السؤال 21 (يكون من احدى هذه الاسئلة)

نوع السؤال : كتابي (7 درجات)

تمارين 9 -14

صفحة 534 من الكتاب

(9) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 400 خلية ويتضاعف تعداده بعد ساعة واحدة إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد عدد افراد المجتمع بعد 3 ساعات

* تحكم من السؤال مع الفقرة ج

$400 \xrightarrow{\text{1 ساعة}} 800 \xrightarrow{1} 1600 \xrightarrow{1} 3220$

عدد افراد المجتمع يكون 3200 خلية

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y'(t) = ky$, $y(0) = 400$, $T_d = 1$ $(y(1) = 800)$

$\frac{dy}{dt} = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + c$

$y = e^{kt+c}$

$y = Ae^{kt}$

$k = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{1}$

$y = Ae^{t \cdot \ln 2}$

$y(0) = 400$

$A = 400$

$y(t) = 400e^{t\ln 2}$

(ج) حدد عدد افراد المجتمع بعد 3.5 ساعات

$y(3.5) = 400e^{3.5\ln 2}$

$= 4525$

خلية

(10) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية وبعد ساعتين اصبح عدد الخلايا 400 إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد عدد افراد المجتمع بعد 6 ساعات

2 ساعتين

100 — 400 — 1600 — 6400

4 أضعاف

يمكن حل السؤال مع الفقرة ج

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y'(t) = ky \quad y(0) = 100, \quad y(2) = 400$

$\frac{dy}{dt} = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dt = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + c$

$y = e^{kt+c}$

$y = Ae^{kt}$

$y(0) = 100$

$A = 100$

$y = 100e^{kt}$

$y(2) = 400$

$100e^{2k} = 400$

$e^{2k} = 4 \Rightarrow$

$2k = \ln 4 \Rightarrow k = \ln 2$

$y = 100e^{t\ln 2}$

(ج) أوجد عدد الخلايا بعد مرور 7 ساعات.

$y(7) = 100e^{7\ln 2}$

$= 12800$ خلية

(11) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية ويتضاعف تعداده كل 4 ساعات ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 400

$100 \xrightarrow{4} 200 \longrightarrow 400$

بعد 8 ساعات .

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y'(t) = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + c$

$y = e^{kt+c}$

$y = Ae^{kt}$

$k = \frac{\ln 2}{Td} = \frac{\ln 2}{4}$

$y(0) = 100$

$A = 100$

$y(t) = 100\,e^{\frac{\ln 2}{4}t}$

(ج) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 6000

$y(t) = 6000$

$100\,e^{\frac{\ln 2}{4}t} = 6000$

$e^{\frac{\ln 2}{4}t} = 60$

$\frac{\ln 2}{4}t = 60$

$t = \frac{4 \times 60}{\ln 2}$

$t = 23.628$ ساعة

(12) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 200 خلية ويتضاعف تعداده ثلاث مرات كل 5 ساعات ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 5400

$$200 \xrightarrow{5} 600 \xrightarrow{5} 1800 \xrightarrow{5} 5400$$

3 مرات

بعد 15 ساعة .

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y(5) = 600$

$y'(t) = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + C$

$y = e^{kt+C}$

$y = Ae^{kt}$

$y(0) = 200 \Rightarrow A = 200$

$y(5) = 600$

$200e^{k(5)} = 600$

$e^{5k} = 3$

$5k = \ln 3$

$k = \frac{\ln 3}{5}$

$y = 200e^{\frac{\ln 3}{5}t}$

(ج) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 20000

$y(t) = 20000$

$200e^{\frac{\ln 3}{5}t} = 20000$

$e^{\frac{\ln 3}{5}t} = 100$

$\frac{\ln 3}{5}t = \ln 100$

$t = \frac{5\ln 100}{\ln 3} = 20.95$

(13) بكتريا تصيب الجسم وعددها 10^8 خلية ويتضاعف تعدادها كل 20 دقيقة ،تم اعطاء الشخص المريض علاج (حقنه) لمقاومة هذه البكتريا حيث يقتل العلاج 90% من هذه الخلايا . وبعد مرور الفترة الزمنية T وجد ان عدد الخلايا رجع الى 10^8 ، اوجد T

$10^8 \quad \frown \quad 10\% \times 10^8 \quad \overset{T}{\frown} \quad 10^8$

t

$y'(t) = ky \quad , \quad y(0) = 10\% \times 10^8 \quad , \quad T_d = 20$

$y(t) = Ae^{kt}$

$y(0) = 10\% \times 10^8$

$\Rightarrow A = 0.1 \times 10^8$

$K = \frac{\ln 2}{20}$

$y(t) = 0.1 \times 10^8 \, e^{\frac{\ln 2}{20}t}$

$y(T) = 10^8$

$0.1 \times \cancel{10^8} \, e^{\frac{\ln 2}{20}T} = \cancel{10^8}$

$e^{\frac{\ln 2}{20}T} = 10$

$\frac{\ln 2 \, T}{20} = \ln 10$

$T = \frac{20 \ln 10}{\ln 2} = 66.44$

---

(14) تشير ابحاث العلماء عام $1950(t=0)$ الى ان مساحة اليابسة التي احتاجها عدد سكان الارض لزراعتها هي 10^9 هكتار وفي عام $1980(t=30)$ احتاجوا الى 2×10^9 هكتار اذا كان مساحة اليابسة الصالحة للزراعة تنمو بنسبة مئوية ثابتة .اوجد في اي سنة يكفي عدد السكان زراعة 3.2×10^9 هكتار

$10^9 \quad \frown \quad 2\times10^9 \quad \overset{T}{\frown} \quad 3.2\times10^9$

1950 $t=0$ — 1980 $t=30$ — ?

$y'(t) = ky \quad , \quad y(0) = 10^9 \quad , \quad T_d = 30$

$y(t) = Ae^{kt}$

$y(0) = 10^9 \Rightarrow A = 10^9$

$K = \frac{\ln 2}{T_d} = \frac{\ln 2}{30}$

$y(t) = 10^9 \, e^{t\frac{\ln 2}{30}}$

$y(T) = 3.2 \times 10^9$

$10^9 \, e^{\ln 2/30 \, T} = 3.2 \times 10^9$

$\Rightarrow T = 50.34$

تقريباً عام 2000 .

السؤال 20 (يكون من احدى هذه الاسئلة)

نوع السؤال : كتابي (7 درجات)

تمارين 21 -32

صفحة 521 من الكتاب

ملاحظات : في بعض تمارين هذا السؤال لا داعي لإكمال الحل الى النهاية لانها مسائل طويلة جداً

اوجد التكاملات التالية

(21) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^2+2x-8 & x^3+x+2 \\ & -(x^3+2x^2-8x) \\ \hline & -2x^2+9x+2 \\ & -(-2x^2-4x+16) \\ \hline & 13x-14 \end{array}$$

$\frac{13x-14}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$

$13x-14 = A(x-2) + B(x+4)$

$x=2 \to 12 = 6B \to B=2$

$x=-4 \to -66 = -6A \to A=11$

$= \int x-2 + \frac{13x-14}{x^2+2x-8}\,dx$

$= \int x-2 + \frac{11}{x+4} + \frac{2}{x-2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2} - 2x + 11\ln|x+4| + 2\ln|x-2| + C$

(22) $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x-6}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-5x-6 & x^2+1 \\ & -(x^2-5x-6) \\ \hline & 5x+7 \end{array}$$

$\frac{5x+7}{x^2-5x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-6}$

$5x+7 = A(x-6) + B(x+1)$

$x=6 \to 37 = 7B \to B = \frac{37}{7}$

$x=-1 \to 2 = -7A \to A = -\frac{2}{7}$

$= \int 1 + \frac{5x+7}{x^2-5x-6}\,dx$

$= \int 1 + \frac{-2/7}{x+1} + \frac{37/7}{x-6}\,dx$

$= x - \frac{2}{7}\ln|x+1| + \frac{37}{7}\ln|x-6| + C$

(25) $\int \frac{4x^3 - 1}{x^4 - x}\, dx$

البسط = مشتقة المقام .

$= \ln |x^4 - x| + c$

(26) $\int \frac{x}{x^4 + 1}\, dx = \int \frac{x}{(x^2)^2 + 1}\, dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \frac{x}{u^2 + 1} \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1}\, du$

$= \frac{1}{2} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{2} \tan^{-1} x^2 + c .$

السؤال السادس (يكون من احدى هذه الاسئلة)

نوع السؤال : كتابي (6 درجات)

تمارين 17 -20

صفحة 429 من الكتاب

(17) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمستقيمات

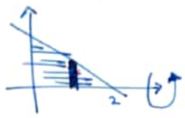
$x = 0$ ، $y = 0$ ، $y = 2 - x$

(أ) حول المحور x

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 (2 - x)^2 \, dx$

$= \frac{8\pi}{3}$



dx اقراص

$r_o = 2 - x$

$r_i = 0$

(ب) حول المستقيم $y = 3$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 3^2 - (1 + x)^2 \, dx$

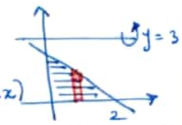
$= \frac{28\pi}{3}$

dx حلقات

$r_o = 3 - 0$

$r_i = 3 - (2 - x)$

$= 1 + x$



(18) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات

$y = x^2$ ، $y = 4 - x^2$

(أ) حول المحور x

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

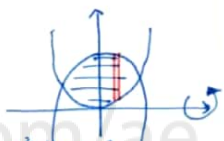
$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2)^2 - (x^2)^2 \, dx$

$= \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi$

dx حلقات

$r_o = 4 - x^2$

$r_i = x^2$



$x^2 = 4 - x^2$

$2x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

(ب) حول المستقيم $y = 4$

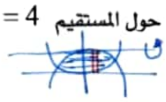
$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2)^2 - (x^2)^2 \, dx$

$= \frac{64\sqrt{2}}{3} \pi$

dx حلقات

$r_o = 4 - x^2$

$r_i = x^2$



(19) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالدوال $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ ، $x = 0$

(أ) حول المحور y

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

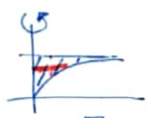
$= \pi \int_0^2 (y^2)^2 \, dy$

$= \frac{32\pi}{5}$

dy اقراص

$r_o = y^2$

$r_i = 0$



$y = \sqrt{x}$

$x = y^2$

(ب) حول المستقيم $x = 4$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

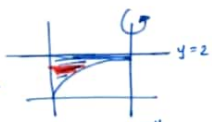
$= \pi \int_0^2 4^2 - (4 - y^2) \, dy$

$= \frac{224}{15} \pi$

dy حلقات

$r_o = 4 - 0$

$r_i = 4 - y^2$



(19) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالدوال $y=\sqrt{x}$ ، $y=2$ ، $x=0$

(أ) حول المحور y

$y=\sqrt{x}$

$x=y^2$

القراص dy

$r_o = y^2$

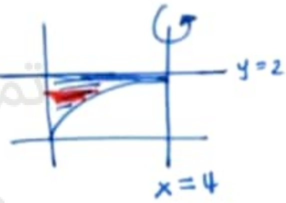
$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^2 (y^2)^2 \, dy$$

$$= \frac{32\pi}{5}$$

(ب) حول المستقيم $x=4$



حلقات dy

$r_o = 4-0$

$r_i = 4-y^2$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

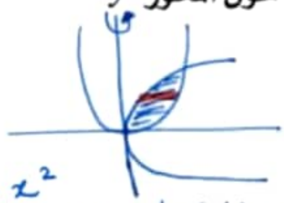
$$= \pi \int_0^2 4^2 - (4-y^2) \, dy$$

$$= \frac{224}{15}\pi$$

---

(20) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=x^2$ ، $x=y^2$

(أ) حول المحور y



$y=x^2$

نقاط التقاطع $y=(y^2)^2$

$y=y^4 \rightarrow y=0 , y=1$

حلقات dy

$r_o = \sqrt{y} - 0$

$r_i = y^2 - 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - (y^2)^2 \, dy$$

$$= \frac{3\pi}{10}$$

(ب) حول المستقيم $x=1$

حلقات dy

$r_o = 1-y^2$

$r_i = 1-\sqrt{y}$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1-y^2)^2 - (1-\sqrt{y})^2 \, dy$$

$$= \frac{11\pi}{30}$$