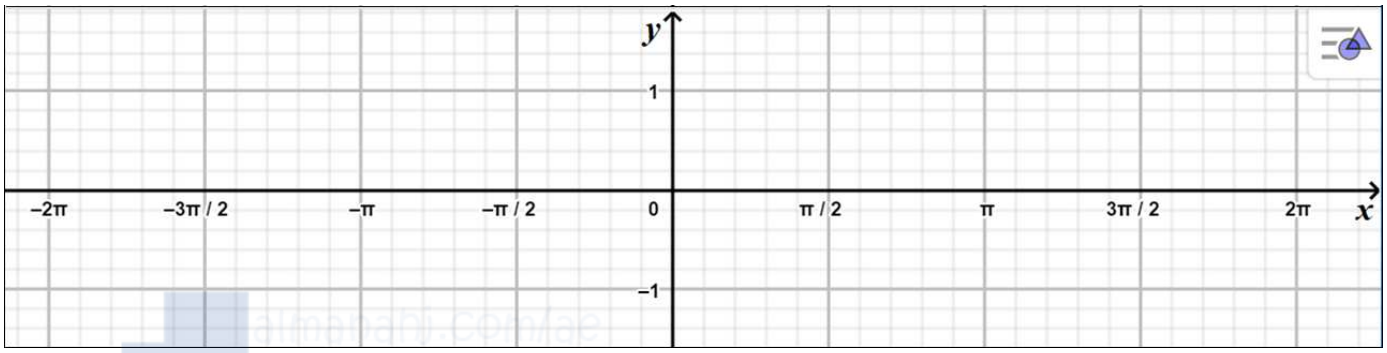
.....

.....

.....

تمارين ص 366: جد المساحة المعطاة.

24. المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور x لكل $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$



المساحة: .....

.....

.....

.....

خامسًا: النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الجزء 2)

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل: الجزء (2)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

تمارين صـ 366 ـ: جد المشتقة $f'(x)$

25) $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$

.....

28) $f(x) = \int_x^2 \sec t\,dt$

.....

.....

تفكير ناقد: أوجد

$$\frac{d}{dx}\int_{-2}^{5} (3t - 4)\,dt = \text{... ... ...}$$

تمارين صـ 367 ـ: 40) أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x :

$$y = \int_{-1}^{x} \ln(t^2 + 2t + 2)\ dt \qquad , x = -1$$

نقطة التماس: عند $x = -1$	ميل المماس: عند $x = -1$
.....	.....
.....	.....
.....	.....

معادلة المماس: .....

.....

.....

.....

تمارين صـ 367 ـ: 41) أوجد معادلة المماس عند قيمة معطاة لـ x :

$$y = \int_{2}^{x} \cos(\pi\, t^3)\ dt \qquad , x = 2$$

نقطة التماس: عند $x = 2$	ميل المماس: عند $x = 2$
.....	.....
.....	.....
.....	.....

معادلة المماس: .....

.....

.....

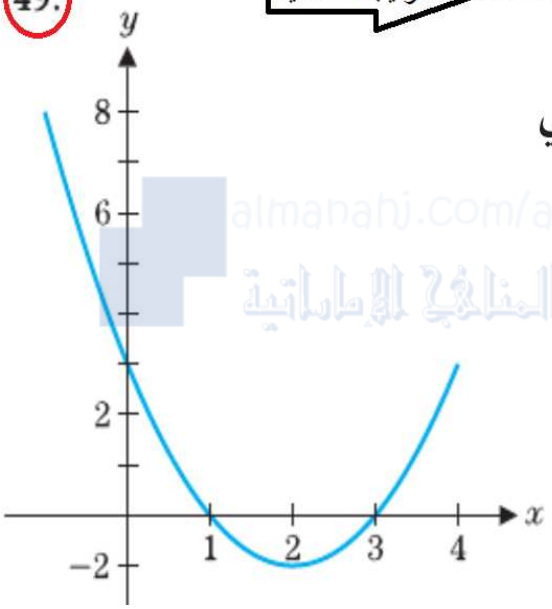
.....

تمارين صـ 367 :-

في التمرينين 49 و50 ، استخدم التمثيل البياني لتنظيم $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $\int_0^3 f(x)\,dx$ بالترتيب، من الأصغر إلى الأكبر.

49.

الترتيب تصاعديًا .....و.....و.....



في ما يخص $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ، حدد الفترات التي تتزايد فيها g وحدد النقاط الحرجة لأجل g .

.....

.....

.....

.....

تمارين صـ 367 :-

61. حدد كل القيم القصوى المحلية لـ $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملحوظة 1: (قاعدة السلسلة)

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt = f(u)\,.\,u'(x)$$

تمارين صـ 366 :- جد المشتقة $f'(x)$

$$27)\ f(x) = \int_{0}^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\,dt$$

.....

.....

تدريب: جد المشتقة $f'(x)$

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{0} \sin t^2\,dt$$

.....

.....

.....

ملحوظة 2: (متغير في حدي التكامل)

تمارين صـ 366 :- جد المشتقة $f'(x)$

$$32)\ f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4)\,dt$$

.....

.....

.....

.....