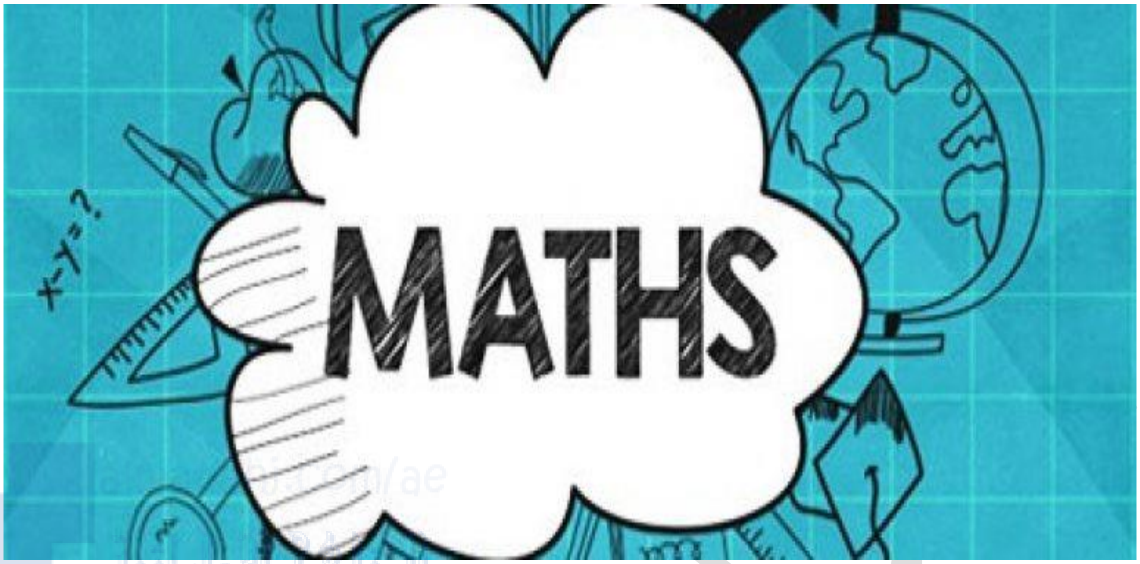
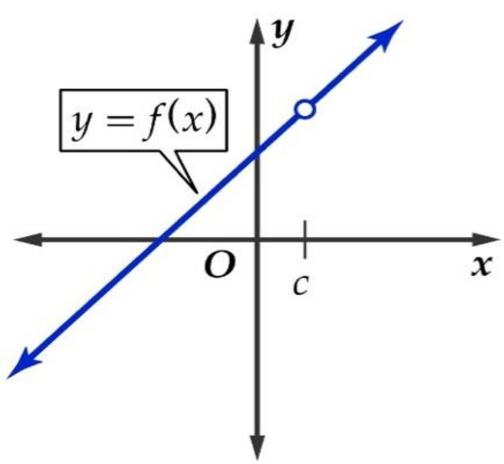
الفصل الأول

2021-2022



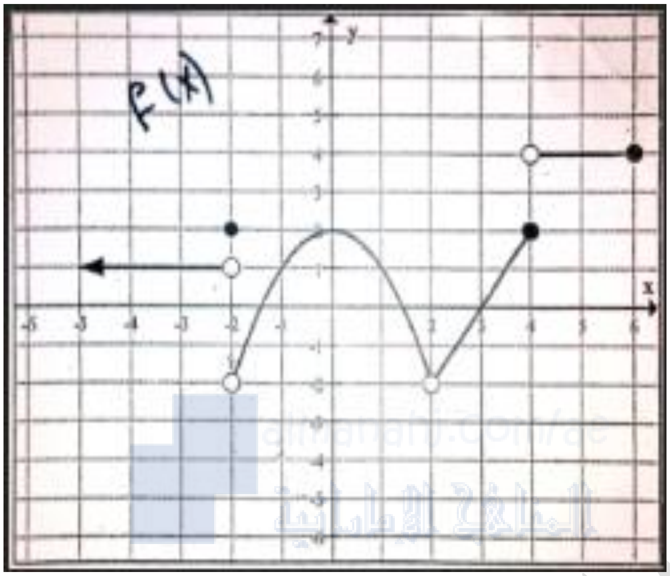
الوحدة الثانية
النهايات و الاتصال

الثاني عشر متقدم



أمجد الجوابرة

" النهايات والاتصال "



أوجد ما يلي مستخدما الشكل المجاور

$f(-2) =$ $\qquad$ $f(4) =$

$f(2) =$ $\qquad$ $f(0) =$

<u>**أوجد**</u>

$\lim_{x \to 4^+} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

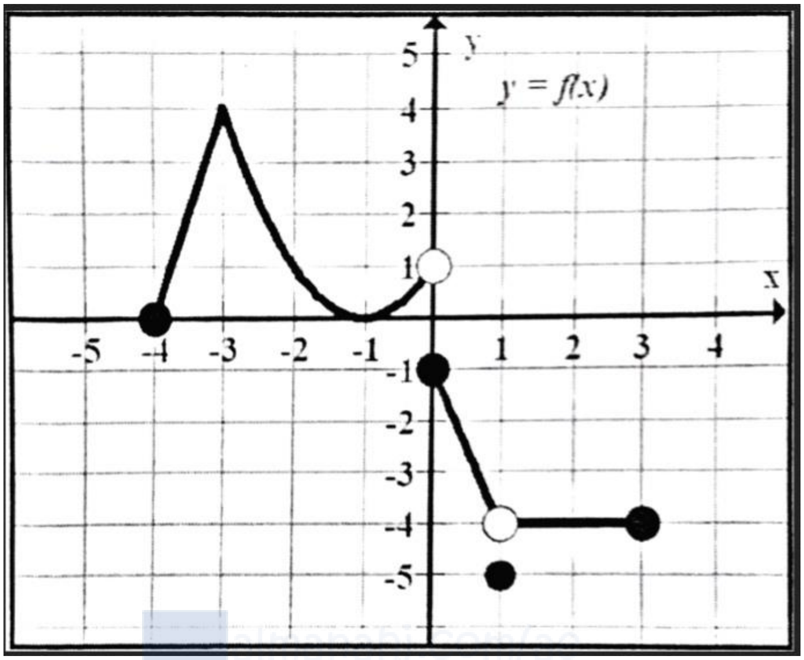
$\lim_{x \to 4} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to -2} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

من الشكل المجاور أوجد ما يلي



$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$$

أذكر نقاط الأنفصال للدالة و حدد نوعها

" نهاية دالة عند نقطه جبريا "

الحالة الأولى : التعويض المباشر

أوجد النهايات التاليه :

$$\lim_{x\to 5}(2x+3) =$$

$$\lim_{x\to 1}(2x-3)^{90} =$$

$$\lim_{x\to -5}\frac{25-x^2}{5-x} =$$

الحالة الثانية : نهاية دالة كسرية بسطها و مقامها صفر عند التعويض $\frac{0}{0}$ ويمكن التخلص منها

$\dfrac{\text{حدوديه}}{\text{حدوديه}}$ ← تحليل

$\dfrac{\text{كسريه}}{\text{حدودية}}$ ← توحيد مقامات

$\dfrac{\text{جذر} - \text{جذر}}{\text{حدوديه}}$ ← ضرب مرافق

أوجد النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} =$

2) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2+6x}{x-3} =$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-3x-10}{x+2} =$

4) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{x+4}}{x-3} =$

5) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\frac{4}{5} - \frac{4}{x+2}}{x-3} =$

6) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

$\lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2+6x}{x^2-4}$

$H.W \quad \lim_{x \to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt{x-3} - \sqrt{5}}$

الحالة الثالثة: الدالة المتشعبة

1) $f(x)\begin{cases} 3-x \quad , \quad x \leq -2 \\ x^2+1 \quad , \quad x > -2 \end{cases}$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$

---

2) $f(x)\begin{cases} 3-2x \, , \quad x < -2 \\ x^2-3 \, , \quad x \geq -2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim_{x\to -3} f(x)$

نهاية الدالة المطلقة

$$| x - b | = \begin{cases} x - b & , \quad x \geq b \\ -(x - b) , & \quad x < b \end{cases}$$

- اذا كانت $f(x) = |x - 3|$ اوجد كل مما يأتي

1) $\lim_{x \to 3} f(x)$ **2)** $\lim_{x \to 4} f(x)$ **3)** $\lim_{x \to 1} f(x)$

- اذا كانت $f(x) = |2x - 8|$ اوجد كل مما يلي

1) $\lim_{x \to 4} f(x)$ **2)** $\lim_{x \to 6} f(x)$ **3)** $\lim_{x \to 1} f(x)$

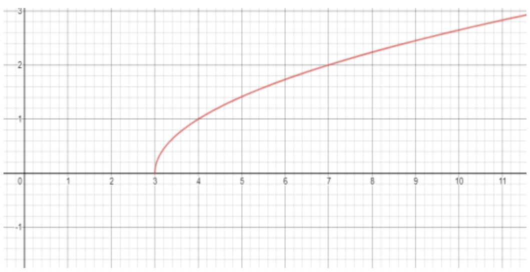
4) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-7}{|x-6|-1}$

5) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x\,|x-2|}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|3-x|}{x-3}$

نهاية الدالة الجذرية

*أرسم $f(x) = \sqrt{x-3}$



❖ مجال الدالة $x \geq 3$ ، النقطة $x = 3$ نقطه طرفية

أوجد ما يأتي

1) $f(3) =$

$f(4) =$

$f(2) =$

2) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3}$ $\quad \lim_{x\to 2} \sqrt{x-3}$ $\quad \lim_{x\to 3} \sqrt{x-3}$

أوجد النهايات التاليه :

1) $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}$ $\quad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{x-2}$ $\quad \lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$

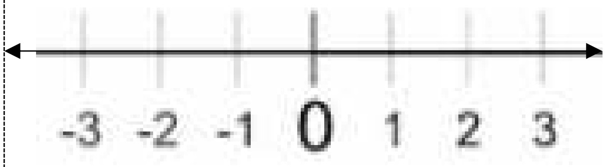
2) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{2+\sqrt{x+3}}$

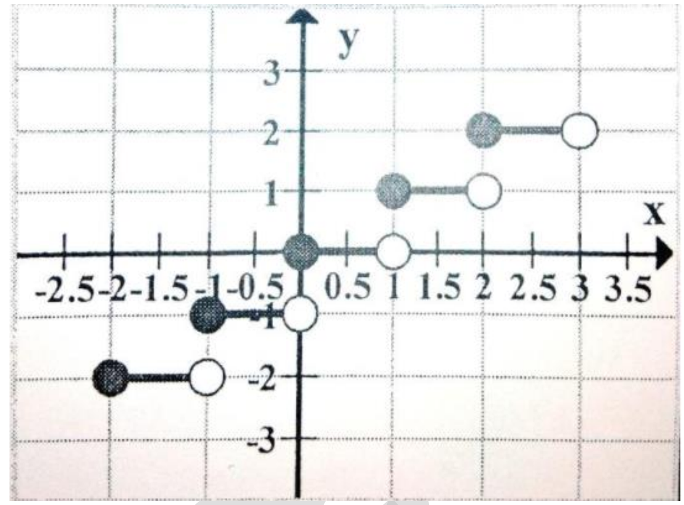
3) $\lim_{x \to 1^-} \frac{|1-x|}{2-\sqrt{x+3}}$

4) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6\,, & x \leq 1 \\ kx - 2\,, & x \geq 1 \end{cases}$

أوجد قيمه k حتى يكون $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجودة

دالة أكبر عدد صحيح





$$[x] = \begin{cases} -2\ , & -2 \le x < -1 \\ -1\ , & -1 \le x < 0 \\ 0\ , & 0 \le x < 1 \\ 1\ , & 1 \le x < 2 \\ 2\ , & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

أوجد ما يلي

$[2.2] =$ $\qquad$ $[-0.3] =$

$[2.9] =$ $\qquad$ $[-5.001] =$

$[-2.9] =$ $\qquad$ $[-5.99] =$

أوجد نهاية ما يلي

$\lim_{x\to 3^+}[x]$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3^-}[x]$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3}[x]$

$\lim_{x\to -2^-}[x]$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2^+}[x]$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2}[x]$

لإيجاد نهاية دالة تحتوي على[ ] نتخلص أولا من دالة الصحيح

$$\lim_{x \to 2.3} [x + 2]$$

$$\lim_{x \to 2^-} 3[x] - 4x$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 3x + [x]}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}} \left[x + \frac{3}{4}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} (x + 1)^{[x]}$$

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{-1}{2} x\right] \qquad \lim_{x \to 2} \left[-\frac{1}{2} x\right]$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x\,([x]+3)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x^2 - [x]\,x - 4}{x-4}$$

$$\lim_{x \to 0.1} \frac{[x]}{|x|}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{\left[\frac{1}{2}x+1\right]}{|x+3|}$$

نهاية الدالة المثلثية

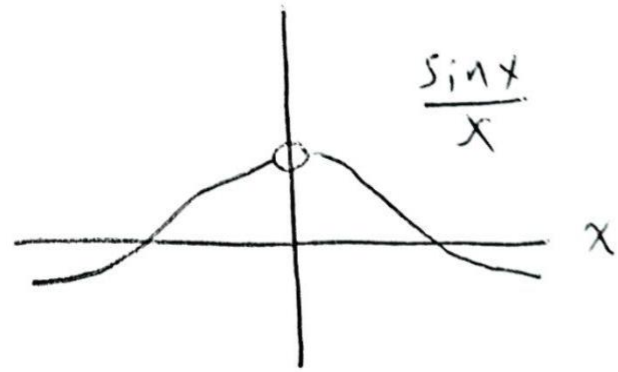
أوجد ما يأتي

$$\lim_{x \to \pi/3} \cos x =$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \sin x =$$

$$\lim_{x \to \pi/6} \frac{1}{\sec x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin k\,x}{L\,x} = \frac{k}{l}$$

أوجد ما يلي :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\ 2x}{5x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\,x}{\sin\ 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan k\,x}{l\,x} = \frac{k}{l}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x}{5x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 6x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{5x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\ 6x^2}{5x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + \sin 3x}{4x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + \sin 3x^2}{3x^2 - 4 \sin 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + \sin 3x^2}{4x \sin 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\sin\frac{x}{3}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} - 2\,[x]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x \; cos3x}{\sin 2x}$$

أوجد قيمه K اذا كان $\lim_{x \to 1} \frac{|x+1|-2}{x^2-x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin kx}$

أوجد ما يلي

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin|x|}{x}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$$

اذا كانت $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

النظرية 3.3

افترض أنّ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ وأنّ n هو أي عدد صحيح موجب. إذًا،

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

حيث إنه لكل n زوجي، نفترض أن $L > 0$.

اذا كانت $\lim_{x\to 2} g(x) = 2$ فما قيمة $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{3g(x)+2}$

النظرية 3.4

لأي عدد حقيقي a، لدينا،

(i) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a,$

(ii) $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$

(iii) $\lim_{x\to a} e^x = e^a$

(iv) $\lim_{x\to a} \ln x = \ln a,$ لكل $a>0$.

(v) $\lim_{x\to a} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a,$ لكل $-1 < a < 1,$

(vi) $\lim_{x\to a} \cos^{-1} x = \cos^{-1} a,$ لكل $-1 < a < 1,$

(vii) $\lim_{x\to a} \tan^{-1} x = \tan^{-1} a,$ لكل $-\infty < a < \infty$

(viii) إذا كانت p كثيرة حدود و $\lim_{x\to p(a)} f(x) = L$.
فإنّ $\lim_{x\to a} f(p(x)) = L$.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sin^{-1} x \qquad \lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} \cos^{-1} x$$

$$\lim_{x\to 0} (\sin 2x + \cos x) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{5x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sec^2 x}{4x^2}$$

النظرية 3.5 (نظرية الشطيرة)

افترض أنّ

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

لكل x في الفترة (c, d) ما عدا النقطة $a \in (c, d)$ وأنّ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

ولعدد L. إذًا، يكون:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$ كما أن

أوجد قيمة النهاية مستخدما نظرية الشطيرة $\lim_{x\to 0}\left(x^2 \sin\frac{3}{x}\right)$

اذا كان $(\sin x + x) \le f(x) \le (x^2 + 2x)$ حيث

$x \neq 0$ في الفترة $[-\pi, \pi]$ أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

" خواص النهايات "

النظرية 3.1

افترض أنّ $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين وافترض أنّ c هو أي ثابت. إذًا سينطبق ما يلي:

(i) $\lim_{x\to a}[c \times f(x)] = c \times \lim_{x\to a} f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (بشرط $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$).

اذا كان $\lim_{x\to 2} g(x) = 6 , \lim_{x\to 2} f(x) = 3$

أوجد ما يلي

* $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{2 + g(x)}$

* $\lim_{x\to 2} [g(x) - f(x)]$

* $\lim_{x\to 2} \frac{3x+4\, f(x)}{g(x)}$

* $\lim_{x\to 2} [f(x).\, g(x)]$

- وضّح" اذكر السبب " لماذا لا تجوز استخدام الخواص للنهايات

$\lim_{x\to 0} x \cot x$

اذا كان $\lim_{x \to -2} f(x) = -5$, $\lim_{x \to -2} g(x) = 4$

أوجد ما يلي

* $\lim_{x \to -2} [f(x) + x^2]$

* $\lim_{x \to -2} [3f(x) - g(x)]$

* $\lim_{x \to -2} \left[10 \dfrac{g(x)}{f(x)} - 3x\right]$

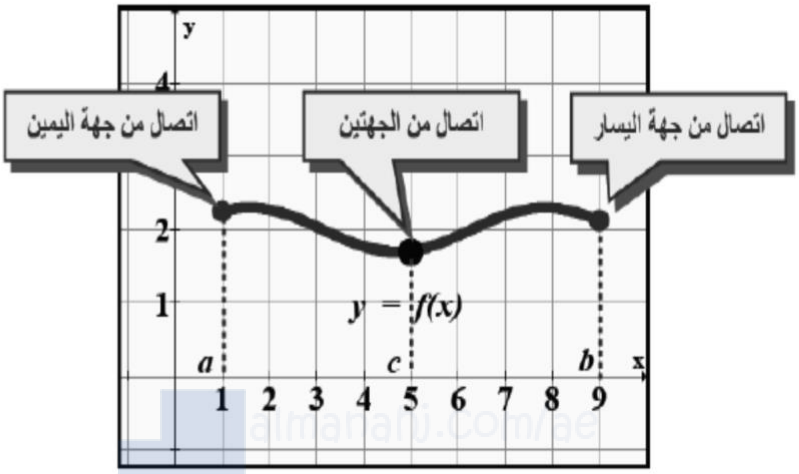
* $\lim_{x \to -2} [2f(x) + 3g(x) + 5x]$

* $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x-1}{f(x)}$

* $\lim_{x \to -2} \left[\sqrt[3]{g(x) - f(x)}\right]$

الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f(x) متصلة عند نقطة داخلية x=c في مجالها $[a, b]$ اذا كان



1. أن تكون $F(c)$ معرفة
2. أن تكون $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

نقطة طرفية : تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة طرفية لها نهاية من جهة اليمين a أو نقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار في مجالها إذا كان .

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \text{ أو } \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

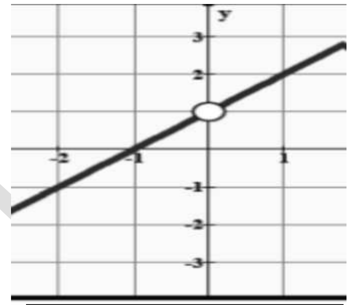
أوجد في اتصال $f(x)$ عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x < 1 \\ 3x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

أوجد في اتصال $f(x)$ عند $x = 3$

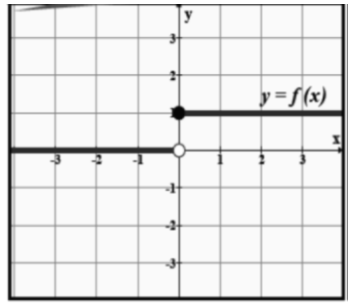
$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & , x > 3 \\ 2 & , x = 3 \\ x + 1 & , x < 3 \end{cases}$$

أنواع عدم الاتصال : " الانفصال "

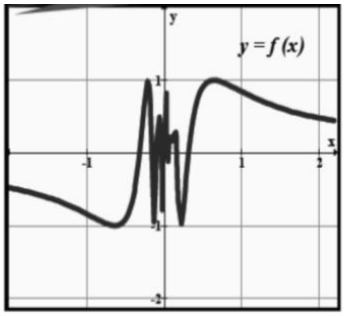


انفصال نتيجة فجوة

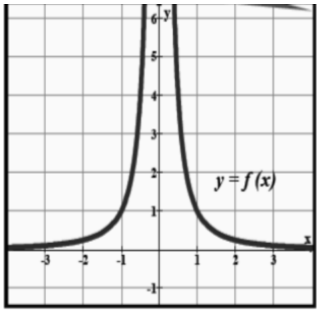
يمكن التخلص منه



انفصال نتيجة قفزة

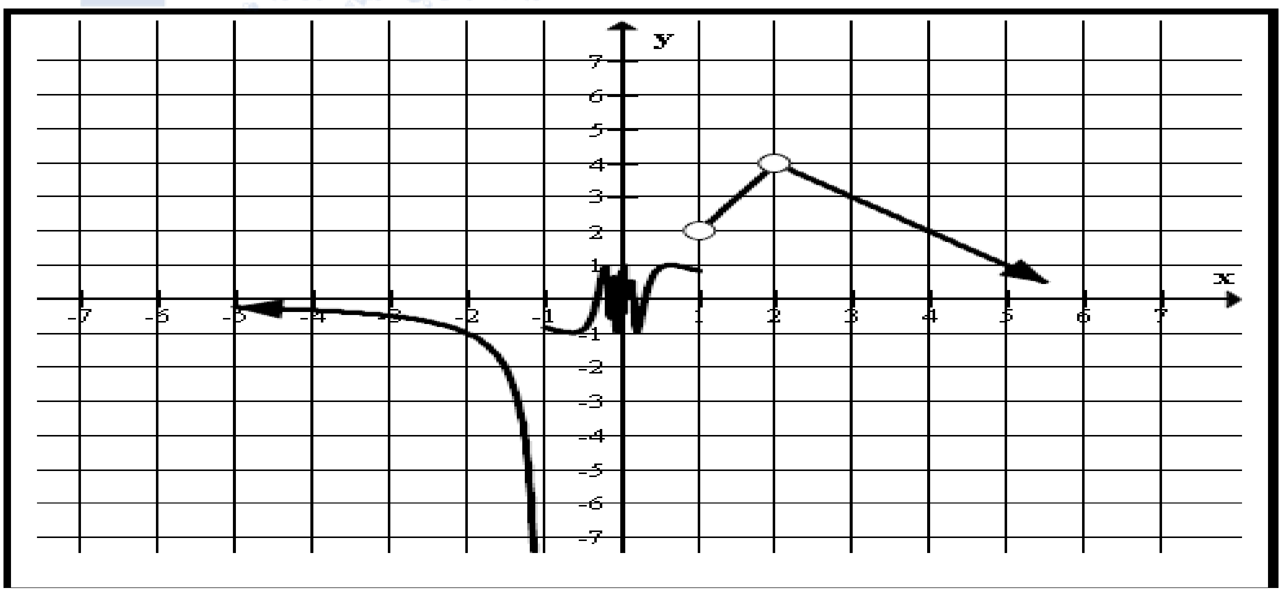


انفصال تذبذبي



انفصال لا نهائي

اوجد نقاط الانفصال ثم حدد نوعها



استعن بالجدول التالي :

نقطة انفصال الدالة	نوع الانفصال	السبب

نظريات الاتصال :

جميع الدوال كثيرات الحدود متصلة علي مجالها R

الدوال المثلثية sinx , cosx متصلة علي مجالها R

دالة المطلق $y = |x|$ متصلة علي مجالها R

دالة الجذر التكعيبي $y = \sqrt[3]{x}$ متصلة علي مجالها R

الدالة الاسية $y = e^x$ متصلة علي مجالها R

الدالة اللوغاريتمية $y = \ln x$ متصلة علي مجالها $x > 0$

دالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x}$ متصلة علي مجالها $x \geq 0$

الدوال العكسية $\sin^{-1} x ,\cos^{-1} x$ متصلة $-1 < x < 1$

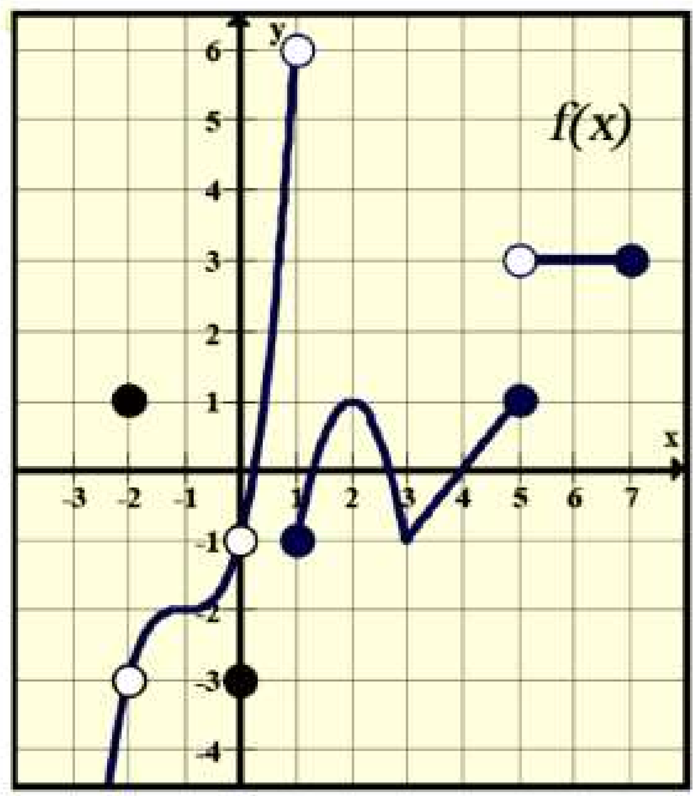
دالة $\tan^{-1} x$ متصلة علي R

الدالة النسبية : التي بسطها ومقامها كثيرة حدود $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ متصلة علي {المقام أصفار} / R

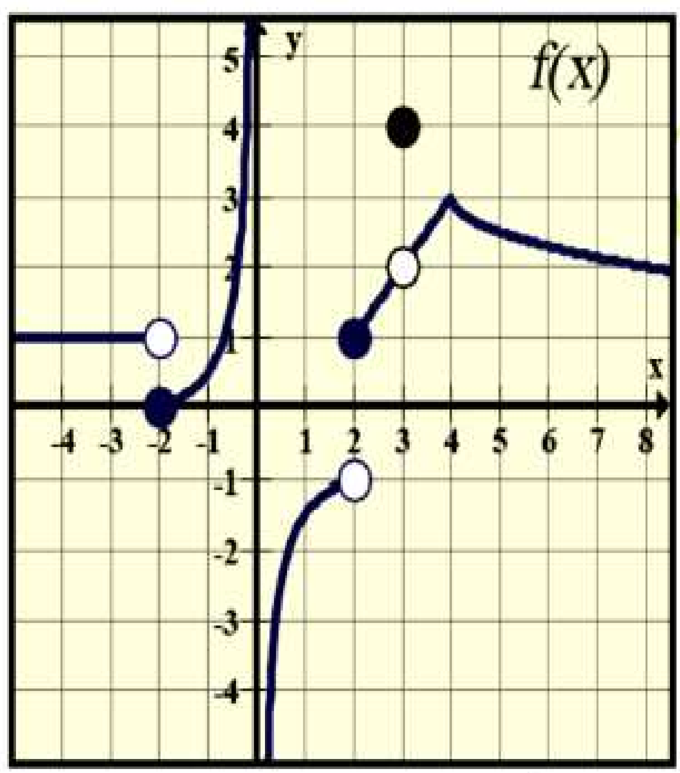
الرسم البياني المقابل يمثل بيان الداليتين $f(x)$, $g(x)$

اقرأ العبارات التالية جيداً ثم ضع العبارة المناسبة أسفل الرسم الذي تحققه :

رقم العبارة	العبارة
1	نهاية الدالة عندما $x \longrightarrow 3$ تساوي2
2	نهاية الدالة عندما $x \longrightarrow 2$ غير موجودة
3	تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x=7$
4	لها انفصال لا نهائي عند $x=0$
5	لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x=-2$
6	الدالة متصلة عند $x=3$



رقم العبارة	....	....	....	....



رقم العبارة	....	....	....	....

أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند النقطة المشار اليها

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-4} \;, x \neq -1$$

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \;, x \neq 4$$

$$f(x) = \frac{\sin 6x + 2x^2}{3x} \quad , \; x = 0$$

أوجد قيمة b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \;, & x \geq -1 \\ bx - 3 \;, & x < -1 \end{cases}$$

ابحث اتصال $f(x)$ عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 8x}{\sin 2x}, & x > 0 \\ -4, & x = 0 \\ \dfrac{4x}{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

حدد الفترة التي تكون عندها $f(x) = \ln(x - 3)$ متصلة

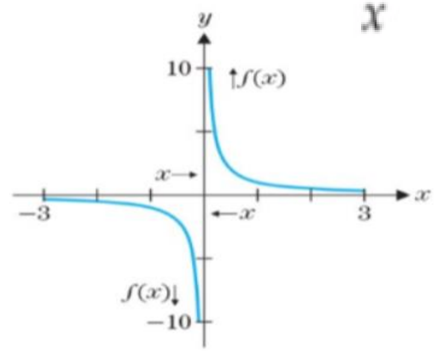
حدد الفترة التي تكون عندها $f(x) = \sin^{-1}(x + 2)$ متصلة

سبب الانفصال	نوع الانفصال عند $x = 0$	الدالة
		$f(x) = \sin\frac{1}{x^2}$
		$G(x) = \frac{1}{x}$
		$L(x) = \begin{cases} x + \cos x\ , x < 0 \\ x^2 - 5\ , x \geq 0 \end{cases}$
		$N(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4\ , x \neq 0} \\ 5 \quad , \quad x = 0 \end{cases}$
		$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x}$
		$K(x) = \cot x$

ارشاد: نوع الانفصال (قفزة- تذبذبي-لا نهائي-يمكن التخلص منه)

" خطوط التقارب "

$$\frac{1}{x}$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

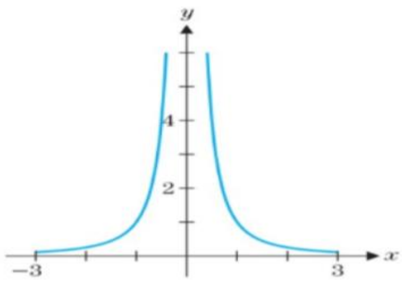
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to \infty^+} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to \infty^-} \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to \infty^+} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to \infty^-} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0$$ نظرية

$$\lim_{x\to\infty^-} \frac{1}{(x-5)^3}$$

$$\lim_{x\to5} \frac{1}{(x-5)^3}$$

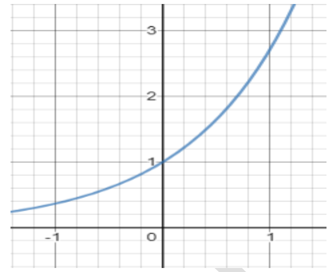
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 2$$

$$\lim_{x\to\infty^+} 4 - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$$

نهاية دالة أسيه

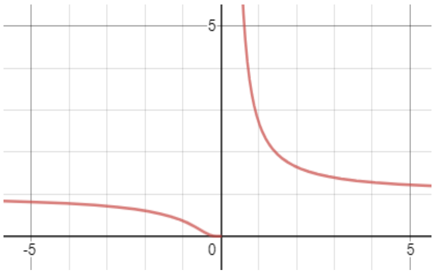


$$\lim_{x\to 0^+} e^x$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^x$$

$$\lim_{x\to \infty} e^x$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x$$



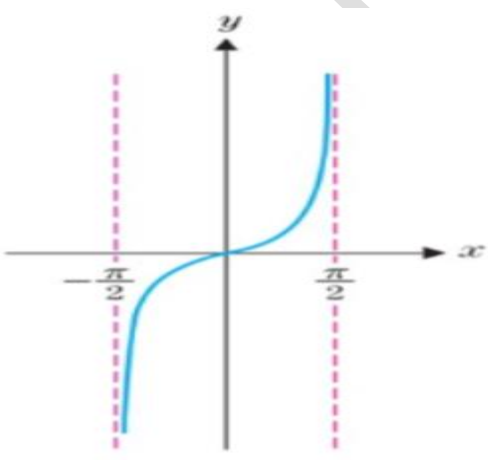
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} =$$

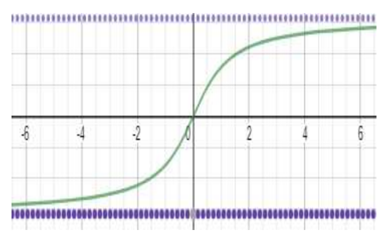
$$y = \tan x$$



$$\lim_{x\to 0} \tan x =$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi^+}{2}} \tan x =$$

$$y = \tan^{-1} x$$



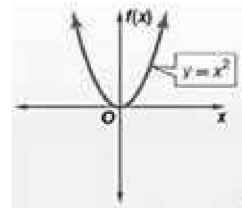
$$\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} =$$

"السلوك الطرفي لدوال كثيرات الحدود"

*كثيرة حدود ذات قوة زوجية

$y = x^n \;, n = 2,4,6,8, \ldots$

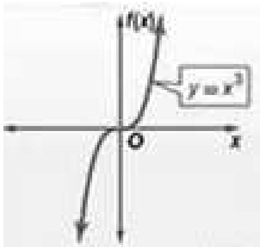


$$\lim_{x\to\infty} x^4 + 3x^3 - 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^2 - 5x^4 + 8$$

*كثيرة حدودية ذات قوة فردية

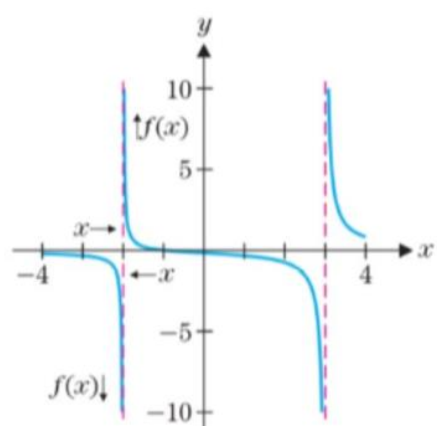
$y = x^n \;, n = 3,5,7, \ldots$



$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 5x + 4$$

$$\lim_{x\to\infty} -(x-1)(x+2)(x+5)$$

أوجد قيمة $\displaystyle \lim_{x\to-2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$



"خطوط التقارب للدوال النسبيه"

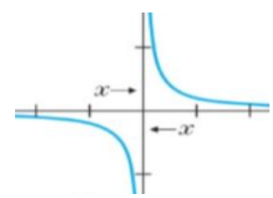
$$f(x)=\frac{ax^{n}+\cdots+a_0}{bx^{m}+\cdots+b_0}$$

- المستقيمات **المقاربة الرأسية** تحدث عند أصفار المقام
- لا يجاد الخط **المقارب الافقي**

1) اذا كانت درجة البسط < درجة المقام ، $n < m$ الخط المقارب الافقي $y = 0$

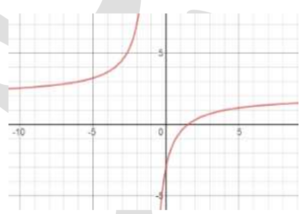
2) اذا كانت درجه البسط = درجة المقام ، $n = m$ الخط المقارب الأفقي $y = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل البسط}}{\text{معامل المقام}}$

3) اذا كانت درجه البسط = درجة المقام ، $n > m$
لا يوجد مستقيم مقارب افقي   يوجد مستقيم مقارب مسائل



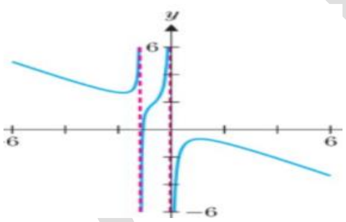
$$y=\frac{5}{x}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$



$$y=\frac{2x-3}{x+1}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$



$$y=\frac{4x^3++5}{-6x^2-7x}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) =$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

أوجد ناتج كل نهاية

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2-x+x^2}{3x^2+4x-1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{4-x^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{4-x^2}$$

حدد $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$

أجب حسب الاقتضاء بعدد أو ∞ أو ∞ - أو غير موجودة

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2-1}, a = 1$$

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-4x+4}, a = 2$$

$$f(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}, a = -1$$

H.W $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$ $\lim_{x\to 0} \cot x$

$\frac{5.11}{107}$ ايجار حجم بؤبؤة العينين

لنفترض أن قطر بؤبؤ العينين لأحد الحيوانات $f(x)mm$

حيثما x كثافة الضوء على بؤبؤ العينين $f(x) = \frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$

أوجد قطر بؤبؤ العينين مع

1)الحد الأدنى منه الضوء 2)الحد الأقصى منه الضوء

$x = 0$ $x = \infty$

إسفنج، تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t) = \frac{105t^2}{10+t^2} + 25$، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)

a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟

b) ما نهاية الدالة عندما $t \to \infty$؟

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

نظرية

اذا كان $\lim\limits_{x \to c} g\,(x) = L$, f متصلة عند L فان

$$\lim_{x \to a} f\left(g(x)\right) = f\,(\lim_{x \to a} g\,(x)) = f\,(L)$$

- اذا كان $\lim\limits_{x \to 2} g\,(x) = -3$ وكان $f(x) = x^3 - 5x + 4$ أوجد

$$\lim_{x \to 2} \mathrm{f}(\,g(x))$$

نظرية

اذا كان *g* متصلة عند *a* وكان *f* متصلة عند *g(a)*

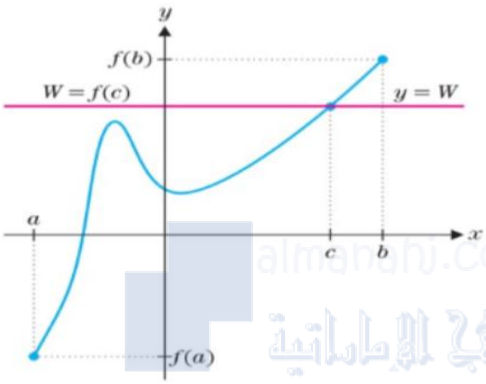
فان *fog* متصلة عند *x = a*

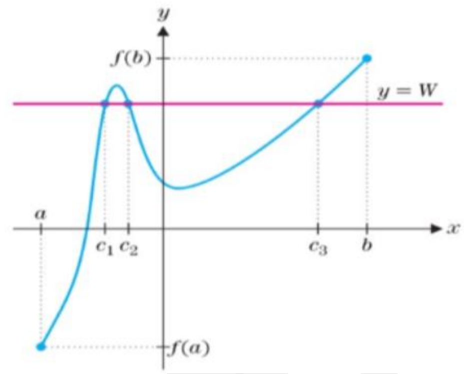
اذا كان $f(x) = \sqrt{x-1}\,, g(x) = \frac{2}{x+1}$ اثبت ان *fog* متصلة عند *x=0*

" نظرية القيمه الوسطية "

اذا كانت f متصله على الفترة $[a,b]$, كان $f(a) < W < f(b)$

فانه يوجد عدد $a < c < b$ حيث $f(c) = W$





*اذا كان $f(x) = x^3 + 2x - 1$ حيث $x \varepsilon [1,3]$ اثبت انه يوجد

$c \varepsilon [1,3]$ حيث $f(c) = 5$ ثم أوجد قيمه c

نظرية 2 : اذا كان f متصلة عند $[a,b]$ و كان

$f(b), f(a)$ لهما شارتان متعاكستان فانه يوجد على الأقل

$c\ \varepsilon\ (a,b)$ حيث $f(c) = 0$

اذا كان $f(x) = x^3 - x - 1$ حيث $x\varepsilon\ [-1,2\ ]$ اثبت انه

يوجد على الأقل $c\ \varepsilon\ (1,2)$ حيث $f(c) = 0$ ثم أوجد c

- استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $\frac{1}{4}$ تحتوي على صفر

" تقدير طول المنحنى "

تذكر ميل الخط المستقيم المار بنقطتين $(x1, y1), (x2, y2)$

$$M = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

قدر ميل $y = x^2 + 1$ عند $x = 1$

$x > 1$

النقطة الثانية	M

$x < 1$

النقطة الثانية	M

"تقدير طول قوس على منحنى "

تذكر المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2}$$

*قدر طول قوس المنحنى $y = \sin x$ بالفترة $0 \leq x \leq \pi$