

شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية



أوراق عمل الوحدة السادسة الجزء الثاني المساحة السطحية وطول قوس المنحني

[موقع المناهج](#) ⇨ [المناهج الإماراتية](#) ⇨ [الصف الثاني عشر المتقدم](#) ⇨ [رياضيات](#) ⇨ [الفصل الثالث](#) ⇨ [الملف](#)

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 2024-04-20 07:49:15

إعداد: [حيدر عامر السعافين](#)

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



[اضغط هنا للحصول على جميع روابط "الصف الثاني عشر المتقدم"](#)

روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

[الرياضيات](#)

[اللغة الانجليزية](#)

[اللغة العربية](#)

[التربية الاسلامية](#)

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

[أوراق عمل الوحدة السابعة طرائق التكامل](#)

1

[الحل التفصيلي لأوراق عمل دروس الوحدة السادسة تطبيقات التكامل](#)

2

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

أوراق عمل دروس الوحدة السادسة تطبيقات التكامل متبوعة بمفاتيح الحل	3
حل أوراق عمل الوحدة السادسة المساحة السطحية وطول قوس المنحني	4
الدروس المطلوبة في الفصل الثالث	5

فيديوهات الوحدة السادسة الجزء الثاني

الوحدة السادسة

المساحة السطحية وطول قوس المنحنى

الصف الثاني عشر متقدم

إعداد

د: حيدر عامر السعافين

حصة 1

تعريف: طول قوس: طول منحنى ممهد:

إذا بدأ منحنى ممهد عند النقطة (a, c) وانتهى عند (b, d) ، $a < b$ فإن طول قوس المنحنى هو

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

إذا كانت y دالة ممهدة في x على $[a, b]$

أوجد طول المنحنى $y = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ حيث $-1 \leq x \leq 3$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x+1)^{1/2} \cdot 1 = \sqrt{x+1}$$

$$(y')^2 = (\sqrt{x+1})^2 = x+1$$

$$L = \int_{-1}^3 \sqrt{1 + x + 1} dx$$

$$L = \int_{-1}^3 (2 + x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \left([2 + x]^{\frac{3}{2}} \right)_{-1}^3$$

$$= \frac{2}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = 6.8 u$$

حصة 2

مثال 1 : $y = -\int_x^{-2} \sqrt{4t^4 - 1} dt$ على $[-2, -1]$

الحل:

$$y = \int_{-2}^x \sqrt{4t^4 - 1} dt$$

$$y' = \sqrt{4x^4 - 1}$$

$$(y')^2 = (\sqrt{4x^4 - 1})^2 = 4x^4 - 1$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$s = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + 4x^4 - 1} dx = \int_{-2}^{-1} \sqrt{4x^4} dx$$

$$s = \int_{-2}^{-1} 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{3} [(-1)^3 - (-2)^3] = \frac{14}{3} u$$

حصة 3

أوجد طول المنحنى للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,2]$ حيث $f'(x) = \sqrt{x-1}$

$$(f'(x))^2 = (\sqrt{x-1})^2 = x-1$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + x - 1} dx$$

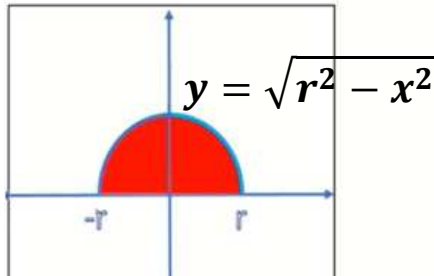
$$= \int_1^2 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \left[2^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = 1.22u$$

طول قوس المنحنى (المساحة السطحية) حصة (4)

مثال 1 : اثبت ان مساحة سطح الكرة $A = 4\pi r^2$

الحل: الكرة تتولد من دوران نصف دائرة



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$S = 2\pi \int^b f(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

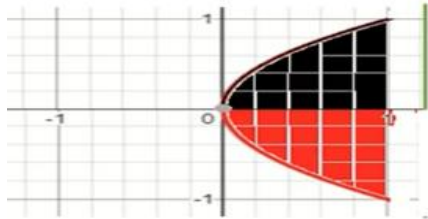
$$S = 2\pi \int^b f(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx$$

$$S = 2\pi r [x]_{-r}^r = 2\pi r [r - (-r)] =$$

$$S = 2\pi r (r + r) = 2\pi r (2r) = 4\pi r^2$$



مثال 2: احسب مساحة السطح المتولد من دوران قطعة المنحنى $y = \sqrt{x}$ حيث $0 \leq x \leq 1$ وذلك بالدوران حول محور x
الحل:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4x}$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{4x + 1}{4x}} dx$$

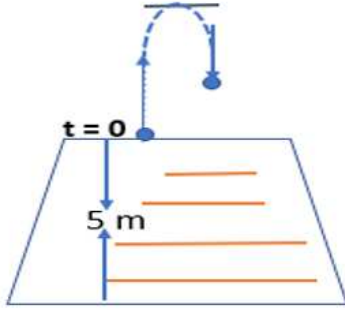
$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{4x + 1}}{2\sqrt{x}} dx$$

$$S = \pi \int_0^1 \sqrt{4x + 1} dx = \pi \int_0^1 (4x + 1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$S = \frac{\pi}{4} \int_0^1 4(4x + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3}\right) \left[(4x + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

حصة 1

حركة المقذوفات



اطلقت قذيفة ثقيلة رأسياً إلى اعلى من منصة ترتفع 5 m فوق سطح الأرض

بسرعة ابتدائية 160 m/s . اوجد :

(1) سرعة القذيفة كدالة في الزمن t .

(2) ارتفاع القذيفة فوق سطح الأرض كدالة في الزمن t .

الحل :

$$v(0) = 160 \text{ m/s} \quad , \quad S(0) = 5 \text{ m}$$

$$a(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$* \int a(t) dt = \int -9.8 dt$$

$$V(t) = -9.8t + c_1$$

$$* \int V(t)dt = \int (-9.8t + 160)dt \quad (b)$$

$$S(t) = \frac{-9.8t^2}{2} + 160t + c_2$$

$$S(0) = \frac{-9.8(0)^2}{2} + 160(0) + c_2 \longrightarrow 5 = c_2$$

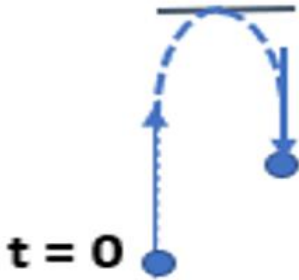
$$S(t) = -4.9t^2 + 160t + 5$$

$$V(0) = -9.8(0) + c_1$$

$$160 = c_1$$

$$V(t) = -9.8t + 160$$

حركة المقذوفات (حصة 2)



تم قذف كرة للأعلى رأسياً بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s مع تجاهل مقاومة الهواء

أوجد (1) معادلة لارتفاع الكرة بدلالة الزمن t

(2) القيمة العظمى لارتفاع الكرة

(3) الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء .

الحل:

$$|h''(t) = -9.8 \quad , \quad h'(t) = 19.6$$

$$* \int h''(t) dt = \int -9.8 dt \quad , \quad h'(0) = 19.6$$

$$h'(t) = -9.8t + c_1$$

$$h'(0) = -9.8(0) + c_1$$

$$19.6 = 0 + c_1 \quad \longrightarrow \quad c_1 = 19.6$$

$$\therefore h'(t) = -9.8(t) + 19.6$$

$$* \int h'(t) dt = \int (-9.8t + 19.6) dt$$

$$h(t) = -\frac{9.8t^2}{2} + 19.6t + c_2$$

$$h(0) = -4.9(0)^2 + 19.6(0) + c_2, \quad h(0) = 0$$

$$0 = 0 + c_2 \longrightarrow c_2 = 0$$

$$\therefore h(t) = -4.9t^2 + 19.6t$$

(b) القيمة العظمى للارتفاع عندما $h'(t) = 0$

$$\text{نضع : } h'(t) = -9.8(t) + 19.6 = 0$$

$$-9.8t = -19.6$$

$$-9.8(t) = -19.6 \quad t = \frac{-19.6}{-9.8} = 2 \text{ s}$$

$$\therefore h(2) = -4.9(2)^2 + 19.6(2) = 19.6 \text{ m}$$

نجعل الارتفاع = 0

$$-4.9t^2 + 19.6t = 0$$

$$t(-4.9t + \underline{19.6}) = 0$$

$$t = 0$$

$$-4.9 + 19.6 = 0$$

$$t = \frac{19.6}{4.9} = 4 \text{ s}$$

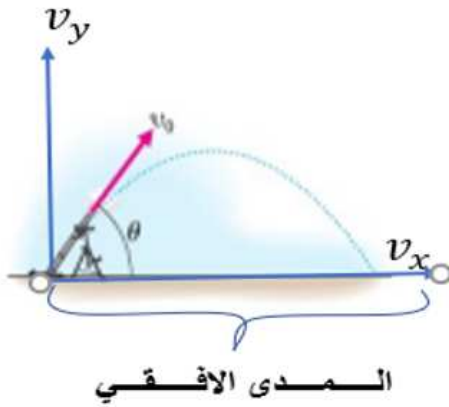
طريقة اخرى: زمن الصعود = زمن الهبوط

استغرقت الكرة للوصول لاقصى ارتفاع 2 ثانية

بالتالي يكون زمن الهبوط = 2 ثانية

الزمن الكلى لوجود الكرة بالهواء = 2 + 2 = 4 ثواني

حركة مقذوف في بعدين (حصة 3)



افقية رأسية

$$\cos\theta = \frac{v_x}{v_0}$$

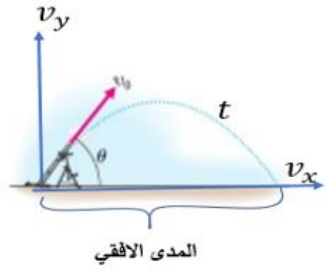
$$\sin\theta = \frac{v_y}{v_0}$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin\theta$$

إذا كانت زاوية $\theta \geq 45^\circ$ اكبر المدى ما يمكن

إذا كانت زاوية $\theta < 45^\circ$ المدى يصغر



* يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية $v_0 = 98 \frac{m}{s}$. اوجد :

(1) زمن التحليق (2) المدى الأفقي

$$y''(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$* \int y''(t) dt = \int -9.8 dt$$

$$y'(t) = -9.8t + c$$



$$c = v_y = v_0 \cdot \sin\theta$$

$$v_y = 98 \sin\frac{\pi}{3} = 98 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 49\sqrt{3}$$

$$y'(t) = -9.8t + 49\sqrt{3}$$

* لإيجاد الموقع : $\int y'(t)dt = \int (-9.8t + 40\sqrt{3})dt$

$$S(t) = y(t) = -4.9t^2 + 40\sqrt{3}t$$

$$y(t) = 0 \quad \text{عند اصطدام الجسم بالارض}$$

$$-4.9t^2 + 40\sqrt{3}t = 0$$

$$t(-4.9t + 49\sqrt{3}) = 0 \longrightarrow t = 0 \quad \text{أو} \quad t = \frac{-49\sqrt{3}}{-4.9} = 10\sqrt{3} = 17.3 \text{ s}$$

ب) المدى الأفقي (المركبة الأفقية) المسافة عند الاصطدام بالأرض

$$x''(t) = 0 \longrightarrow \int x'' dt = \int 0 dt \longrightarrow x'(t) = c$$

$$v_x = v_o \cdot \cos\theta = 98 \cdot \cos(60) = 98 \left(\frac{1}{2}\right) = 49$$

$$x'(t) = 49$$

$$x(t) = 49t \longrightarrow x(10\sqrt{3}) = 49(10\sqrt{3}) = 490\sqrt{3} \approx 848.7 \text{ m}$$

(حصة 1)

الشغل

إذا كانت القوة (غير ثابتة)

الشغل

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

الفترة على المبدولة القوة [a, b]

إذا كانت القوة (ثابتة)

$$W = F \cdot d$$

الشغل → القوة المبدولة → المسافة

القوة المبدولة من الدايص $F(x) = k \cdot x$

k (ثابت المرونة)

x

(المسافة التي ينكمش او يتمد إليها النايص

الحلزوني عن طولها)

الطاقة الحركية = طاقة الجهد

الانتباه الى تحويل الوحدات

ملاحظات:

1) الشغل يساوي صفرا إذا كانت المسافة $d = 0$

أو $a = b$ فيصبح

$$\int_a^b = \int_a^a = 0$$



(1) أحدثت قوة قدرها 5 lb على تمدد نابض 4 in . أوجد :
الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد من طوله الطبيعي :

الحل:

$$4 \text{ in} = 4 \div 12 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ ft: تحول}$$

$$F(x) = kx$$

$$5 = k \left(\frac{1}{3} \right) \longrightarrow k = 15$$

$$F(x) = 15x$$

$$6 \text{ in} = 6 \div 12 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ ft: تحول}$$

$$W = \int_a^b F(x) dx = \int_0^{0.5} 15x dx =$$

$$= \left[\frac{15x^2}{2} \right]_0^{0.5} = \frac{15}{2} [(0.5)^2 - 0] = \frac{15}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{8} \text{ ft/lb}$$



(2) أحدثت قوة قدرها 7 lb على تمدد نابض $\frac{1}{3} \text{ ft}$. أوجد :

الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد من طوله الطبيعي :

الحل:

$$F(x) = 7$$

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 7$$

$$k(x) = 7 \longrightarrow 7 = k\left(\frac{1}{3}\right) \longrightarrow k = 21$$

$$F(x) = 21x$$

$$6 \text{ in} = 6 \div 12 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ ft: نحول}$$

$$W = \int_a^b F(x) dx = \int_0^{0.5} 21x dx =$$

$$= \left[\frac{21x^2}{2} \right]_0^{0.5} = \frac{21}{2} [(0.5)^2 - 0] = \frac{21}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{21}{8} \text{ ft/lb}$$



(3) تزن سلسلة طولها 40 ft, وزنها 1000 lb يتم سحبها لاعلى على سطح

قارب السلسلة وجهة رأسيا. والجزء العلوي من السلسلة يبدأ في المياه

30 ft أسفل السطح :

الحل :

الوزن

الطول

$$W = 1000 \text{ lb}$$

$$40 \text{ ft}$$

$$F = ?$$

$$30 \text{ ft}$$

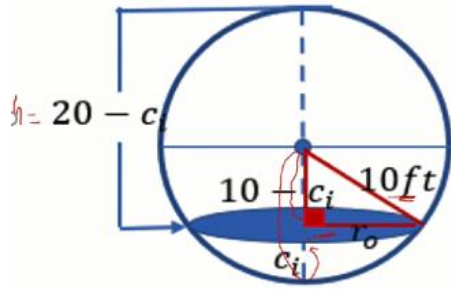
$$40 F = 1000 \times 30 \quad \longrightarrow \quad F = \frac{1000 \times 30}{40} = 750 \text{ lb}$$

$$W = F \cdot d = 750 \times 30 = 750 \text{ ft/lb}$$

الشغل الخزان (حصه 2)

مثال 1: يبلغ نصف قطر خزان كروي 10 ft مملوء بالماء. أوجد :
الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي.

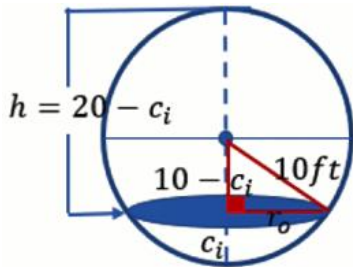
الحل:



نقسم الخزان إلى شرائح اسطوانية
ثم نحسب حجم شريحة واحدة
ثم نوجد التكامل من 0 إلى 20
ثم نحسب الشغل المبذول للمسألة المعطاة

كثافة الماء : 1000 kg/m^3

$$62.4 \frac{\text{Lb}}{\text{ft}^3} \text{ أو}$$



نوجد نصف قطر الشريحة: $r_0^2 = 10^2 - (10^2 - c_i)^2$, r_0

$$r_0^2 = 100 - (100 - 2c_i + c_i^2)$$

$$r_0^2 = 100 - 100 + 2c_i - c_i^2 = 2c_i - c_i^2$$

كثافة الماء \times حجم الشريحة = F_i للقوة اللازمة الشريحة

$$F_i = \pi r_0^2 h \times 62.4 = 62.4 \pi (2c_i - c_i^2) \cdot \Delta x$$

$$W = F_i \cdot d = 62.4 \pi (20c_i - c_i^2) \cdot (20 - c_i) \cdot \Delta x$$

$$W = 62.4 \pi c_i (20 - c_i) \cdot (20 - c_i) \cdot \Delta x$$

$$W = 62.4 \pi c_i (20 - c_i)^2 \cdot \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^n 62.4 \pi c_i (20 - c_i)^2 \Delta x$$

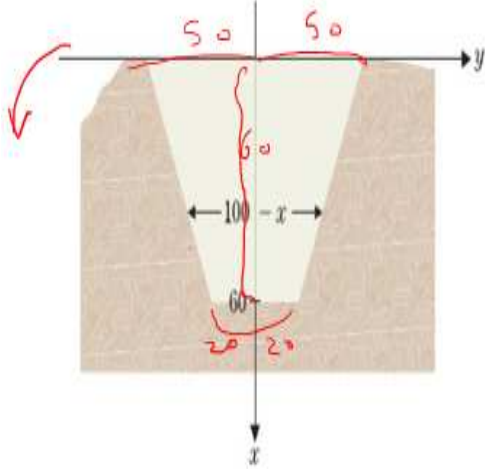
$$W = \int_0^{20} 62.4 \pi x (20 - x)^2 dx$$

$$W = 62.4 \pi \int_0^{20} x (400 - 40x + x^2) dx$$

$$W = 62.4 \pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3) dx$$

$$W = 62.4 \pi \left[\frac{400x^2}{2} - \frac{40x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^{20} = 2.61 \times 10^6 \text{ lb} / \text{ft}$$

الشغل السد (حصه 3)

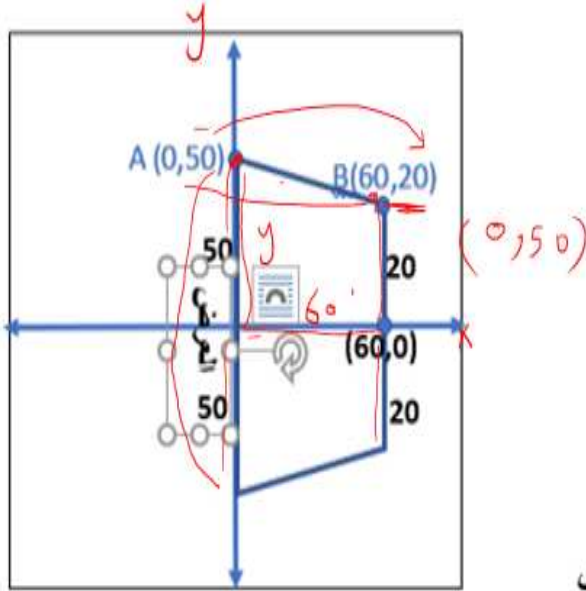


القوة الهيدروستاتيكية للسد

مثال: يتخذ السد شكلاً لشبه منحرف بارتفاع 60 ft يبلغ العرض في الجزء العلوي 100 ft والعرض في الجزء السفلي 40 ft. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية كي يصمد السد

الحل:

نوجد معادلة AB



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 20}{0 - 60} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 50 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 50$$

$$\underline{W = 2y}$$
 العرض

$$W = 2 \left(50 - \frac{1}{2}x \right) = 100 - x$$
 العرض

كثافة

وزن الماء

العمق العرض

x ($w(x)$) dx

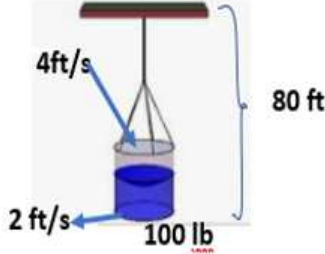
القوة الهيدروستاتيكية $F = \int_0^{60} 62.4$

العمق

$$F = \int_0^{60} 62.4 x (100 - x) dx = \int_0^{60} 62.4(100x - x^2) dx$$

$$F = 62.4 \left[50x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{60} = 6.739 \times 10^4 \text{ lb}$$

الشغل الدلو (حصة 4)



الشغل المبذول لدلو تسرب رمل

تم رفع دلو مسافة 80 ft بمعدل 4 ft/s يحتوي الدلو على 100 lb من الرمال لكن يتسرب منه الرمال بمعدل 2 lb/s . احسب الشغل المبذول .

الحل:

يصعد الدلو لمدة : $80 \div 4 = 20 \text{ s}$

خسارة $20 \times 2 = 40 \text{ lb}$

الذي يصل لأعلى : $100 - 40 = 60 \text{ lb}$

الارتفاع بالقدم

الوزن بالباوند

(0

, 100)

كان ما في الدلو

(80

, 60)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 60}{0 - 80} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 100 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

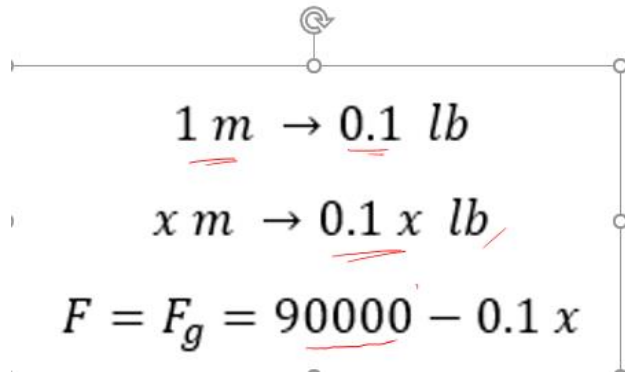
$$y = -\frac{1}{2}x + 100$$

$$W = \int_0^{80} F \cdot dx = \int_0^{80} \left(100 - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$W = \left[100x - \frac{x^2}{4}\right]_0^{80} = 6400 \text{ lb/ft}$$

العزم ومركز الكتلة (حصة 5)

تمرين 1: يزن صاروخ ممتلئ بالوقود 4500 كيلو جرام عند الإطلاق . وبعد الإطلاق يحظى الصاروخ بارتفاع ويفقد وزناً حيث يتم حرق الوقود . على فرض أن 0.45 كيلو جرام من الوقود لكل 4.5 متر من الارتفاع المكتسب . احسب الشغل المبذول ليصل الصاروخ إلى ارتفاع 9000 متر .



$$0.45 \text{ kg} \leftrightarrow 4.5 \text{ m}$$

$$x \leftrightarrow 1 \text{ m}$$

$$x = \frac{0.45}{4.5} = 0.1 \text{ lb/m}$$

$$W = \int_0^{9000} (4500 - 0.1x) dx = \left[4500x - 0.05x^2 \right]_0^{9000}$$

$$= (4500 \times 9000 - 0.05 \times 9000^2) = \underline{36,450,000}$$

الدفع: $J = \int_a^b F(t)dt$ حيث $F(x)$ هي القوة المبذولة على الفترة الزمنية $[a, b]$

معادلة الدفع والزخم $J = m[v(b) - v(a)]$

تمرين 4: على فرض ان كرة البيسبول كانت تتطلق بسرعة $30m/s$ تصطدم بمضرب . ستتغير القوة المبذولة من المضرب على الكرة إلى القيم الموجودة بالجدول . قدر دفع وسرعة الكرة بعد الاصطدام .

$t(s)$	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
$F(N)$	0	1000	2100	4000	5000

$n = 4$ استخدم قاعدة سيمبسون :

$$J = \int_0^{0.0004} F(N)dN = (F(0) + 4F(0.0001) + 2F(0.0002) + 4F(0.0003) + F(0.0004)) \left(\frac{0.0004 - 0}{3(4)} \right)$$

$$= (0 + 4000 + 4100) + 16000 + 5000 \left(\frac{0.0001}{3} \right)$$

$$= 0.97$$

الكتلة: $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(c_i) \Delta x = \int_a^b \rho(x) dx$ حيث $\rho(x)$ كثافة الجسم كثافة

العزم الأول: $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \rho(c_i) \Delta x = \int_a^b x \rho(x) dx$

مركز الكتلة: $\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$

احسب الكتلة ومركز الكتلة في كل مما يلي :

• جسم تبلغ كثافته $\rho(x) = \left(\frac{x}{6} + 2 \right) kg/m$ ، $0 \leq x \leq 6$

الكتلة

$$m = \int_0^6 \left(\frac{x}{6} + 2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{12} + 2x \right]_0^6$$

$$= \left(\frac{36}{12} + 12 \right) - 0 = 15$$

العزم

$$M = \int_0^6 x \left(\frac{x}{6} + 2 \right) dx = \int_0^6 \left(\frac{x^2}{6} + 2x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{18} + x^2 \right]_0^6$$

$$= \left(\frac{216}{18} + 36 \right) - 0 = 48$$

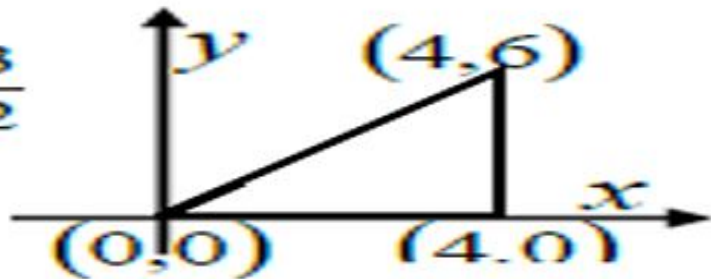
$$\bar{x} = \frac{M}{m}$$

$$= \frac{48}{15} = 3.2$$

تمرين 7: اوجد مركز الكتلة لمنطقة لها كثافة ثابتة إذا كانت المنطقة محدودة بالمثلث الذي رؤوسه $(0,0)$ و $(4,0)$ و $(4,6)$

$$m = \frac{6-0}{4-0} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x$$



$$\begin{array}{l}
 m = \int_0^4 \frac{3}{2} x dx \\
 = \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_0^4 \\
 = \frac{3}{4} (16) - 0 = 12
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 M = \int_0^4 x \left(\frac{3x}{2} \right) dx = \int_0^4 \frac{3}{2} x^2 dx \\
 = \left[\frac{1}{2} x^3 \right]_0^4 \\
 = 32
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 \bar{x} = \frac{M}{m} \\
 = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}
 \end{array}
 \right.$$

الاحتمالات (1)

الاحتمالات

التعريف:

على فرض ان X هي متغير عشوائي له فرضية اي قيمة x لكل $a \leq x \leq b$ تكون دالة كثافة الاحتمال لـ X دالة $f(x)$ تحقق :

$$f(x) \geq 0 \quad (i) \quad \text{لكل } a \leq x \leq b \text{ لا تكون كثافة الاحتمال سالبة أبداً}$$

الاحتمال الكلي 1

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (ii)$$

على تلك الفترة . أي أن : pdf بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ e و d (المرنية) بين X يعطى الاحتمال الذي تقع فيه قيمة

(1) أثبت أن $f(x) = 3x^2$ تعرف pdf على الفترة $[0, 1]$ باستخدام الخاصيتين (i), (ii)

$$f(x) \geq 0 \quad (1)$$

$$\int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^1 = 1^3 - 0 = 1 \quad (2)$$

تحقق الشرطان فهي دالة كثافة احتمال pdf

$$(2) \text{ أثبت أن } f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x} \text{ هي pdf على الفترة } [0, \ln 2]$$

$$(1) \quad f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x} > 0 \text{ على الفترة } [0, \ln 2] \text{ لأنها دالة أسية}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\ln 2} \frac{8}{3}e^{-2x} dx = \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^{\ln 2} = \frac{-4}{3} \cdot (e^{-2\ln 2} - e^0) \text{ (ب)}$$

$$= \frac{-4}{3} \cdot \left(\frac{1}{e^{2\ln 2}} - 1 \right) = \frac{-4}{3} \cdot \left(\frac{1}{e^{\ln 4}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{-4}{3} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \left(\frac{-4}{3} \right) \cdot \left(\frac{-3}{4} \right) = 1$$

لأن الدالة حققت الشرطين فهي دالة pdf

استخدام pdf لتقدير الاحتمالات

(1) على فرض ان $f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ هي دالة كثافة الاحتمال لاطوال ذكور بالغين بالسنتيمترات .

اوجد احتمال ان يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيا بين 174cm و 176cm

كذلك احتمال ان يكون الطول بين 168cm و 169cm

$$P(168 \leq X \leq 169) = \int_{168}^{169} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.1554$$

$$P(174 \leq X \leq 176) = \int_{174}^{176} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.0751$$

حساب احتمال مع pdf أسية:

على فرض ان العمر الافتراضي بالاعوام لعلامة تجارية معينة لمصباح يتم توزيعه أسياً بواسطة

pdf و $f(x) = 4e^{-4x}$. اوجد احتمال أن يدوم مصباح لمدة 3 أشهر أو أقل .

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} 4e^{-4x} dx = 4 \left[\frac{-1}{4} e^{-4x} \right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

إيجاد قيمة الثابت C

(1) على فرض أن pdf لمتغير عشوائي صيغتها $f(x) = ce^{-3x}$ لبعض الثوابت c مع $0 \leq x \leq 1$

أوجد قيمة c التي تجعل هذه الدالة pdf

لتكون pdf نحتاج إلى أن تكون $f(x) = ce^{-3x} \geq 0$ لكل $x \in [0,1]$ (ستكون هي هذه الحالة ما دام $c \geq 0$)

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x} dx = c \left[\frac{-1}{3} e^{-3x} \right]_0^1 = \frac{c}{3} (1 - e^{-1})$$

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x} dx = c \left[\frac{-1}{3} e^{-3x} \right]_0^1 = \frac{c}{3} (1 - e^{-1})$$

$$3 = c(1 - e^{-1})$$

$$c = \frac{3}{1 - e^{-1}} = 3.1572$$

(2) أوجد قيمة c التي تكون عندها $f(x)$ هي pdf على

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ الفترة } [0, 1]$$

الحل:

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 \rightarrow c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$$

(2) أوجد قيمة c التي تكون عندها $f(x)$ هي pdf على

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ الفترة } [0, 1]$$

الحل:

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$c. [\sin^{-1} x]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 \rightarrow c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$$

$$c \cdot \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = 1 \rightarrow c \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = 1$$

$$c \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad c = \frac{2}{\pi}$$

دالة كثافة الاحتمال

إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط

مثال 1 : أوجد (1) المتوسط μ و (2) الوسيط

لكل من المتغيرات العشوائية من pdf

$$* f(x) = 3x^2 \quad [0,1]$$

الحل:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad (\text{الوسط})$$

$$\mu = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx$$

$$\mu = \left(\frac{3x^4}{4} \right)_0^1 = \frac{3}{4} (1 - 0) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Median (الوسيط)} \rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^{m(\text{الوسيط})} 3x^2 dx \rightarrow \frac{1}{2} = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_0^m$$

$$\frac{1}{2} = [x^3]_0^m = m^3 - 0 \rightarrow m^3 = \frac{1}{2} \rightarrow m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.797$$

$$2) * f(x) = \frac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2} \quad [0, 1]$$

أوجد المتوسط ثم الوسيط

الحل:

$$(\text{المتوسط}) \mu = \int_0^b x \cdot f(x) dx$$

$$\mu = \int_0^1 x \cdot \frac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{2(x)}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} [\ln|1+x^2|]_0^1$$

$$\mu = \frac{2}{\pi} [\ln 2 - \ln 1] = \frac{2}{\pi} (\ln 2 - 0) = \frac{2 \ln 2}{\pi} \approx 0.44127$$

$$\text{Median (الوسيط)} \rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^{m(\text{الوسيط})} \frac{\frac{4}{\pi}}{1+x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi} [\tan^{-1} x]_0^m$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi} [\tan^{-1} m - \tan^{-1} 0] = \frac{4}{\pi} \tan^{-1} m$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi} \tan^{-1} m \rightarrow \frac{\pi}{8} = \tan^{-1} m$$

$$m = \tan \frac{\pi}{8} = 0.414$$

