تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade15

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/almanahj_bot

(8 - 4) المعدلات المرتبطة

استراتيجية حل المسألة:

1) الصورة والمتغيرات والثوابت.

2) المعلومات العددية.

3) المطلوب: عادة ما يكون معبرًا عنه كمشتقة بالنسبة للزمن.

4) المعادلة: علاقة تربط بين المتغيرات بحيث تكون جميع المعدلات معلومة ماعدا المعدل المطلوب.

5) الاشتقاق: نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t .

6) التعويض: نعوض بالقيم المعلومة لإيجاد المطلوب.

ملحوظة (1):

لاحظ أن معدل التغير بالنسبة للزمن يكون

في حالة التزايد	في حالة التناقص
+	-

ملحوظة (2): في بعض المسائل قد نلجأ لاستنتاج معلومات عددية يُستفاد منها في خطوة التعويض.

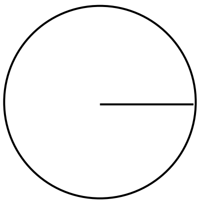
ملحوظة (3): في بعض المسائل قد نلجأ لاستنتاج علاقة بين متغيرين ، ثم إيجاد أحدهما بدلالة الآخر لحذفه من المعادلة قبل الاشتقاق.
(سبب حذف هذا المتغير من المعادلة هو أنه ليس معلوم وليس مطلوب)

(8 - 4) المعدلات المرتبطة

تمارين ص 303:

6. على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5 أقدام في الدقيقة. عندما يصل نصف القطر إلى 200 قدم، فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

$r'(t) = 5\ ft\ /\ min$

$r = 200\ ft$

المطلوب:

$A'(t) = ??$

$A = \pi r^2$

$A'(t) = 2\pi r r'(t)$

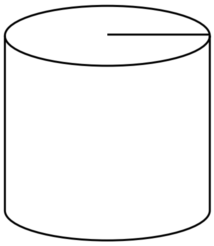
$A'(t) = 2\pi (5)(200) = 2000\,\pi\, ft^2/\ min$

(8 - 4) المعدلات المرتبطة

تمارين ص 303:

1) يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل $16\ \text{ft}^3/\text{min}$. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{48}\ ft$ حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى $100\ \text{ft}$

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

$V`(t) = 16\ ft^3/\ min$

$r = 100\ ft$ .... $h = \frac{1}{48}\ ft$

المطلوب:

$r`(t) = ??$

$V = \pi r^2 h$

$V`(t) = 2\left(\frac{1}{48}\right)\pi r r`(t)$

$16 = \left(\frac{1}{24}\right)(100)\pi r`(t)$

$16 = \left(\frac{25}{6}\right)\pi r`(t)$

$r`(t) = \frac{16 \times 6}{25\pi} = \frac{96}{25\pi}\ ft\ /\ min$

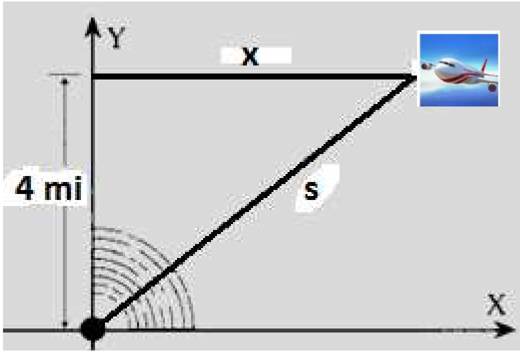
(8 - 4) المعدلات المرتبطة

تمارين ص 303:

9) تقع طائرة على بعد *x = 40* ميل (أفقيًا) عن المطار وارتفاع ثابت 4 ميل . يوجد رادار في المطار يكشف المسافة بين الطائرة والمطار (S) وتتغير هذه المسافة بمعدل 240 mph-

إذا حلقت الطائرة أفقيًا نحو المطار فما هي سرعة الطائرة في الاتجاه الأفقي.

<u>الصورة والمتغيرات والثوابت:</u>



<u>المعلومات العددية:</u>

$S`(t) = -240\ m/h$

$x(t) = 40$

<u>المطلوب:</u>

$x`(t) = ??$

<u>استنتاج معلومة عددية:</u>

$S = \sqrt{4^2 + 40^2} = 4\sqrt{101}\ m$

$$S = \sqrt{4^2 + 40^2} = 4\sqrt{101}\ m$$

$$[S(t)]^2 = [x(t)]^2 + 4^2$$

$$2\,S(t)\,S`(t) = 2\,x(t)\,x`(t)$$

$$x`(t) = \frac{S(t)\,S`(t)}{x(t)}$$

$$x`(t) = \frac{4\sqrt{101} \times (-240)}{40}$$

$$x`(t) = -24\sqrt{101}$$

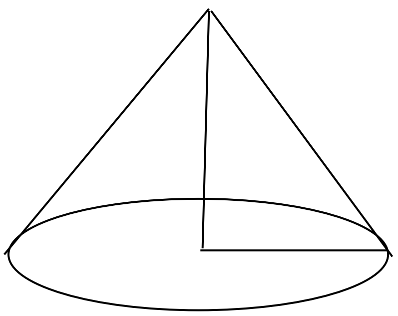
السرعة $\approx 241.2\ m/h$

المعدلات المرتبطة (8 - 4)

تمارين ص 304:

26. افرغ الرمل وشكّل كومة مخروطية بارتفاع يساوي ضعف نصف قطره. إذا افرغ الرمل بمعدل ثابت $20\ ft^3/s$ فأوجد المعدل الذي يتزايد به نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 أقدام.

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

$V`(t) = 20\ ft^3/sec$

$h = 6\ ft$

المطلوب:

$r`(t) = ??$

استنتاج علاقة بين متغيرين:

$r = \frac{h}{2}$

استنتاج معلومة عددية:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{12}\pi h^3$$

$$V`(t) = \frac{\pi}{4}\ h^2 h`(t)$$

$$h`(t) = \left(\frac{20 \times 4}{36}\right)\pi = \frac{20\,\pi}{9} ft/sec$$

$$r`(t) = \frac{h`(t)}{2}$$

$$r`(t) = \frac{1}{2} \times \frac{20\,\pi}{9} = \frac{10\,\pi}{9} ft/sec$$

(8 - 4) المعدلات المرتبطة

تمارين ص 303:

7) يرتكز سلم طوله 10 ft على أرض أفقية وجدار رأسي، فإذا سحب الجزء السفلي من السلم بعيدا عن الجدار بمعدل 3 ft/s فأوجد:

a) المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون أسفل السلم بعيدًا عن الجدار 6 قدم.

$y = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ ft$

$x^2 + y^2 = 10^2$ نشتق بالنسبة للزمن

$2x\, x`(t) + 2y\, y`(t) = 0$

$y`(t) = \frac{-x\, x`(t)}{y} = \frac{-6 \times 3}{8} = -2.25\ ft / sec$

b) معدل تغير الزاوية بين السلم والأفقي عندما يكون أسفل السلم بعيدًا عن الجدار 6 قدم.

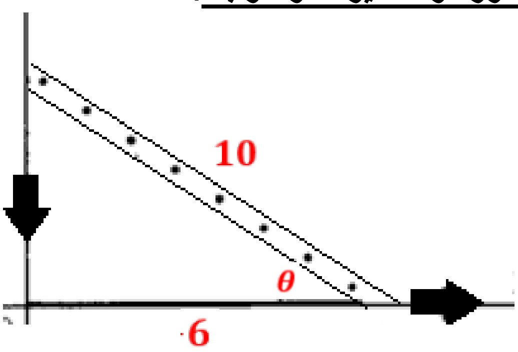
$\cos\theta = \frac{x\,(t)}{10}$ نشتق بالنسبة للزمن

$-\sin\ \theta\,(t)\, \theta`(t) = \frac{x`(t)}{10}$

$-\frac{8}{10}\, \theta`(t) = \frac{3}{10}$

$\theta`(t) = \left(\frac{3}{10}\right)\left(-\frac{10}{8}\right) = -\frac{3}{8}\ rad/sec$

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

$x = 6\ ft$

$x`(t) = 3\ ft/sec$

المطلوب:

$y`(t) = ??$

استنتاج معلومة عددية:

$y = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ ft$

(8 - 4) المعدلات المرتبطة

تمارين ص 304:

.19 على فرض أن شخصًا ما يبلغ طوله 6 اقدام يبعد 12 ft من عمود إنارة ارتفاعه 18 قدمًا (انظر الشكل). إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل 2 ft/s . فما هو المعدل الذي يتغير به طول ظل الشخص؟

من المثلث الصغير $\tan\theta = \dfrac{6}{s}$

من المثلث الكبير $\tan\theta = \dfrac{18}{s+x}$

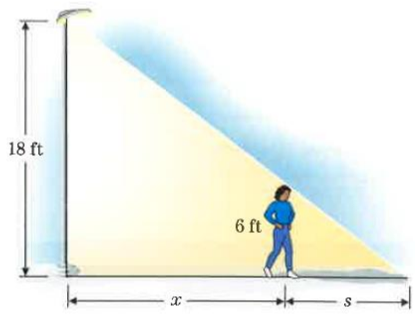
نشتق بالنسبة للمتغير x $\quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{s+x}{18}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{s}{6}\right)$

$\dfrac{s`+x`}{18} = \dfrac{s`}{6} \rightarrow \dfrac{s`+x`}{3} = s`$

$s`+x` = 3s` \rightarrow x` = 2s`$

$s` = \dfrac{x`}{2} \rightarrow s` = \dfrac{2}{2} = 1\ ft/sec$

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

المطلوب:

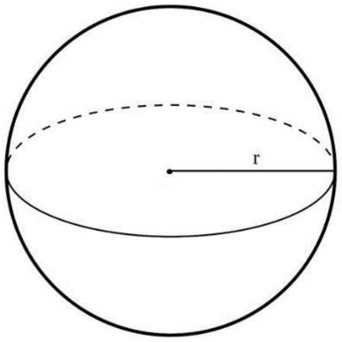
استنتاج معلومة عددية:

(8 - 4) المعدلات المرتبطة

تمارين ص 304:

24. على فرض أنك تملأ بالونًا بالهواء بمعدل $1\ \text{ft}^3/\text{s}$ إذا بقي البالون في شكل كروي، فيرتبط حجمه ونصف قطره بـ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ قارن معدل تغير نصف قطره عندما يكون $r = 0.01$ ft في مقابل عندما يكون $r = 0.1$ ft. ناقش طريقة ارتباط ذلك بخبرة الشخص الذي يملأ البالون.

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

$V`(t) = 1\ ft^3/sec$

$r = 0.01\ ft$

المطلوب:

$r`(t) = ??$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V`(t) = 4\pi r^2\, r`(t)$$

$$r`(t) = \frac{V`(t)}{4\pi r^2}$$

عندما $r = 0.01$ $\quad r`(t) = \frac{1}{4\pi(0.01)^2} = \frac{2500}{\pi}\ ft$

عندما $r = 0.1$ $\quad r`(t) = \frac{1}{4\pi(0.1)^2} = \frac{25}{\pi}\ ft$

فى البداية نصف القطر يتمدد بسرعة أكبر , لاحقا يتمدد بسرعة أقل

(8 - 4) المعادلات المرتبطة

تمارين ص 304:

.21 يرتفع حوض مائي 6 أقدام عن منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلًا متصلًا بمركب بمعدل ثابت 2 ft/s وان المركب لا يزال على مستوى المياه.

$s^2 = x^2 + 6^2$ .... $s = \sqrt{20^2 + 6^2} = 2\sqrt{109}\ ft$

a) فما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد 20 قدمًا من الحوض؟

نشتق بالنسبة للزمن................ $2\,s\,s`(t) = 2\,x\,x`(t)$

$x`(t) = \dfrac{s\,s`(t)}{x} = \dfrac{2\sqrt{109}\times 2}{20} = \dfrac{\sqrt{109}}{5}\ ft/sec$

$-2.08\ ft/sec$

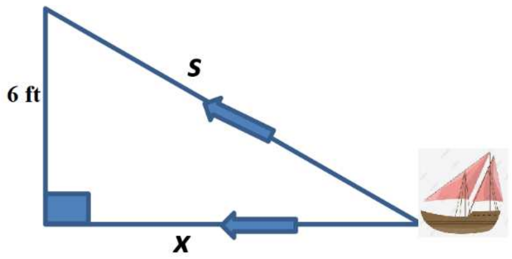
b) ما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد 10 أقدام من الحوض؟

$s^2 = x^2 + 6^2$ .... $s = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}\ ft$

$x`(t) = \dfrac{s\,s`(t)}{x} = \dfrac{2\sqrt{34}\times 2}{10} = \dfrac{2\sqrt{34}}{5}\ ft/sec$

$-2.33\ ft/sec$

الصورة والمتغيرات والثوابت:



المعلومات العددية:

$s`(t) = 2\ ft/sec$

ارتفاع الحوض يساوى $6\ ft$

المطلوب:

$x`(t) = ??$

استنتاج معلومة عددية:

$s^2 = x^2 + 6^2$