## شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

## أوراق عمل الدرس الأول الدوال الأصلية - المشتقات العكسية من الوحدة الخامسة



## التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

## روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

| التربية الاسلامية | اللغة العربية | اللغة الانجليزية | الرياضيات |
|---|---|---|---|

## المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني

| | |
|---|---|
| 1 | أسئلة الامتحان النهائي الالكتروني والورقي - بريدج |
| 2 | حل اختبار تجريبي يحاكي الامتحان النهائي وفق الهيكل الوزاري |
| 3 | اختبار تجريبي يحاكي الامتحان النهائي وفق الهيكل الوزاري |
| 4 | حل تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي |
| 5 | تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي |

# الوحدة الخامسة – التَّكامل (Integration)

## (5-1) الدّوال الأصلية / المشتقّات العكسية (Antiderivatives)

- التّكامل غير المحدود: هو كافّة المشتقّات العكسية للدالة $f(x)$ ، ويرمز له بِـ $\int f(x)\,dx$ .

**نظريّة (1-1):** إذا كانت كل من $F(x)$ ، $G(x)$ مشتقّات عكسية للدالة $f(x)$ في فترة ما، فإنّ $G(x) = F(x) + c$ أو $G(x) - F(x) = c$ ، حيث $c$ هي ثابت التّكامل.

- $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ حيث $f(x)$ هي المكامل، و $dx$ هي متغير التكامل، و $c$ هي ثابت التكامل
- أي أنّ $(c)$ هي الفرق بين أي مشتقّتين عكسيتين (دالتين أصليتين) لِـ $(f)$ .

- ✓ **Indefinite Integral: is all the antiderivatives of the function $f(x)$, and is denoted by $\int f(x)\,dx$ .**

**THEOREM 1.1: Suppose that *F* and *G* are both antiderivatives of *f* on an interval *I* . Then, $G(x) = F(x) + c$ , or $G(x) - F(x) = c$ for some constant *c*.**

- ✓ **The process of computing an integral is called integration. Here, $f(x)$ is called the integrand, the term $dx$ identifies *x* as the variable of integration and *c* is an arbitrary constant (the constant of integration).**
- ✓ **(c) is the difference between any two antiderivatives (original functions) of $(f)$ .**

س1) إذا كانت كل من $F(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ ، $G(x)=\frac{-3}{x^2+3}$ مشتقّتان عكسيتان لِـ $f(x)$ فجد $(c)$ ؟

If $F(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$, $G(x)=\frac{-3}{x^2+3}$ are antiderivatives of $f(x)$, find $(c)$ ?

- لإيجاد قيمة $\left(f(x)\right)$ فإنّنا نشتق أحدهما. $\overline{F}(x) = \overline{G}(x) = f(x)$ وبعبارة أخرى فإنّ $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ .

أي أنّ المشتقّة تلغي التّكامل لأنّ التّكامل هو المشتقّة العكسية للمشتقّة .

- $\int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x) + c$ . والتكامل يلغي المشتقة.
- $\frac{d}{dx}(a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx) = a\frac{d}{dx}(\int f(x)\,dx) + b\frac{d}{dx}(\int g(x)\,dx) = af(x) + bg(x)$

س2) إذا كانت $f(x)=\frac{d}{dx}(x^2)$ ، $g(x)=\frac{d}{dx}(xsinx)$ فجد:

**A)** $\int f(x)\,dx$

**B)** $\int -f(x)\,dx$

**C)** $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx$

**D)** $\int \left(x + f(x)\right) dx$

س3) إذا كانت $\int f(x)\,dx = x^3 + 5x^2 + 7x - 3$ فجد $\bar{f}(1)$ ؟

If $\int f(x)\,dx = x^3 + 5x^2 + 7x - 3$ find $\bar{f}(1)$ ?

س4) أثبت أنّ $F(x) = e^{2x}\ln(3x)$ هي مشتقّة عكسية (دالة أصلية) للدالة $f(x) = e^{2x}(\frac{1}{x} + \ln(9x^2))$

Prove that $F(x) = e^{2x}\ln(3x)$ is the antiderivative (original) of the function $f(x) = e^{2x}(\frac{1}{x} + \ln(9x^2))$

(1-2) نظريّة $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ , حيث $n \neq -1$

$$\int x\,dx =$$

$$\int c\,dx = cx + c_1$$

$$\int 2\,dx =$$

(1-3) نظريّة $\int [\,a\,f(x) + b\,g(x)\,]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

(1-4) نظريّة $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ لكل $x \neq 0$ فإنّ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

وعليه فإنّه وبشكل عام إذا كان $f(x) \neq 0$ ، وقابلة للاشتقاق فإنّه وحسب قاعدة السّلسلة

More generally, notice that if $f(x) \neq 0$ and $f$ is differentiable, we have by the chain rule that

$$\frac{d}{dx}\ln[f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot \bar{f}(x) \Rightarrow \frac{\bar{f}(x)}{f(x)}$$

وعليه فإنّ $\int \frac{\bar{f}(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

في الأسئلة من (5-9) جد التّكامل ( الدالة الأصلية ) ؟ Find the integration (general antiderivative) ?

5) $\int \frac{3\,dx}{3x-5}$

6) $\int \frac{2x+1}{x-3}\,dx$

7) $\int \frac{3x}{x^2+5}\,dx$

8) $\int \frac{sinx}{5-cosx}\,dx$

9) $\int \frac{5}{2x+9}\,dx$

## قواعد وقوانين التّكامل Integration Formulas

1) $\int c\,dx = cx + c_1$

2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

3) $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$ تكامل الدوال الخطية المرفوعة لقوة Integration of Linear Functions raised to a power

$\int (2x+3)^9\,dx =$

4) إذا وجدت المشتقّات العليا أي $\bar{f}(x)\,,\bar{\bar{f}}(x)\,,\bar{\bar{\bar{f}}}(x)$ فإنّ:

$\bar{f}(x)$ هي مشتقّة عكسية لِ $f(x)$ و $\bar{\bar{f}}(x)$ هي مشتقّة عكسية لِ $f^{(3)}(x)$ وهكذا.....

5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

6) $\int \frac{\bar{f}(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

7) $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k(\ln e)} + c \quad ,$

8) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{(1)\,\ln(a)} + c \quad ,$

$\int 2^{(3x)}\,dx =$

وعليه نتيجة $\int \bar{f}(x)\,e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

لماذا؟ $y=e^{kx}$ $\bar{y}=ke^{kx}$

$\int 2x\,e^{x^2}\,dx = e^{x^2} + c$

وكأنّه الحل كالآتي $\frac{e^{x^2}}{2x\,\ln e} + c$

## 9) Integration of Inverse Trigonometric Functions تكامل معكوس الدوال المثلّثية

1) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}(x)+c$

2) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x)=\frac{-\frac{d}{dx}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -\sin^{-1}(x)+c$

$-1<x<1$

3) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x)}{1+x^2}$

4) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}(x)=\frac{-\frac{d}{dx}(x)}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}(x)+c$

$(-\infty,\infty)$

5) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}(x)=\frac{\frac{d}{dx}(x)}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

6) $\frac{d}{dx}\csc^{-1}(x)=\frac{-\frac{d}{dx}(x)}{|x|\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}(x)+c$

$|x|>1$

## 10) Integration of Trigonometric Functions تكامل الدوال المثلّثية

1) $\frac{d}{dx}sinx=cosx \Rightarrow \int cosx\,dx=sinx+c$

$\frac{d}{dx}sinkx=kcos(kx) \Rightarrow \int coskx\,dx=\frac{sinkx}{k}+c$

2) $\frac{d}{dx}cosx=-sinx \Rightarrow \int sinx\,dx=-cosx+c$

3) $\frac{d}{dx}tanx=sec^2x \Rightarrow \int sec^2x\,dx=tanx+c$

4) $\frac{d}{dx}cotx=-csc^2x \Rightarrow \int csc^2x\,dx=-cotx+c$

5) $\frac{d}{dx}secx=secx\,tanx \Rightarrow \int secx\,tanx\,dx=secx+c$

6) $\frac{d}{dx}cscx=-cscx\,cotx \Rightarrow \int cscx\,cotx\,dx=-cscx+c$

نستنبط قانون $\int tanx\,dx$ و $\int cotx\,dx$ من قاعدة البسط مشتقّة للمقام

7) $\int tanx\,dx=\int \frac{sinx}{cosx}dx=-\ln|cosx|+c$

8) $\int cotx\,dx=\int \frac{cosx}{sinx}dx=\ln|sinx|+c$

وأمّا $\int secx\,dx$ و $\int cscx\,dx$ فتحل بالتّكامل بالتعويض سنشرحه فيما بعد ولكن للعلم

9) $\int secx\,dx=\ln|secx+tanx|+c$ 10) $\int cscx\,dx=-\ln|cscx+cotx|+c$

# المعادلات التّفاضلية Differential Equations

اذا كان $\frac{d}{dt}s(t) \Rightarrow v(t) \overset{\text{نشتق}}{\Rightarrow} a(t)$ derive

فإنّ $\int a(t)\,dt = v(t) + c$ and $\int v(t)\,dt = s(t) + c$

س10) إذا كانت دالة التّسارع $a(t) = 3sint + 1$ ، والسّرعة المتّجهة الابتدائية هي $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 4$ فجد دالة المسافة (الدالة المكانية)؟

Determine the position function if the acceleration function is $a(t) = 3sint + 1$, the initial velocity is $v(0) = 0$ and the initial position is $s(0) = 4$ ?

## أسئلة متنوعة

1) $\int dx =$

2) $\int \pi\ dx =$

3) $\int \frac{x}{2}\,dx =$

4) $\int sin^2x\,dx =$

5) $\int cos^2x\,dx =$

6) $\int \frac{cos2x}{sinx+cosx}\,dx =$

7) $\int tan^2x\,dx =$

8) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}\,dx =$

9) $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x^{\frac{2}{3}}}dx =$

10) $\int (2sinx + cosx)\, dx =$

11) $\int 2secx\, tanx\, dx =$

12) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

13) $\int \frac{4cosx}{sin^2x}\, dx =$

14) $\int (4x - 2e^x)\, dx =$

15) $\int (2x^{-1} + sinx)\, dx =$

16) $\int \frac{4x}{x^2+4}\, dx =$

17) $\int \frac{cosx}{sinx}\, dx =$

18) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\, dx =$

19) $\int \frac{e^x+3}{e^x}\, dx =$

20) $\frac{d}{dx} \ln|secx + tanx| =$

21) $\frac{d}{dx} \ln|2sinx| =$

22) $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\, dx =$

23) $\int \frac{1}{e^x+1}\, dx =$

24) $\int \frac{4}{x} \sqrt[3]{5x^3 - x^4}\, dx =$

25) جد المشتقّة العكسية وذلك بعكس قاعدة السّلسلة أو قاعدة الضّرب أو قاعدة القسمة؟

Find an antiderivative by reversing the chain rule, product rule or quotient rule?

$\int \frac{7x^6e^{2x} - 2x^7e^{2x}}{e^{4x}}\, dx =$

26) أثبت أنّ الدالة $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ دالة فردية؟

Prove that $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ is an odd function?

أوجد التكاملات التالية:

27) $\int (e^x-1)^2\,dx=$

28) $\int \left(e^{0.5x}+\frac{0.5}{x}\right)dx=$

29) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx=$

30) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})}\,dx=$

31) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=$

32) $\int [(\pi+e^{cot\pi x})\,csc^2(\pi x)]\,dx=$

33) $\int \frac{e^{cotx}}{1-cos^2x}\,dx=$

34) $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx=$

35) $\int \frac{1+x}{x^2+1}\,dx=$

36) جد معادلة الدالة $y = f(x)$ حيث $\frac{d^2y}{dx^2} = 6$ والمماس المرسوم لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النّقطة $(0\ ,1)$ أفقياً؟

Find the equation of the function $y = f(x)$ where $\frac{d^2y}{dx^2} = 6$ and the tangent to the curve of the function $f(x)$ at the point (0,1) horizontally?

37) حدد الدالة المكانية $s(t)$ إذا كانت:

Determine the position function if:

A) دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي $s(0) = 3$ ؟

A) the velocity function is $v(t) = 3 - 12t$ and the initial position is $s(0) = 3$ ?

B) دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي $s(0) = 0$ ؟

B) the velocity function is $v(t) = 3e^{-t} - 2$ and the initial position is $s(0) = 0$ ?

38) جد الدالة $f(x)$ بحيث أنّ النّقطة $(1,2)$ تقع عليه وكذلك ميل المماس عند $(1,2)$ هو 3 و $\bar{\bar{f}}(x) = x - 1$ ؟

Find a function $f(x)$ such that the point $(1,2)$ is on the graph of $y = f(x)$, the slope of the tangent line at $(1,2)$ is 3 and $\bar{\bar{f}}(x) = x - 1$ ?

39) جد الدالة $f(x)$ بناء على المعطيات التّالية:

Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions:

A) $\bar{\bar{f}}(t) = 4 + 6t$ , $f(1) = 3$ , $f(-1) = -2$

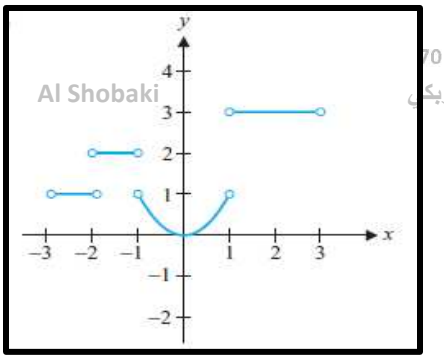
B) $\bar{\bar{f}}(x) = 4 - \frac{2}{x^3}$

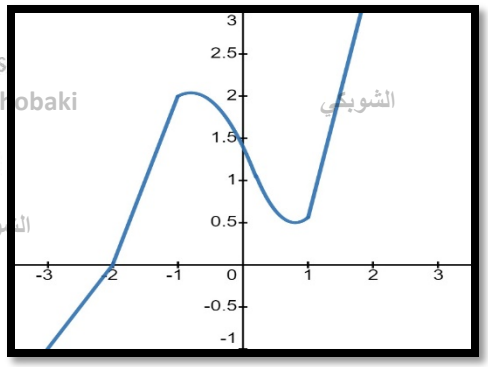
جد كل الدوال التي تحقق الشروط المعطاة

Find all function satisfying the given conditions:

40) أرسم صورة تقريبية لِ $f(x)$ من $y = \bar{f}(x)$ المعطاة ؟

Sketch the graph of $f(x)$ corresponding to the given graph of $y = \bar{f}(x)$ ?




41) أرسم صورة تقريبية لِ $f(x)$ من $y = \bar{\bar{f}}(x)$ المعطاة ؟

Sketch the graph of $f(x)$ corresponding to the given graph of $y = \bar{\bar{f}}(x)$ ?