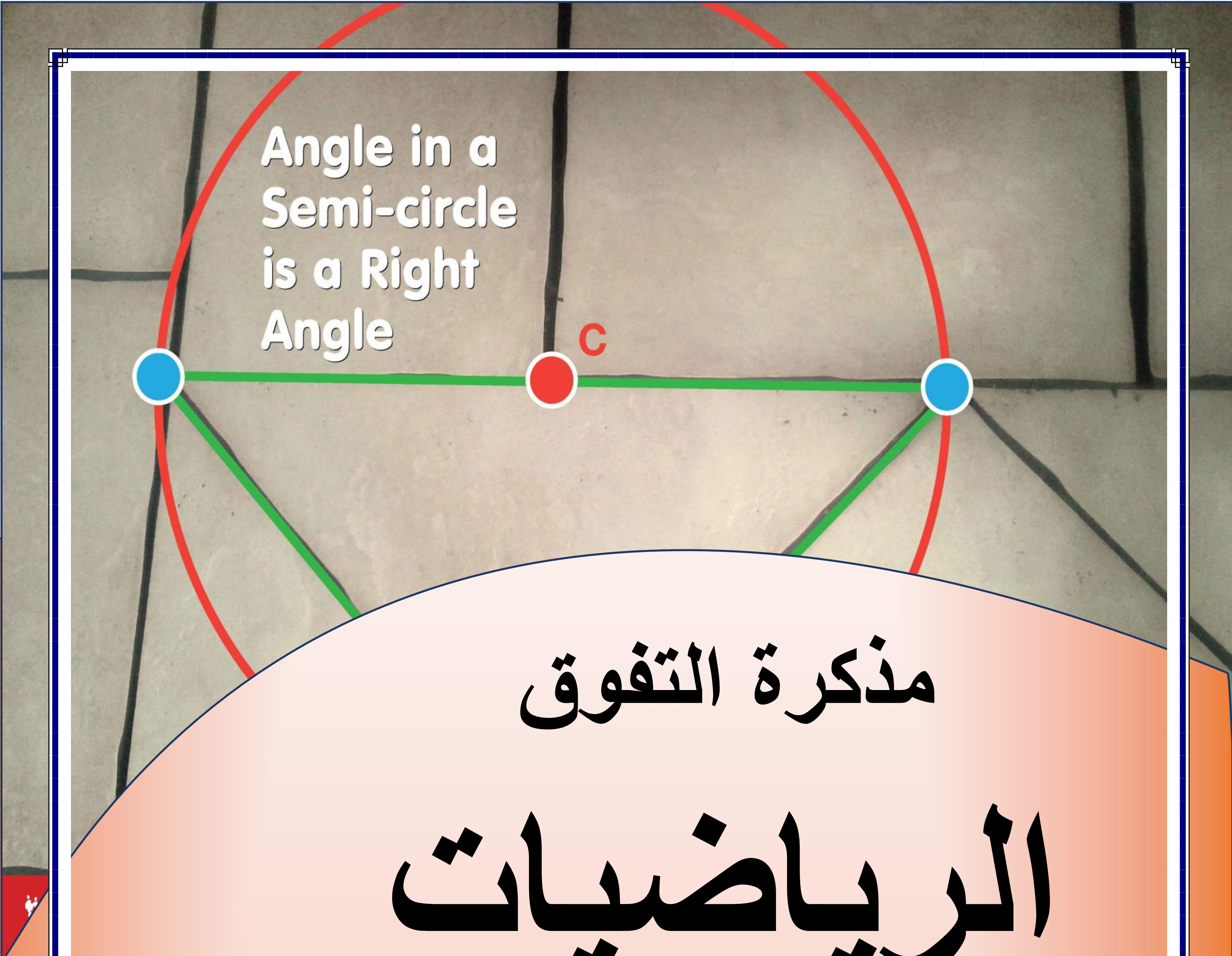
إجابات الوحدة الخامسة التكامل



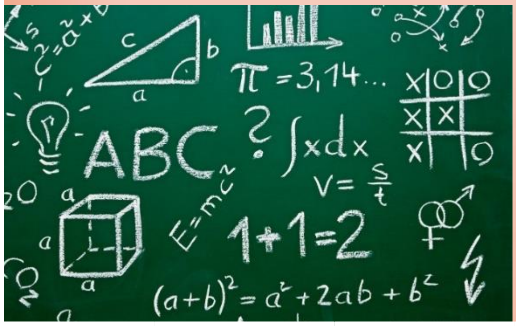
مذكرة التفوق

الرياضيات

للصف 12 متقدم

د. حيدر السعافين

050-5712489



الوحدة الخامسة
التكامل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد:

د: حيدر عامر السعافين

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x)=2x$.

نقول ان الدالة $f(x)=x^2+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x)=2x$

ونرمز للدالة الاصلية بالرمز $\int$ ويقرء التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x

وتعبر عما سبق بالرموز

$$\int 2x\,dx = x^2+c$$

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x)=3x^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(x)=x^3+c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(x)=3x^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(x)=3x^2$ هي الدالة $F(x)=x^3+c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3x^2\,dx = x^3+c$$

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(\theta)=\cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

الدالة الاصلية للدالة $f(\theta)=\cos\theta$ هي الدالة $F(\theta)=\sin\theta+c$ حيث c عدد ثابت يسمى ثابت التكامل

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + c$$

(1) إذا كانت $\mathbf{F(x) = \ln(\boldsymbol{secx + tanx})}$

(أ) أوجد $F^{/}(x)$

$$F^{/}(x) = \frac{secx\ tanx + sec^2x}{secx + tanx}$$

$$F^{/}(x) = \frac{secx\ (tanx + secx)}{secx + tanx} = secx$$

(ب) ما هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) = secx$

$$\mathbf{F(x) = \ln(\boldsymbol{secx + tanx}) + \boldsymbol{c}}$$

(2) أن بين الدالة $\boldsymbol{F(t) = 2xln(ex) - 3x}$ هي الدالة الأصلية للدالة $\boldsymbol{f(x) = 1 + lnx^2}$

$$F^{/}(x) = \boldsymbol{2ln(ex) + 2x.\frac{e}{ex} - 3}$$

$$F^{/}(x) = \boldsymbol{2ln(ex) + 2 - 3 = 2ln(ex) - 1}$$

$$F^{/}(x) = \boldsymbol{2[lne + lnx] - 1}$$

$$F^{/}(x) = \boldsymbol{2[1 + lnx] - 1 = 2lnx - 1}$$

$$F^{/}(x) = \boldsymbol{1 + lnx^2 = f(x)}$$

(3) بين أن $\boldsymbol{\int xe^x dx = xe^x - e^x + c}$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(xe^x - e^x + c) = 1e^x + xe^x - e^x}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(xe^x - e^x + c) = xe^x}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\int xe^x dx = xe^x - e^x + c}$$

التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هي التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \quad \text{و} \quad \int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x) + c$$

(1 اذا كان $\frac{d}{dx}g(x) = x\sin x$ ، اوجد $\int x\sin x\,dx$

نظرية

اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $G(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان

$G(x) = F(x) + c$ حيث c عدد ثابت

(2 بين ان الدالتان $F(x) = x^2(x^2+4)$ ، $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دالتان كل منهما الدالة الأصلية لنفس الدالة

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2 - x^2(x^2+4)$$

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{4}(4x^2 + 16x^2 + 16) - x^2 - 4x^2$$

$G(x) - F(x) = x^2 + 4x^2 + 4 - 5x^2 = 4$ (الفرق بينهم ثابت)

قواعد التكامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

قبل البدء بالتكامل ... اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع اوطرح حدود وكل حد قابل للتكامل

(2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

(1) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$ $\qquad * \int (a\,x+b)^n\,dx = \dfrac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad * \int \sin kx\,dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + c$

(3) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(4) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(5) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

(6) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

(7) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$ $\qquad * \int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$

(8) $\int e^x\,dx = e^x + c$ $\qquad * \int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

(9) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ $\qquad * \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

(10) $\int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + c$ $\qquad * \int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

(11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$

(12) $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$

خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

أوجد التكاملات الاتية :

$$(1)\int\left(3x^2-\sqrt{x}+2\right)dx=\int\left(3x^2-x^{\frac{1}{2}}+2\right)dx$$

$$\boxed{=x^3-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+c}$$

$$(2)\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^{\frac{-1}{2}}-5x^{-4}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\boxed{=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{5x^{-3}}{-3}+ln|x|+c==2\sqrt{x}+\frac{5}{3x^3}+ln|x|+c=}$$

$$(3)\int t^2\left(t^3-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\left(t^5-1\right)dt$$

$$\boxed{=\frac{t^6}{6}-t+c}$$

$$(4)\int\frac{x^4-3x+1}{x^2}dx=\int\left(x^2-\frac{3}{x}+x^{-2}\right)dx$$

$$\boxed{=\frac{x^3}{3}-3ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{3}x^3-3ln|x|-\frac{1}{x}+c}$$

$$(5)\int\frac{x^2-3x-4}{x-4}dx=\int\frac{(x-4)(x+1)}{x-4}dx$$

$$\boxed{=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+c}$$

$$(6)\int\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx=\int\left(\sqrt{x}+2\right)=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)dx$$

$$\boxed{=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+c}$$

$$\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=\left(\sqrt{x}+2\right)$$

0505712489

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - 4\cos x) \quad dx$

$$= -3cosx - 4sinx + c$$

(2) $\int (\sin 2x + \cos 3x) \quad dx$

$$= \frac{-cos2x}{2} + \frac{sin3x}{3} + c$$

(3) $\int \sec x(\tan x - \sec x) \quad dx$

$$\int (secx\ tanx - sec^2x)dx = secx - tanx + c$$

(4) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) \quad dx$

$$= \frac{sec2x}{2} - \frac{cot5x}{5} + c$$

(5) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} \quad dx$

$$= \int \frac{1}{cosx.cotx} dx = \int secx\ tanx\ dx = secx + c$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x) \quad dx$

$$= \int (cscx\ secx\ tanx - cscxcotx)\, dx$$

$$\boxed{\int (sec^2x - cscxcotx)\, dx = tanx + cscx + c}$$

(2) $\int (\frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}) \quad dx$

$$\int (2tanxsecx + cotx\ cscx)\, dx$$

$$= 2secx - cscx + c$$

توضيح

$$\frac{2sinx}{cos^2x} = \frac{2sinx}{cosx.cosx} = 2tanxsecx$$

$$\frac{cosx}{sin^2x} = \frac{cosx}{sinx.sinx} = cotx\ cscx$$

(3) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \quad dx \quad = \int \frac{1 - cos^2x}{1 - cosx} dx$

$$= \int \frac{(1 - cosx)(1 + cosx)}{1 - cosx} dx = \left(\int (1 + cosx) dx\right)$$

$$= x + sinx + c$$

(4) $\int \frac{1}{1+\sin x} \quad dx \qquad \int \frac{1(1 - sinx)}{(1 + sinx)(1 - sinx)} dx$

$$\int \frac{1 - sinx}{1 - sin^2x} dx = \int \frac{1 - sinx}{cos^2x} dx = \int \frac{1}{cos^2x} dx - \int \frac{sinx}{cos^2x} dx$$

$$\int sec^2xdx - \int \frac{sinx}{cosx}.\frac{1}{cosx} dx = tanx - \int tanx\ secx\ dx = tanx - secx + c$$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \tan^2 x \quad dx = \int (sec^2x - 1)dx = tanx - x + c$

(2) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx = \int cos2xdx = \frac{sin2x}{2} + c$

(3) $\int 2\sin x \cos x \quad dx = \int \sin 2x\, dx = \frac{-cos2x}{2} + c$

(4) $\int \sin^2 x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right) + c$

(5) $\int \cos^2 x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 + cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sin2x}{2}\right) + c$

(6) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} \quad dx$

$$= \int \frac{sin^2x + cos^2x + 2sinxcosx}{sinx + cosx}dx = \int \frac{sin^2x + 2sinxcosx + cos^2x}{sinx + cosx}dx =$$

$$= \int \frac{(sinx + cosx)^2}{sinx + cosx}dx = \int (sinx + cosx)dx = -cosx + sinx + c$$

(7) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \quad dx$

$$\boxed{= \int \frac{1}{2cos^2x}dx = \int \frac{1}{2}sec^2xdx = \frac{1}{2}tanx + c}$$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) \quad dx$

$$= e^x + ln|x| - \frac{sin2x}{2} = x + c$$

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) \quad dx$

$$\int \left(2x + x^{\frac{3}{2}} + e^{2x} - sin3x\right) dx = x^2 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{cos3x}{3} + c$$

(3) $\int (\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) \quad dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + e^{-x} - x\right) dx = ln|x| - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + c$$

(4) $\int \frac{e^x + 3}{e^x} \quad dx$

$$\boxed{= \int (1 + 3e^{-x})\, dx = x - \frac{e^{-x}}{3} + c = x - \frac{1}{3e^x} + c}$$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = ln|e^x+1| + c$

(2) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = ln|tanx| + c$

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+1| + c$

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\,dx = \frac{-7}{2}\int \frac{2}{x+1}dx = \frac{-7}{2}ln|2x+1| + c$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = ln|x^2+x| + c$

(6) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = ln|e^x+e^{-x}| + c$

(7) $\int (\cot x + \tan x)\,dx = \int \left(\frac{cosx}{sinx} + \frac{sinx}{cosx}\right)dx = \int \left(\frac{cosx}{sinx} - \frac{-sinx}{cosx}\right)dx =$

$= ln|sinx| - ln|cosx| = ln\left|\frac{sinx}{cosx}\right| = \ln tanx + c$

(8) $\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$

(9) $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = e^{sinx} + c$

(10) $\int x\, e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x(2e^x-3)\ dx \ = \int (2e^{2x}-3e^x)dx = e^{2x}-3e^x+c$

(2) $\int (e^x-e^{-x})^2\ dx \ = \int (e^{2x}-2+e^{-2x})dx = \frac{e^{2x}}{2}-2x+\frac{e^{-2x}}{-2}+c$

(3) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\ dx \ = \int \frac{e^{tanx}}{cos^2x}dx = \int sec^2x\, e^{tanx}dx = e^{tanx}+c$

(4) $\int e^{x^2+\ln x}\ dx \ = \int e^{x^2}.e^{lnx}dx = \int e^{x^2}.x\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$

(5) $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\ dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}dx = \int \frac{e^x}{(1+e^x)}dx = ln|e^x+1|+c$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx \qquad = 3\tan^{-1}x + c$

(2) $\int \frac{x}{x^3+x}\,dx \qquad = \int \frac{x}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{1(x^2+1)}dx = \tan^{-1}x + c$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx \qquad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \int \frac{1}{1(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$

(4) $\int \frac{5}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad = \sec^{-1}x + c$

(5) $\int \frac{-1}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx \qquad = \int \frac{-1}{|x|\sqrt{(x^2-1)}}dx = -\sec^{-1}x = \csc^{-1}x + c$

توضيح : $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4$

$= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 4 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(6) $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}\,dx$

$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$

(7) $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \tan^{-1}x + c$

أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x) = 12x^2 + 4e^{2x}$ $\quad f(0) = 3 \;,\; f'(0) = 2$

$$f' = \int (12x^2 + 4e^{2x})\,dx = 4x^3 + \frac{4e^{2x}}{2} + c_1$$
$$f'(0) = 2 \rightarrow 2 = 0 + 2 + c_1 \rightarrow c_1 = 0$$
$$f' = 4x^3 + 2e^{2x}$$
$$f(x) = \int (4x^3 + 2e^{2x})\,dx = x^4 + e^{2x} + c_2$$

$$f(0) = 3 \rightarrow 3 = 1 + c_2$$
$$c_2 = 2$$
$$f(x) = x^4 + e^{2x} + 2$$

(2) $f''(t) = 2t + 2 \;,\; f'(0) = 2 \,,\, f(3) = 2$

$$f' = \int (2t + 2)\,dt = t^2 + 2t + c_1$$
$$f'(0) = 2 \rightarrow 2 = 0 + 0 + c_1 \rightarrow c_1 = 2$$
$$f' = t^2 + 2t + 2$$
$$f(t) = \int (t^2 + 2t + 2)dt = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + c_2$$
$$f(3) = 2 \rightarrow 2 = \frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2 + c_2$$

$$c_2 = 2 - 9 - 9 = -16$$
$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 16$$

(3) $f'''(x) = \frac{6}{x^3}$ $\quad f(1) = 1 \;,\; f'(1) = 3 \quad f''(1) = 2$

$$f''(x) = \int \frac{6}{x^3}dx = \int 6x^{-3}dx = -3x^{-2} + c_1$$
$$f''(1) = 2 \rightarrow 2 = -3 + c_1 \rightarrow c_1 = 5$$
$$f''(1) = -3x^{-2} + 5$$
$$f' = \int (-3x^{-2} + 5)\,dx = 3x^{-1} + 5x + c_2$$
$$f'(1) = 3 \rightarrow 3 = 3 + 5 + c_2 \rightarrow c_2 = -5$$
$$f'(x) = \frac{3}{x} + 5x - 5$$
$$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} + 5x - 5\right)dx = 3ln|x| + \frac{5x^2}{2} - 5x + c_3$$

$$f(3) = 2 \rightarrow 2 = 3ln3 + 22.5 - 15 + c_3$$
$$-3ln3 - 5.5 = c_3$$
$$f(x) = 3ln|x| + \frac{5x^2}{2} - 5x - ln27 - 5.5$$

التطبيقات

الدالة المكانية	⟸	دالة السرعة المتجهة	⟸	دالة التسارع
		بالاشتقاق		
الدالة المكانية	⟹	دالة السرعة المتجهة	⟹	دالة التسارع
		بالتكامل		

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t) = 10t + 5$ حيث $s(0) = 10$

$$S(t) = \int V(t)dt = \int (10t+5)dt$$
$$S(t) = 5t^2 + 5t + c$$

$$S(0) = 10$$
$$c = 10$$
$$S(t) = 5t^2 + 5t + 10$$

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t) = 3e^{-t} - 2$ حيث $s(0) = 0$

$$S(t) = \int V(t)dt = \int (3e^{-t} - 2)dt$$
$$S(t) = -3e^{-t} - 2t + c$$

$$S(0) = 0 \to 0 = -3 - 0 + c$$
$$c = 3$$
$$S(t) = -3e^{-t} - 2t + 3$$

(3) اوجد $s(5)$ لدالة التسارع $a(t) = 12t^2 + 4$ حيث $s(0) = 1, v(0) = 4$

$$V(t) = \int a(t)dt = \int (12t^2 + 4)dt$$
$$V(t) = 4t^3 + 4t + c_1$$
$$V(0) = 4 \to 4 = c_1$$
$$V(t) = 4t^3 + 4t + 4$$

$$S(t) = \int V(t)dt = \int (4t^3 + 4t + 4)\,dt$$
$$s(t) = t^4 + 2t^2 + 4t + c_2$$
$$S(0) = 1 \ \to 1 = c_2$$

$$s(t) = t^4 + 2t^2 + 4t + 1$$
$$s(5) = 696\ m$$

(1) سقط جسم من ارتفاع برج خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\ m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$ ، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

S(0) = 828 ,V(0) =-30

$$V(t)=\int a(t)dt=\int -9.8\,dt$$

$$V(t)=-9.8\,t+c_1$$

$$V(0)=-30\rightarrow c_1=-30$$

$$V(t)=-9.8\,t-30$$

$$S(t)=\int(-9.8t-30)\,dt=-4.9t^2-30t+c_2$$

$$S(0)=828\ \rightarrow 828=c_2$$

$$S(t)=-4.9t^2-30t+828$$

$$S(10)=38\,m$$

(2) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

V(0) = 20 ,V(1) =60 ,S(0)=0

$$V \rightarrow S'(t),\ \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad , \qquad a(t) \rightarrow V'(t),\ \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$a(t)=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{60-20}{4-0}=10$$

$$V(t)=\int 10dt=10t+c_1$$

$$V(0)=20\rightarrow c_1=20$$

$$S(t)=\int(10t+20)\,dt=5t^2+20t+c_2$$

$$S(0)=0\ \rightarrow 0=c_2$$

$$S(t)=5t^2+20t\rightarrow S(5)=225$$

(3) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t)=-s(t)$ حيث $s(0)=e$ فاوجد دالة الوضع $s(t)$

$$V(t)=-S'(t)$$

$$S'(t)=-S(t)$$

بالقسمة على $S(t)$ $\quad \frac{S'(t)}{s(t)}=-1$

$$\int\frac{S'(t)}{s(t)}dt=\int -1dt=$$

$$ln|s(t)|=-t+c$$

$$s(t)=e^{-t+c}$$

$$s(0)=e$$

$$e^c=e\rightarrow c=1$$

$$s(t)=e^{-t+1}$$

0505712489 د:حيدر عامر السعافين

1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m = 2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

$$f'(x) = m = 2x \quad , f(2) = 5$$

$$f(x) = \int 2x dx = x^2 + c$$

$$5 = 4 + c \rightarrow c = 1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 6x \quad , f(0) = 1 \, , f'(0) = 0$$

$$f'(x) = \int 6x dx = 3x^2 + c_1$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + c_1 \rightarrow c_1 = 0$$

$$f'(x) = 3\,x^2$$

$$f(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c_2$$

$$f(0) = 1 \rightarrow 1 = 0 + c_2 \rightarrow c_2 = 1$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

3) يكلف طباعة كتاب واحد 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية بالعلاقة $c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$

لطباعة x نسخة من نفس النوع ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب.

$$c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}} \, , c(0) = 1600$$

$$c(x) = \int \frac{200}{\sqrt{x}} dx = \int 200\, x^{-\frac{1}{2}} dx = 400x^{\frac{1}{2}} + c_1$$

$$c(0) = 1600 \rightarrow 1600 = 400 + c_1 \rightarrow c_1 = 1200$$

$$c(x) = 400x^{\frac{1}{2}} + c_1 \rightarrow c(400) = 9200$$

اذا كان معدل تغير الماء في خزان ماء هو $f'(t) = 4t - t^2$ لتر في الدقيقة وكمية الماء بالخزان تساوي 288 لتر عند الزمن صفر

أ) اكتب المعادلة التي تمذج كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

$$V'(t) = 4t - t^2 \quad , V(0) = 288$$

(ب) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق

$$V(t) = \int (4t - t^2)dt = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + c_1$$

$$V(0) = 288 \ \rightarrow c = 288$$

$$V(t) = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 288$$

(ج) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

$$V(9) = 2(9)^2 - \frac{1}{3}(9)^3 + 288 = 207 \text{ لتر}$$

(د) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

$$V(t) = 0 \rightarrow 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 288 = 0$$

$$t^3 - 6t^2 + 864 = 0 \ \rightarrow t = 12$$

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

1) اكتب كل مما يلي بدون استخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(a) $\sum_{i=1}^{7} 2i+1$ [2(1)+1]+ [2(2)+1]+…..=3+5+7+9+11+13

(b) $\sum_{i=1}^{10} i^2-3i$

(c) $\sum_{i=2}^{100} (-1)^i \frac{1}{i}$

(d) $\sum_{i=1}^{20} \sin(\frac{\pi}{2} i)$

(e) $\sum_{i=0}^{6} \frac{i!}{e^i}$

2) اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(a) $3+6+9+12+15+\ldots+99$

(b) $2(1)^2+2(2)^2+2(3)^2+2(4)^2+2(5)^2+\ldots+2(14)^2$

(c) $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+\ldots+20\times21$

(d) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\ldots+\sqrt{100-1}$

(e) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{400}$

خواص وقوانين المجموع (سيجما)

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(5) $\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad r \neq 1$ ، $\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r}$ ، $|r|<1$

(6) $\sum_{i=1}^{n} (ca_i \pm db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

اوجد ناتج كل مايلي

(1) $\sum_{i=1}^{25} 3 = 3 \times 25 = 75$

$\sum$

(2) $\sum_{i=1}^{15} 2i-3 = \sum_{i=1}^{15} 2i - \sum_{i=1}^{15} 3 = 2\sum_{i=1}^{15} i - 3 \times 15 = \frac{2(15)(16)}{2} - 45 = 195$

(3) $\sum_{i=1}^{20} i(i-3) = \sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{20} 3i - = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 3\sum_{i=1}^{20} i = \frac{(20)(21)(41)}{6} - \frac{3(20)(21)}{2} = 2240$

1) اوجد ناتج كل مايلي

(a) $$\sum_{i=0}^{100} 5i+2 = \sum_{i=1}^{100} 5i + \sum_{i=1}^{100} 2 = 5\sum_{i=1}^{15} i + (100)\times 2 = \frac{5(100)(101)}{2} + 200 = 25450$$

(b) $$\sum_{k=5}^{20} 2k-3 = \sum_{k=1}^{20}(2k-3) - \sum_{k=1}^{4}(2k-3) = 2\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 3 - 2\sum_{i=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 3$$

$$= \frac{2(20)(21)}{2} - 3(20) - \frac{2(4)(5)}{2} - 3(4) = 352$$

2) احسب مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+5$ عند

$x=0.4\,,0.8\,,1.2\,,1.6\,,2.0,2.4,2.8,3.2,3.6,4$

المطلوب : $$f(0.4)+f(0.8)+\cdots\ldots f(4) = \sum_{i=1}^{10} f(0.4)i$$

$$\sum_{i=1}^{10} 3(0.4i)+5) = \sum_{i=1}^{10}(1.2\,i+5) = 1.2\sum_{i=1}^{10}(i+5) = \frac{1.2(10)(11)}{2} + 5(10) = 116$$

3) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ لقيم x المعطاة

$f(x)=x^2+4x \qquad x=2,4,6,8,10,\ldots,100$

$$\sum_{i=1}^{50} f(x_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{50} f(2i).2$$

$$= 2\sum_{i=1}^{50}\left((2i)^2+4(2i)\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{50}[4i^2+8i]$$

$$= 8\sum_{i=1}^{50} i^2 + 16\sum_{i=1}^{50} i$$

$$= 8\frac{(50)(51)(101)}{6} + 16\frac{(50)(51)}{2}$$

$$= 363800$$

0505712489 د:حيدر عامر السعافين

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}$$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[(\frac{i}{n})^2 + 2(\frac{i}{n}) \right]$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{(n+1)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{(n+1)}{n} = \frac{2}{6} + 1 = \frac{4}{3}$$

(3) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i - 1$

$$\frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 1 = 2[1-0] - 1 = 1$$

مجموع ريمان لحساب المساحة

التجزئة المنتظمة

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ اذا تحققت الشروط التالية

1) $x_0 = a$ و $x_n = b$

2) $x_i < x_{i+1}$ لكل قيم i

3) $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ قيمة ثابتة لكل قيم i

ملاحظات مهمة

1) طول الفترة الكلية للتجزئة هي $b-a$

2) عدد الفترات الجزئية هي n

3) عدد عناصر التجزئة للفترة هي $n+1$

4) طول الفترة الجزئية للتجزئة المنتظمة هي $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

5) العنصر x_i في التجزئة هو العنصر الذي ترتيبه $i+1$ (مثلا x_6 هو العنصر السابع)

6) الفترة الجزئية التي ترتيبها i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ (مثلا $[x_5, x_6]$ هو الفترة الجزئية السادسة)

7) نقاط القيم هي $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ حيث c_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

8) يمكن يجاد اي عنصر في التجزئة بالعلاقة $x_i = a + \Delta x_i(i) = a + \dfrac{b-a}{n} i$ لكل قيم i

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هى نقاط القيم

1) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0,2]$

$n = 10$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} == \frac{2-0}{10} = 0.2 \quad \rightarrow \qquad P\{0 \ ,0.2 \ ,0.4, \dots \dots \dots ,2\}$$

2) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1,13]$

$n = 24$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{13-1}{24} = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad P\{1 \ ,1.5 \ ,2, \dots \dots \dots ,13\}$$

3) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية n للفترة $[0,3]$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \qquad P\left\{0 \ ,\frac{3}{n} \ ,\frac{6}{n},\frac{9}{n}, \dots \dots ,3\right\}$$

4) اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$

$n = 30 \ , i = 6$

$$\Delta x_i = a + \frac{b-a}{n} i = 2 + \frac{5-2}{30}(6) = 2.6$$

5) اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 40 للفترة $[1,3]$

$n = 40$

$$\Delta x_9 = 1 + \frac{3-1}{40}(9) = 1.45$$

$\Delta x_{10} = 1 + \frac{3-1}{40}(10) = 1.5 \quad n = \ [x_9, x_{10}] = [1.45 \ ,1.5]$ الفترة الجزئية العاشرة هي

تقريب المساحات

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

طريقه التقريب باستخدام المستطيلات

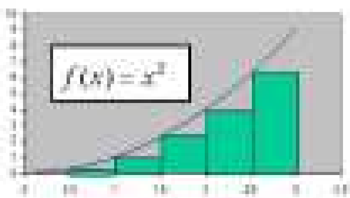
هناك ثلاث طرق شائعة لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام طريقة تقريب المستطيلات :

(1) التقريب اليساري L (قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى) $\boxed{c_i = x_{i-1}}$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى

و تسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليسرى كما في الشكل

اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = x^2$ على الفترة $[0,3]$ باستخدام التقريب من جهة اليسار



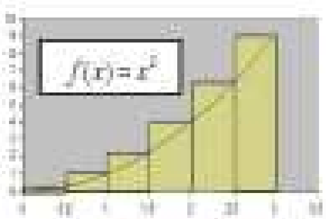
التجزئة هي :

(2) التقريب اليميني R (قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى) $\boxed{c_i = x_i}$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى

وتسمى طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليمنى. كما في الشكل

اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x) = x^2$ على الفترة $[0,3]$ باستخدام التقريب من جهة اليمين



التجزئة هي :

(3) التقريب المنتصفي M (قواعد القيم هي نقطة المنتصف) $\boxed{c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = a + \frac{b-a}{n}(i - \frac{1}{2})}$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف

و تسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات باستخدام نقطة المنتصف كما في الشكل

اوجد المساحة تحت المنحنى على الفترة $[0,3]$ باستخدام التقريب من المنتصف

التجزئة هي :

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولا اكتب التجزئة

$$n=4\ ,\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{4}=0.5 \qquad \rightarrow \qquad P\{\ 0,0.5\ ,1.5,2\}$$

$$A_L=\frac{b-a}{n}[f(0)+f(0.5)+f(1)+f(1.5)]$$

$$A_L=\frac{1}{2}[\ 0+0.75+1+0.75]=1.25$$

2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$$A_R=\frac{b-a}{n}[f(0.5)+f(1)+f(1.5)+f(2)]$$

$$A_R=\frac{1}{2}[\ 0.75+1+0.75+0]=1.25$$

3) قواعد القيم هي نقطة النهاية المنتصف

$$A_M=\frac{b-a}{n}[f(0.25)+f(0.75)+f(1.25)+f(1.75)]$$

$$A_M=\frac{1}{2}[\ 0.4375+0.9375+0.9375+0.4375]=1.375$$

1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,0.8]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

$$\boxed{n = 8}$$

$$A_R = \frac{b-a}{n}[f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)]$$

$$A_R \quad = 0.1[\, 2 + 2.4 + 2.6 + 2.7 + 2.6 + 2.4 + 2 + 1.4 + 0.6] = 1.87$$

2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,1.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

$$A_L = \frac{b-a}{n}[f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + f(1.2) + f(1.4)]$$

$$A_L \quad = 0.1[\, 2 + 2.2 + 1.6 + 1.4 + 1.6 + 2 + 2.2 + 2.4 + 2] = 1.74$$

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$

(1) باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى $\boxed{c_i = x_i}$

ملاحظة: عندما يكون عدد المستطيلات قليل
نستخدم طريقة التجزئة
وغير ذلك نستخدم قانون مجموع ريمان

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$$

$$c_i = x_i = 0 + \frac{1}{4} i = \frac{1}{4} i$$

$$f(c_i) = f\left(\frac{1}{4} i\right) = \frac{1}{4} i = 2\left(\frac{1}{4} i\right) = \frac{1}{2} i$$

$$A_R = \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} i . \frac{1}{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{8} i = \frac{1}{8} . \frac{(16)(17)}{2} = 17$$

(2) باستخدام 24 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى $\boxed{c_i = x_{i-1}}$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{24} = \frac{1}{6}$$

$$c_i = x_{i-1} = 0 + \frac{1}{6}(i-1) = \frac{1}{6}(i-1)$$

$$f(c_i) = 2.\frac{1}{6}(i-1) = \frac{1}{3}(i-1)$$

$$A_L = \sum_{i=1}^{24} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{3}(i-1).\frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{18}(i-1)$$

$$= \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{24}(i-1) = \frac{1}{18}\left[\frac{(24)(25)}{2} - 24\right] = 15.33$$

(3) باستخدام 8 مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة المنتصف $\boxed{c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}}$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$$

$$c_i = x_{i-\frac{1}{2}} = 0 + \frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}(i-1)$$

$$f(c_i) = 2.\frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{2}\right) = i - \frac{1}{2}$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{8} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{8}\left(i-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{8}\frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\left(i-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(8)(9)}{2} - 4\right] = 14$$

$_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

تعريف المساحة

المساحة (بدقة) هي نهاية مجموع ريمان

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq 0$ فان المساحة A تحتى منحنى الدالة وفوق محور السينات تعطى بالصيغه

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

ملاحظة : عندما تكون n كبيرة فان $c_i = x_i$

اوجد المساحة تحت المستقيم $f(x) = 2x$ وفوق محور السينات على الفترة $[1,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$\Delta x_i = \frac{3}{n}$$

$$c_i = x_i$$

$$= a + \frac{b-a}{n} i$$

$$= 1 + \frac{3}{n} i$$

$$f(c_i) = f\left(1 + \frac{3}{n} i\right) = i - \frac{1}{2}$$

$$f(c_i) = 2\left(1 + \frac{3}{n} i\right) = 2 + \frac{6}{n} i$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{6}{n} i\right) . \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{18}(i-1)$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{6}{n} i\right) = \frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \frac{3}{n}\left[2n + \frac{6}{n} . \frac{n(n+1)}{2}\right] = 6 + \frac{9(n+1)}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left[6 + \frac{9(n+1)}{n}\right] = 6 + 9 = 15$$

(1) اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=3x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$\Delta x_i = \frac{4}{n}$$

$$c_i = x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$= 0 + \frac{4}{n} i = \frac{4}{n} i$$

$$f(c_i) = f\left(\frac{4}{n} i\right) = 3\left(\frac{4}{n} i\right)^2 = \frac{48}{n^2} i^2$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{48}{n^2} i^2 . \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{196}{n^3} i^2 = \frac{196}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{196}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}\right] = 64$$

(2) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\ \frac{2}{n}$ بدلالة A_1 او A_2

$$\sqrt{c_i} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \sqrt{2+\frac{2}{n} i}$$

$$c_i = 2 + \frac{2}{n} i = a + \Delta x_i . i$$

$$a = 2 , b = 4$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i}\Delta x_i = A_2$$

الوحدة الخامسة : التكـامل /// الدرس الرابع: التكامل المحدود

التكامل المحدود

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدود للدالة f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad c_i = x_i$$

بشرط وجود النهاية ، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

(1) عبر عن النهاية في كل مما يلي بصورة تكامل محدود

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

$$c_i = x_i \to x$$

$$dx = \Delta x_i$$

(a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\Delta x_i$, والتجزئة على الفترة $[1,3]$

$$\int_1^3 x^2dx$$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x_i$, والتجزئة على الفترة $[0,\pi]$

$$\int_0^\pi (sin^2x + x)dx$$

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$ $\qquad c_i = \frac{1}{n}i = 0 + \frac{b-a}{n}i$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} sin\frac{\pi}{n}i.\frac{1}{n} = \int_0^1 sin\pi x dx$ $\qquad \Delta x_i = \frac{1}{n}\ , f(c_i) = sin\frac{\pi}{n}i = sin\pi\frac{i}{n}$

(2) عبر عن التكامل في كل مما يلي بصورة نهاية مجموع ريمان

(a) $\int_0^1 (3x^2 - 1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(3c_i{}^2 - 1).\frac{1}{n}$

(b) $\int_0^1 (\frac{1}{x^2+1})\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3c_i{}^2+1}.\frac{1}{n}$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

(1) $\int_0^3 (4x+1)\,dx =$ $2x^2 + x]_0^3 = [2(3)^2 + 3] - 0 = 21$

(2) $\int_0^1 (3x^2)\,dx =$ $x^3]_0^1 = [(1)^3] - 0 = 1$

خواص التكـامل المحـدود

(1)خاصية الثابت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(2)خاصية الترتيب

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(3)خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(4)خاصية السيادة اذا كانت $f(x) \ge g(x)$ لكل x على الفترة $[a,b]$ فان

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

(5)خاصية الاضافة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

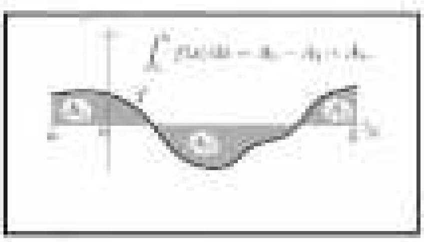
(6)خاصية التوزيع

$$\int_a^b (m\,f(x) + k\,g(x))dx = m\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$$

(7)خاصية الاحاطة اذا كانت القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $Max(f)$ والقيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $Min(f)$

فان $$(b-a)Min(f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)Max(f)$$

العلاقة بين المساحة والتكامل المحدود



قيمة التكامل المحدود تساوي المساحة لكن ممكن ان يكون التكامل سالب او موجب ، اما قيمة المساحة ذاتها تكون موجب فقط

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_1^3 (4x+1)\,dx =$

$$2x^2+x]_1^3 = [2(3)^2+3]-[2(1)^2+1] = 18$$

(2) $\int_2^5 3x(x+2)\,dx =$

$$\int_2^5 (3x^2+6x)dx = x^3+3x^2]_2^5 = [(5)^3+3(5)^2]-[(2)^3+3(2)^2] = 180$$

(3) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx =$

$$\frac{e^{2x}}{2}]_0^{ln2} = \frac{1}{2}[e^{2ln2}-e^0] = \frac{1}{2}[4-1] = \frac{3}{2}$$

(4) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$$tan^{-1}x]_0^1 = [tan^{-1}1 - tan^{-1}0] = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(5) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}[ln2 - ln1] = \frac{1}{2}[ln2-0] = \frac{1}{2}ln2 = ln\sqrt{2}$$

(6) 0

$$\left(\frac{x^6}{6} - \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}\right)]_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{5}{6} = 1$$

0505712489 د:حيدر عامر السعافين

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\, dx =$

$$tanx]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = tan\frac{\pi}{6} - tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinx}{cosx} dx = -\ln|cosx|]_0^1 = -\left[ln\left|cos\frac{\pi}{4}\right| - ln|cos0|\right] = -\left[ln\frac{\sqrt{2}}{2} - ln1\right]$$

(3) $\int_{0}^{1} xe^{x^2}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}\left[e^{(1)^2} - e^{(0)^2}\right] = \frac{1}{2}[e-1]$$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x\, dx =$

$$-\frac{cos2x}{2} - \frac{sin3x}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -cos\frac{\pi}{2} - sin\frac{1.5\pi}{3} - \left[\frac{-cos0}{2} - \frac{sino}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{sin\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{sin0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

z

1) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & x\geq 0\\ 2x-2 & x<0\end{cases}$ فاوجد $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$

$2x-2$ $3x^2-2$

0

$$\int_{-4}^{0}(2x-2)dx+\int_{0}^{4}(3x^2-2)dx=x^2-2x]_{-4}^{0}+x^3-2x]_0^4=-24+56=32$$

2) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}e^x+1 & x\geq 0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$ فاوجد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

$2x+1$ e^x+1

0

$$\int_{-1}^{0}(2x+1)dx+\int_{0}^{3}(e^x+1)dx=x^2+x]_{-1}^{0}+e^x+x]_0^3=e^3+2$$

3) اذا كانت $f(x)=3x|x-2|$ فاوجد $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

$3x(2-x)$ $3x(x-2)$

$=6x-3x^2$ $=3x^2-6x$

2

$$\int_{0}^{2}(6x-3x^2)dx+\int_{2}^{4}(3x^2-6x)dx=3x^2-x^3]_0^2+x^3-3x^2]_2^4=24$$

4) اذا كانت $f(x)=2[x+3]$ فاوجد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$[x]=\begin{cases}-1 & -1\leq x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ 1 & 1\leq x<2\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2}2[x+3]dx=$$

$$2[x+3]=\begin{cases}4 & -1\leq x<0\\ 6 & 0\leq x<1\\ 8 & 1\leq x<2\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{0}4dx+\int_{0}^{1}6dx+\int_{1}^{2}8dx=4+6+8=18$$

1) اذا كان $\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -6$ ، $\int_{-1}^{2} 3f(x)\,dx = 15$ فاوجد $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{2} 3f(x)dx = 15 \rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx = 5$$

$$\therefore \int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = 5 + (-6) = -1$$

2) اذا كانت f و g دوال متصلة حيث

$\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 7$ ، $\int_{2}^{7} f(x)\,dx = -3$ ، $\int_{1}^{7} f(x)\,dx = 10$ ، $\int_{1}^{7} (g(x)+1)\,dx = 10$

اذا كانت

$$\int_{1}^{7} g(x)dx + \int_{1}^{7} 1\,dx = 10$$

$$\int_{1}^{7} g(x)dx + 6 = 10$$

$$\int_{1}^{7} g(x)dx = 10 - 6 = 4$$

(a) $\int_{2}^{2} f(x)\,dx$ = 0

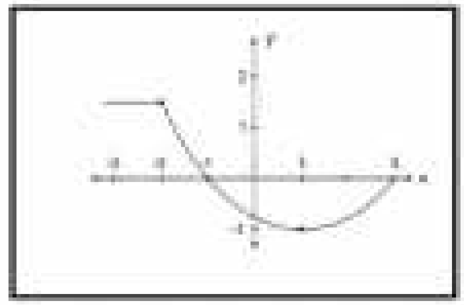
(b) $\int_{7}^{1} 3g(x)\,dx$ = 3 (-10)=-30

(c) $\int_{1}^{7} (2f(x) + g(x))\,dx = 2\int_{1}^{7} f(x)dx + \int_{1}^{7} g(x)dx = 2(10) + 4 = 24$

(d) $\int_{5}^{2} f(x)\,dx$ = -7

(e) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{7} f(x)dx + \int_{2}^{7} f(x)dx = 10 - (-3) = 13$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $-6 \le \int_{-3}^{3} f(x)\,dx \le 9$



$$-1 \le f(x) \le \frac{3}{2}$$

$$\int_{-3}^{3} -1dx \le \int_{-3}^{3} f(x)dx \le \int_{-3}^{3} \frac{3}{2}dx$$

$$6 \le \int_{-3}^{3} f(x)dx \le 9$$

(2) بين ان $\pi \le \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \sqrt{2}\pi$

علي الفترة$[0,\pi]$يكون

$$0 \le sinx \le 1$$

$$1 \le 1 + sinx \le 2$$

$$1 \le \sqrt{1+sinx} \le \sqrt{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} 1dx \le \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+sinx}dx \le \int_{0}^{\pi} \sqrt{2}dx$$

$$1(\pi-0) \le \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+sinx}dx \le \sqrt{2}(\pi-0)$$

$$\pi \le \int_{0}^{\pi} \sqrt{1+sinx}dx \le \sqrt{2}\pi$$

(3) بين ان $\int_{0}^{1} 3x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$ يقع بين 1 و $\sqrt{2}$

علي الفترة$[0,\pi]$يكون

$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le x^2 \le 1$$

$$1 \le x^2+1 \le 2$$

$$1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}$$

$$3x^2 \le 3x^2\sqrt{1+x^2} \le 3\sqrt{2}x^2$$

$$\int_{0}^{1} 3x^2dx \le \int_{0}^{1} 3x^2\sqrt{1+x^2}dx \le \int_{0}^{1} 3\sqrt{2}x^2dx$$

$$x^3]_0^1 \le \int_{0}^{1} 3x^2\sqrt{1+x^2}dx \le \sqrt{2}x^3]_0^1$$

$$1 \le \int_{0}^{1} 3x^2\sqrt{1+x^2}dx \le \sqrt{2}$$

(4) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{1}^{2} x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx$

$$1 \le x \le 2$$

$$1 \le \sqrt{x} \le$$

$$-1 \ge -\sqrt{x} \ge -\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \le \sqrt{x} \le -1$$

$$e^{-\sqrt{2}} \le e^{\sqrt{x}} \le e^{-1}$$

$$e^{-\sqrt{2}}.x^2 \le x^2e^{\sqrt{x}} \le x^2e^{-1}$$

$$\int_{1}^{2} e^{-\sqrt{2}}.x^2dx \le \int_{1}^{2} x^2e^{\sqrt{x}}dx \le \int_{1}^{2} e^{-1}x^2dx$$

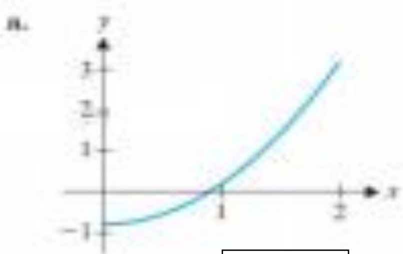
$$e^{-\sqrt{2}}.\frac{x^3}{3}]_1^2 \le \int_{1}^{2} x^2e^{\sqrt{x}}dx \le e^{-1}.\frac{x^3}{3}]_1^2$$

$$e^{-\sqrt{2}}.\frac{7}{3} \le \int_{1}^{2} x^2e^{\sqrt{x}}dx \le e^{-1}.\frac{7}{3}$$

$$0.56 \le \int_{1}^{2} x^2e^{\sqrt{x}}dx \le 0.85$$

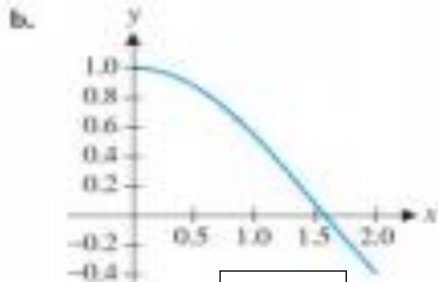
1) استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد اذا كان قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة ام سالبة

a.



موجب

b.



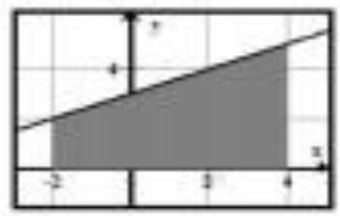
موجب

c.

سالب

2) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

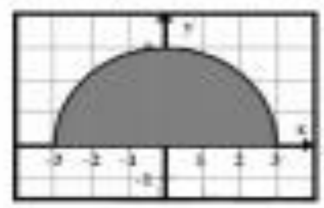
(a) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$ $=\frac{1}{2}(2+5)(6)=21$ مساحة شبه المنحرف



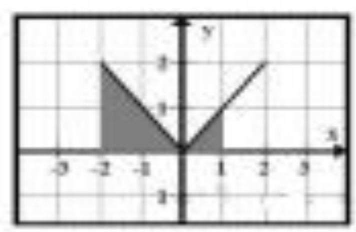
(b) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

مساحة نصف دائرة طول نصف قطرها 3 وحدة

$=\frac{1}{2}\pi(3)^2=\frac{9}{2}\pi$



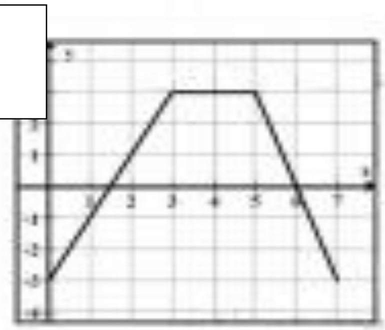
(c) $\int_{-2}^{1}|x|\,dx$ $=\frac{1}{2}(2)(2)+\frac{1}{2}(1)(1)=\frac{5}{2}$



2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

(a) $\int_{0}^{7} f(x)\,dx$

$$=-\frac{1}{2}(3)\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{(2+4.5)}{2}(3)-\frac{1}{2}(3)(1)=6$$



(b) $\int_{0}^{7}|f(x)|\,dx$

$$=\frac{1}{2}(3)\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{(2+4.5)}{2}(3)+\frac{1}{2}(3)(1)=13.5$$

القيمة المتوسطة للدالة

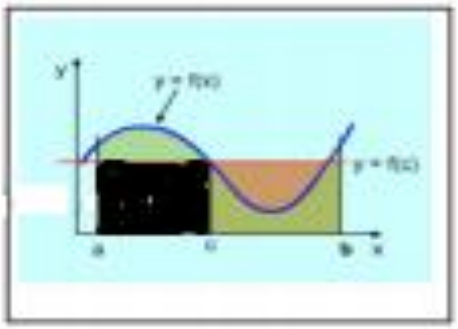
اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

نظريةالقيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فانة يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) بحيث

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



اي ان المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق محور السينات على الفترة $[a,b]$ تساوي مساحة مستطيل احد ابعادة $b-a$ والبعد الثاني هو $f(c)$ حيث c تنتمي الى الفترة (a,b)

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x - x^2$ على الفترة $[0,3]$

$$f_{ave} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (2x - x^2)dx$$

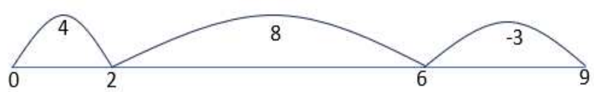
$$f_{ave} = \frac{1}{3}\, x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^3 = \frac{1}{3}[(3)^2 - \frac{(3)^3}{3}] = 0$$

(1) اذا كان $\int_{9}^{6} f(x)\,dx = 3$ ، $\int_{2}^{6} 2f(x)\,dx = 16$ ، $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$

$$\int_{2}^{6} 2f(x)dx = 16 \rightarrow \int_{2}^{6} f(x)dx = 8$$

$$\int_{9}^{6} f(x)dx = 3 \rightarrow \int_{6}^{9} f(x)dx = -3$$



$$f_{ave} = \frac{1}{9}\left(\int^{2} f(x)dx + \int^{2} f(x)dx + \int^{2} f(x)dx\right) = \frac{1}{9}(4 + 8 + (-3)) = 1$$

(2) اذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,2]$ هي 3 والقيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[2,5]$ هي 7 فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,5]$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx = 3 \rightarrow \int_{0}^{2} f(x)dx = 6$$

$$\frac{1}{3}\int_{2}^{5} f(x)dx = 7 \rightarrow \int_{2}^{5} f(x)dx = 21$$

$$f_{ave} = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} f(x)dx = \frac{1}{5}[6 + 21] = \frac{27}{5} = 2.4$$

(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[1,4]$ وكانت القيمة المتوسطة للدالة f تساوي 1

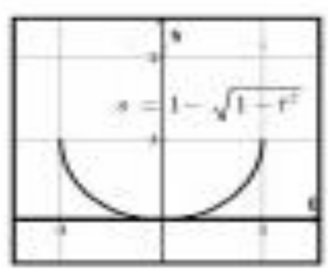
فاوجد قيمة $\int_{1}^{4} (2x - 5f(x))\,dx$

$$\frac{1}{3}\int_{1}^{4} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{1}^{4} f(x)dx = 3$$

$$\int_{1}^{4} (2x - 5f(x))dx = 7$$

$$x^2]_1^4 - 5\int_{1}^{4} f(x)dx = (16 - 1) - 5(3) = 0$$

(4) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(t)$ على الفترة $[-1,1]$



$$f_{ave} = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}\left[2(1) - \frac{1}{2}\pi(1)\right] = 1 - \frac{\pi}{4}$$

مساحة المستطيل

مساحة نصف الدائرة

1) اذا كانت $f(x)=3x^2$ فاوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

$$f_{ave}=\frac{1}{2}\int_0^2 3x^2dx=\frac{1}{2}\ x^3]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}(8-0)=4$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$3c^2=4\rightarrow c^2=\frac{4}{3}$$

$$c=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$c=-\sqrt{\frac{4}{3}}$ مرفوض

2) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فاوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$

$$f_{ave}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{2}\ (-cosx)]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos 2\pi+cos0)$$

$$=0$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$\sin c=0\rightarrow c^2=\frac{4}{3}$$

$c=0$ مرفوض

$c=\pi$

$c=2\pi$ مرفوض

3) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}x+4 & -4\le x\le -1\\ -x+2 & -1<x\le 2\end{cases}$

فاوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[-4,2]$

$$f_{ave}=\frac{1}{6}\int_{-4}^{2}f(x)dx$$

$$f_{ave}=\frac{1}{6}\left[\int_{-4}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{2}f(x)dx\right]$$

$$f_{ave}=\frac{1}{6}\left[\int_{-4}^{-1}(x+4)dx+\int_{-1}^{2}(-x+2)dx\right]$$

$$=\left(x^2/2+4x\right)\Big]_{-4}^{-1}+\left(-x^2/2+2x\right)\Big]_{-1}^{2}=\frac{3}{2}$$

$$f(c)=f_{ave}$$

$$1)c+4=\frac{3}{2}$$

$$c=-\frac{5}{2}$$

$$-c+2=\frac{3}{2}$$

$$c=\frac{-1}{2}$$

(1) تمثل الدالة $T(t)=18-4\cos\frac{\pi}{6}t$ درجة حرارة احدى المدن خلال السنة بالسيليسيوس حيث تمثل t الشهور على مدار العام، احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام

$$T_{ave}=\frac{1}{12}\int_{0}^{12}\left(18-4\cos\frac{\pi}{6}t\right)dt$$

$$=\left(8t-4\sin\frac{\pi}{6}t.\frac{6}{\pi}\right)\Big]_{0}^{12}=18$$

(2) تمثل الدالة $B(t)=400-0.3t$ معدل مواليد احدى المدن بالالاف والدالة $D(t)=396+0.2t$ معدل الوفيات لنفس المدينة بالالاف حيث تمثل t الشهور

عدد السكان $p(t)$

معدل التغير في عدد السكان $p'(t)$

$p'(t)=B(t)-D(t)$

(أ) حدد الفترات التي يتزايد ويتناقص فيها عدد السكان

$$P'(t)=(400-0.3t)-(396+0.2t)=4-0.5t$$

$$P'(t)=0$$

$$t=8$$

تزايد (0,8)

تناقص (8,12)

$p'(x)[++\ \ \ ---]$

0   8   12

(ب) حدد الشهر الذي يصل عدد السكان الى ذروته

شهر 8

(ج) اوجد صافي التغير في عدد السكان خلال سنة

$$\int_0^{12} p'(t)\,dt$$

$$\int_{0}^{12}(4-0.5t)dt=\left(4t-\frac{1}{4}t^2\right)\Big]_{0}^{12}=12$$

(د) احسب متوسط صافي التغير في عدد السكان الشهري

$$f_{ave}=\frac{1}{12}\int_{0}^{12}(4-0.5t)dt=\frac{12}{12}=1$$ الف

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_1^3 (3x^2+1)\,dx = \quad (x^3+x)]_1^3 = (3^3+3)-(1^3+1) = 30-2 = 28$

(2) $\int_1^4 (x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{x}\right)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+3ln|x|\right)\Big]_1^4 = \frac{62}{5}+3ln4$

(3) $\int_0^1 (6e^{-2x}+4)\,dx = \left(\frac{6e^{-2x}}{-2}+4x\right)\Big]_0^1 = 7-\frac{3}{e^2}$

(4) $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \quad (3sin^{-1}x)]_0^{\frac{1}{2}} = 3\left[sin^{-1}\frac{1}{2}-sin^{-1}0\right] = 3\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{\pi}{2}$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = (x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

(2) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx =$

$$(tanx)]_0^{\frac{\pi}{4}} = tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

(3) $\int_0^{\pi/4} \cos 4x\, dx =$ $\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{sin4\,{}^{\pi}/_{4}}{4} - \sin 0 = \frac{sin\pi}{4} - 0 = 0$

(4) $\int_0^{\pi/2} 2\sin x \cos x\, dx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\, dx = \left(\frac{-cos2x}{2}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{cos\,{}^{2\pi}/_{2}}{2} - cos0\right] = -\left[\frac{cos\pi}{2} - (-1)\right] = -(0+1) = -1$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx =$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos2x + 1)\, dx = \left(\frac{sin2x}{2} + x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\left(\frac{sin\,{}^{2\pi}/_{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - (sin0 + 0\right] = \frac{\pi}{2}$$

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

1) اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

$(a)\quad F(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt \quad \rightarrow F^/(x)=x^2+2x+1$

$(b)\quad F(x)=\int_2^x \sin^2 t\,dt \quad \rightarrow F^/(x)=sin^2x$

$(c)\quad F(x)=\int_x^1 te^{2t}\,dt \quad \rightarrow F^/(x)=-xe^{2x}$

$(d)\quad F(x)=\int_0^{\pi/4} \tan t\,dt \rightarrow F^/(x)=0$

2) اذا كان $\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$ ، فاوجد $f(e)$

نشتق الطرفين للحصول على $\boldsymbol{f(x)}$

$$\boldsymbol{f(x)=1.lnx+x.\frac{1}{x}-1=lnx}$$

$$\boldsymbol{lne=1}$$

3) اذا كان $F(x)=\int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ ، فاوجد $F(1)$ ، $F'(1)$

$$F(1)=\int_1^1 \sqrt{4t^2-1}dt=0$$

$$F^/(x)=\sqrt{4x^2-1}$$

$$F^/(1)=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (قاعدة السلسلة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(a) $F(x)=\int_{1}^{x^2}(t^3+2)\,dt$

$$F^{/}(x)=((x^2)^3+2).2x=(x^6+2).2x=2x^7+4x$$

(b) $F(x)=\int^{x^2}$

$$F^{/}(x)=(sinx^2).2x=2xsinx^2$$

(c) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{t^2}\,dt$

$$F^{/}(x)=-\int_{1}^{\sqrt{x}} e^{t^2}dt=-e^{\sqrt{x}^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}=-\frac{e^{x}}{2\sqrt{x}}$$

(d) $F(x)=\int_{0}^{\sin x}\tan t\,dt$

$$F^{/}(x)=\tan(sinx).cosx$$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الحالة العامة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{x}^{\sin x}(t^3+2)\,dt$

$$F^{/}(x)=\cos x(\sin^3 x+2)-1(x^3+2)$$

(2) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\cos t\,dt$

$$=F^{/}(x)=2x\cos x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,.\cos\sqrt{x}$$

(3) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$

$$F^{/}(x)=(-\sin x)\frac{1}{\cos^2 x+1}-(\cos x)\frac{1}{\sin^2 x+1}$$

$$F^{/}(x)=\frac{-\sin x}{\cos^2 x+1}-\frac{\cos x}{\sin^2 x+1}$$

وجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x) = \int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan 3t \, dt$

$$F^{/}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} . tan3\sqrt{x} - 2. tan3(2x)$$

$$F^{/}(x) = \frac{tan\left(3\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} - 2\tan(6x)$$

(2) $F(x) = \int_{2-x}^{\tan x} 3t \, dt$

$$F^{/}(x) = sec^2x.3tanx - 3(2-x)(-1)$$

$$F^{/}(x) = 3tanx\ sec^2x + 6 - 3x$$

(3) $F(x) = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t \, dt$

$$F^{/}(x) = \ln e^{2x} . 2e^{2x} - \ln e^{4\sqrt{x}} . e^{4\sqrt{x}} \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$F^{/}(x) = 2x. 2e^{2x} - 4\sqrt{x}. e^{4\sqrt{x}} \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$= 4xe^{2x} - 8e^{4\sqrt{x}}$$

(4) $F(x) = \int_{x}^{\sin^{-1} x} \sin t \, dt$

$$F^{/}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . sin(sin^{-1}x) - sinx$$

$$F^{/}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - sinx$$

1) اذا كان $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ، حيث $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ فاثبت ان $F'(x)=-1$

$$F^{/}(x)=-sinx\sqrt{1-cos^2x}-cosx\sqrt{1-sin^2x}$$

$$F^{/}(x)=-sinx\sqrt{sin^2x}-cosx\sqrt{cos^2x}$$

$$F^{/}(x)=-sinx.sinx-cosx.cosx$$

$$F^{/}(x)=-[sin^2x+cos^2x]=-1$$

2) اذا كان $F(x)=x+\int_{\tan x}^{0}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ ، فاثبت ان $F'(x)=0$

$$F^{/}(x)=1-\int_{0}^{tanx}\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$F^{/}(x)=1-\frac{1}{tan^2x+1}.sec^2x$$

$$F^{/}(x)=1-\frac{sec^2x}{sec^2x}=1-1=0$$

3) اذا كان $g(x)=\int_{0}^{3x}\left(\int_{0}^{u}\sin t\,dt\right)du$ ، فاوجد $g''(x)\,,\,g'(x)$

مساعدة: افرض

$$f(u)=\int_{0}^{u}sint\,dt$$

$$g(u)=\int_{o}^{3x}f(u)du$$

$$g^{/}(x)=f(3x).3=3f(3x)=3\int_{0}^{3x}sint\,dt$$

$$g^{//}=3\sin 3x\,.3=9\sin 3x$$

(1) اعتمد على الجدول التالي في ايجاد $h'(3)$ حيث

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

$$h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$h'(x)=f\big(g(x)\big).\,g'(x)$$

$$h'(3)=f\big(g(3)\big).\,g'(3)$$

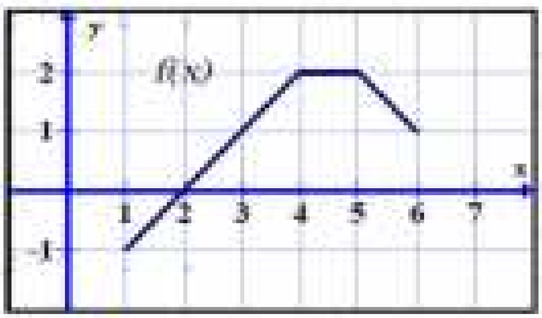
$$h'(3)=f(4).\,(2)$$

$$h'(3)=(-1)(2)=-2$$

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

في الاجابة عن الأسئلة التالية



(a) $H(3)=\int_{1}^{3} f(t)dt=0$

(b) $H(6)=\int_{1}^{6} f(t)dt=5$

(c) $H'(3)=f(3)=1$

(d) القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$$f_{ave}=\frac{1}{6-1}\int_{1}^{6} f(t)dt=\frac{1}{5}(5)=1$$

(e) ما هي قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$\boldsymbol{f(c)=f_{ave}\ \rightarrow f(c)=1\ \ \rightarrow c=3\ \ ,c=6}$ مرفوض

(f) فترة التزايد للدالة $H(x)$ على الفترة $[1,6]$

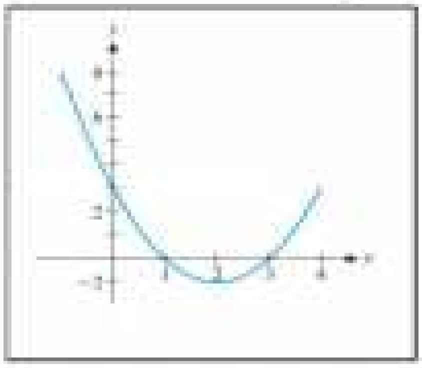
$\boldsymbol{(2,6)}$

(g) قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية على الفترة $[1,6]$

عند $\boldsymbol{x=2}$ وقيمتها $\boldsymbol{H(x)}=\int_{1}^{2} f(t)dt=\frac{1}{2}$

 0505712489 د:حيدر عامر السعافين

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt \qquad \rightarrow H^{/}(x)=f(x)$$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(أ) الاعداد الحرجة للدالة $H(x)$ $1,3$

(ب) فترة التزايد للدالة $H(x)$ $(-\infty,1),(3,\infty)$

(ج) فترة التناقص للدالة $H(x)$ $(1,3)$

$H^{/}(x)$ + + $\overset{1}{\bullet}$ − − $\overset{3}{\bullet}$ + +

f   0   1   3

(د) قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة عظمى محلية $x=1$

(هـ) قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية $x=3$

(و) فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ $(2,\infty)$

$\cap$ $\cup$

$H^{//}(x)$ − − −   + + +

$f^{/}$ 2

(ي) فترة التقعر للاسفل للدالة $H(x)$ $(-\infty,2)$

الدالة f متناقصة

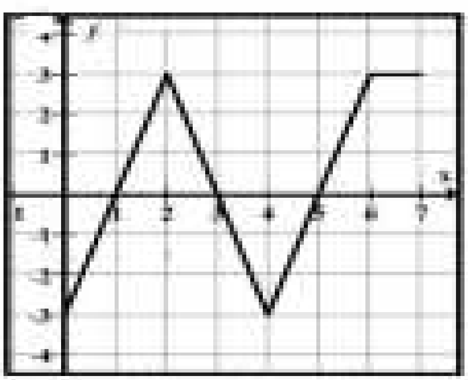
تعني مشتقتها سالية

(ل) قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ نقطة انقلاب $x=2$

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة $v(t)$ لجسم يتحرك على خط مستقيم

حيث دالة الموضع $\quad s(t)=\int_0^t v(x)\,dx$

في الاجابة عن الاسئلة التالية



(أ) ما موقع الجسم عند $t=0$ $s(0)=\int_0^0 v(t)dt=0$

(ب) ما موقع الجسم عند $t=7$ $s(7)=\int_0^7 v(t)dt=3$

(ج) ما سرعة الجسم عند $t=6$ $v(6)=3$

(د) ما تسارع الجسم عند $t=5$ $v^{/}(5)=3$

(1) اوجد معادلة المماس للدالة $H(x)$ عند $x=1$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x^2}(2t-1)\,dt$

$$m = H^{/} = 2x(2x-1)$$
$$m = H^{/}(1) = 2(1)(2-1) = 2 \quad (1,0)$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 2(x-1) \rightarrow y = 2x - 2$$

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند $x=0$ حيث $f(x)=\cos x+\int_{x}^{2x}e^{-t}\,dt$

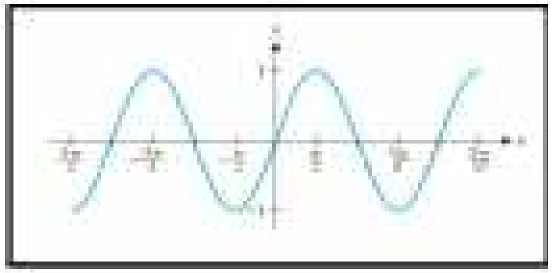
$$m = H^{/} = -sinx + 2e^{-2x} - e^{-x}$$
$$m = H^{/}(0) = -\sin 0 + 2(1) - 1 = 1 \quad ,(0,1)$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 1(x-0) \rightarrow y = x + 1$$

(3) أوجد قيمة النهايات التالية

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\int_{1}^{x}e^{t^2}\,dt}{x^2-1}=$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}(e^{t}-1)\,dt}{x^2}=$$

1) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور السينات على الفترة $[0, \pi]$



$$A = \int_0^{\pi} sinx\, dx = (-cosx)]_0^{\pi}$$

$$= -(cos\pi - cos0) = 2$$

2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور السينات على الفترة $[0, 2\pi]$

$$A = \int_0^{\pi} sinx\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} sinx\, dx = = (-cosx)]_0^{\pi} + (cosx)]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4$$

3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات

نوجد نقاط التقاطع بين محور السينات والدالة

$$f(x) = y_1 = 4 - x^2, y_2 = 0$$

$$y_1 = y_2 \to 4 - x^2 = 0$$

$$4 - x^2 = 0 \to x^2 = 4 \quad \to x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-2}^{2} = \left(\frac{32}{3}\right)$$

4) إذا كانت $f'(x) > g'(x)$ لكل $x > a$ ، فأثبت أن $f(x) > g(x)$ لكل $x > a$
حيث $f(a) = g(a)$

الإثبات:

$$f^/(t) > g^/(t)$$

$$\int_a^x f^/(t)dt > \int_a^x g^/(t)dt$$

$$f(x)]_a^x > g(x)]_a^x$$

$$f(x) - f(a) > g(x) - g(a)$$

$$f(x) > g(x) \ \#$$

الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس السادس: التكامل بالتعويض

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي تريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي تريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي تريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين حاصل ضرب احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

غالباً يستخدم التكامل بالتعويض عندما تريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، حاصل ضرب احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (2x+1)^5\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^5 dx = \frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^6}{6} = \frac{(2x+1)^6}{12} + c$$

حل آخر: $u = 2x+1$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$\int u^5 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^5 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}.\frac{u^6}{6} = \frac{(2x+1)^6}{12} + c$$

(2) $\int x^2 (x^3+1)^5\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+1)^5 dx = \frac{1}{3}.\frac{(x^3+1)^6}{6} = \frac{(x^3+1)^6}{18} + c$$

حل آخر: $u = x^3+1$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2.u^5 \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}.\frac{u^6}{6} = \frac{(x^3+1)^6}{18} + c$$

يجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

$$\int \frac{x}{u^3}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-3}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4u^2} + c = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + c$$

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

$u = 4 - x^4$

$\frac{du}{dx} = -2x^3$

$dx = \frac{du}{-2x^3}$

$$\int \frac{x^3}{u^{\frac{1}{2}}}.\frac{du}{-2x^3} = \int x^3.u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{-2x^3} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{2}.2u^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{4-x^2} + c$$

(3) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x} + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x}du$

$$\int \frac{u^3}{\sqrt{x}}.2\sqrt{x}du = 2\int u^3\,du = \frac{2u^4}{4} + c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+1\right)^4 + c$$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$

$u = 1 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x}du$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}.u}.2\sqrt{x}du = 2\int \frac{1}{u}du = 2ln|u| + c = 2ln\left|1+\sqrt{x}+c\right|$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int x e^{-x^2/2}\,dx$

$u = -\dfrac{x^2}{2}$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-2x}{2} = -x$

$dx = \dfrac{du}{-x}$

$$\int x\, e^u \frac{du}{-x} = -\int e^u\, du = -e^u + c = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

(2) $\int e^x \sqrt{e^x + 1}\,dx$

$u = e^x + 1$

$\dfrac{du}{dx} = e^x$

$dx = \dfrac{du}{e^x}$

$$\int e^x \sqrt{u}\, \frac{du}{e^x} = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x}$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$dx = 2\sqrt{x}du$

$$\int \frac{e^u}{\sqrt{x}}.2\sqrt{x}du = 2\int e^u\, du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

(4) $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

$u = lnx$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$dx = x\, du$

$$= \int \frac{\sqrt{u}}{x}.xdu = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(lnx)^{\frac{3}{2}} + c$$

(5) $\int \dfrac{\ln x^2}{x}\,dx$

$u = lnx$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$dx = x\, du$

$$= \int \frac{2lnx}{x}dx = 2\int \frac{u}{x}.xdu = 2\int udu = 2.\frac{u^2}{2} + c = (lnx)^2 + c$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx$

$u = ln\sqrt{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$dx = 2x\,du$

$$= \int \frac{1}{x}.\frac{1}{u}.2xdu = 2\int \frac{1}{u}du = 2\,ln|u| + c = 2ln\left|ln\sqrt{x}\right| + c$$

(2) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

$u = x^2 - 2x + 2$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 2$$

$$dx = \frac{du}{2x-2} = \frac{du}{2(x-1)}$$

$$= 2\int (x-1).u\frac{du}{2(x-1)} = \int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{(x^2-2x+1)^2}{2} + c$$

(3) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\,dx$

$u = x^2 - 1$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int xu^3.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^3du = \frac{u^4}{8} = \frac{(x^2-1)^4}{8} + c$$

(4) $\int e^{\tan x + 2\ln\sec x}\,dx$

$u = tanx$

$$\frac{du}{dx} = sec^2x$$

$$dx = \frac{du}{sec^2x}$$

$$= \int e^{tanx}.e^{2\ln secx}dx = \int e^{tanx}.e^{\ln sec^2x}\,dx$$

$$= \int e^{tanx}.sec^2xdx$$

$$= \int e^u.sec^2x\frac{du}{sec^2x} = \int e^u\,du = e^u = e^{tanx} + c$$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\,dx$

$$\int \frac{e^{cotx}}{sin^2x}dx = \int csc^2x\,.\,e^{cotx}\,dx = -e^{cotx} + c$$

(2) $\int \tan x\,dx$

$$\int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{-sinx}{cosx}\,dx = -ln|cosx| = ln(|cosx|)^{-1} = lnsecx + c$$

(3) $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x}\,dx$

$$u = \ln sinx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{cosx}{sinx} = cotx$$

$$dx = \frac{du}{cotx}$$

$$\int \frac{cotx}{u}.\frac{du}{cotx} = -\int \frac{1}{u}\,du = -ln|u| = ln(ln|sinx|) + c$$

(4) $\int \sec x\,dx$

$$u = secx + tanx$$

$$\frac{du}{dx} = sec^2x + secxtanx$$

$$dx = \frac{du}{sec^2x + secxtanx}$$

$$\int \frac{secx(secx + tanx)}{secx + tanx}dx = \int \frac{sec^2x + secxtanx}{secx + tanx}dx$$

$$= \int \frac{sec^2x+secxtanx}{u}.\frac{du}{sec^2x+secxtanx} = \int \frac{du}{u} = ln|u| = ln|secx + tanx| + c$$

(5) $\int \csc x\,dx$

$$\int \frac{cscx(cscx + cotx)}{cscx + cotx}dx = \int \frac{csc^2x + cscxcotx}{secx + tanx}dx$$

$$= -\int -\left(\frac{csc^2x+cscxcotx}{cscx+cotx}\right)dx = -ln|cscx + cotx| + c$$

وجد التكاملات التالية

(1) $\int x\cos x^2\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2xcosx^2dx = \frac{1}{2}sinx^2 + c$$

(2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2xcosx^2dx = \frac{1}{2}sinx^2 + c$$

(3) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dx = xdu$$

$$= \int \frac{\cos u}{x}.xdu = \int cosu\, du = sinu = sin(lnx) + c$$

(4) $\int x^2 \sec^2 x^3\, dx$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int x^2sec^2u.\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int sec^2u\, du = \frac{1}{3}tanu = \frac{1}{3}tanx^3\, c$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x^2} \sec(\frac{1}{x}) \tan(\frac{1}{x})\, dx$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$dx = -x^2 du$$

$$= \int \frac{1}{x^2} sec\ u\ tanu\ (-x^2 du) = -\int secu\ tanudu$$

$$= -secu = -\sec\frac{1}{x} + c$$

(2) $\int e^x \cos e^{x+1}\, dx$

$$= \int x^2 sec^2 u . \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int sec^2 u\ du = \frac{1}{3} tanu = \frac{1}{3} tanx^3\ c$$

(3) $\int \sec^2 x \cos(\tan x)\, dx$

$$= \int x^2 sec^2 u . \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int sec^2 u\ du = \frac{1}{3} tanu = \frac{1}{3} tanx^3\ c$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

$$\int \frac{cscx(cscx+cotx)}{cscx+cotx}dx=\int \frac{csc^2x+cscxcotx}{secx+tanx}dx$$
$$=-\int -\left(\frac{csc^2x+cscxcotx}{cscx+cotx}\right)dx=-ln|cscx+cotx|+c$$

(2) $\int \sin 2x \cos x \, dx$

$$\int \frac{cscx(cscx+cotx)}{cscx+cotx}dx=\int \frac{csc^2x+cscxcotx}{secx+tanx}dx$$
$$=-\int -\left(\frac{csc^2x+cscxcotx}{cscx+cotx}\right)dx=-ln|cscx+cotx|+c$$

(3) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

$$\int cosx(sinx)^3dx=\frac{sin^4x}{4}+c$$

(4) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x} \, dx$

$$\int sec^2x(tanx)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}tan^{\frac{3}{2}}x+c$$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\,dx$

$$\int sec^2x(tanx)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}tan^{\frac{3}{2}}x + c$$

(2) $\int \sqrt{\tan x}(\sec x \tan x)^2\,dx$

$$u = tanx$$

$$\frac{du}{dx} = sec^2x$$

$$dx = \frac{du}{sec^2x}$$

$$\int (tanx)^{\frac{1}{2}}sec^2xtan^2x.\frac{du}{sec^2x} = \int (tanx)^{\frac{5}{2}}du$$

$$= \int u^{\frac{5}{2}}du = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}(tanx)^{\frac{7}{2}} + c$$

(3) $\int \sin 3x \cos^5 3x\,dx$

$$u = \cos 3x$$

$$\frac{du}{dx} = -3sin3x$$

$$dx = \frac{du}{-3sin3x}$$

$$\int sin3x\,.u^5.\frac{du}{-3sin3x} = \frac{-1}{3}\int u^5\,du$$

$$= \frac{-1}{3}.\frac{u^6}{6} = -\frac{cos^63x}{18} + c$$

(4) $\int \cos^3 x \sin^5 x\,dx$

$$u = sinx$$

$$\frac{du}{dx} = cosx$$

$$dx = \frac{du}{cosx}$$

$$\int cos^2x.cosx\,.u^5.\frac{du}{cosx} = \int (1 - sin^2x)u^5\,du$$

$$\int (1-u^2)u^5dx = \int (u^5 - u^7)du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + c$$

$$= \frac{sin^6x}{6} - \frac{sin^8x}{8} + c$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}dx$

$u = tan^{-1}x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$dx = (1+x^2)du$

$$\int \frac{u^2}{x^2+1}.(x^2+1)du = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{(tan^{-1}x)^3}{3} + c$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}dx$

$u = sin^{-1}x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$dx = \sqrt{1-x^2}\,du$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ .u}.\sqrt{1-x^2}\,du = \int \frac{1}{u}du$$

$$= ln|u| = ln|sin^{-1}x| + c$$

(3) $\int \frac{\sec^{-1}2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}dx$

$u = sec^{-1}2x$

$\frac{du}{dx} = \frac{2}{|x|\sqrt{(2x^2)-1}}$

$dx = \frac{|x|\sqrt{4x^2-1}}{2}\,du$

$$\int \frac{u}{|x|\sqrt{4x^2-1}}.\frac{|x|\sqrt{4x^2-1}}{2}du = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{u^2}{4} + c = \frac{(sec^{-1}2x)^2}{4} + c$$

اوجد التكاملات التالية

1) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

$$u = \frac{x}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$dx = 2\,du$$

$$\int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}.dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2du$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = tan^{-1}u = \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2}+c$$

2) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx$

$$u = \frac{x}{5}$$

$$x = 5u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{25\left(\frac{x^2}{25}\right)-1}}.dx = \frac{1}{5(5)|u|\sqrt{u^2-1}}5du = \frac{1}{5}\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}du$$

$$= \frac{1}{5}sec^{-1}u = \frac{1}{5}sec^{-1}\frac{x}{5}+c$$

3) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{1+u^2}.\frac{du}{e^x} = \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= tan^{-1}u = tan^{-1}e^x + c$$

4) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

$$u = sinx$$

$$\frac{du}{dx} = cosx$$

$$dx = \frac{du}{cosx}$$

$$\int \frac{cosx}{1+u^2}.\frac{du}{cosx} = \int \frac{du}{1+u^2} = tan^{-1}u = tan^{-1}(sinx)+c$$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

$$x^2+4x+4-4+5=(x+2)^2+1$$

$$u=x+1$$

$$du=dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\int \frac{1}{u^2+1}du$$

$$=tan^{-1}u=tan^{-1}(x+1)+c$$

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$

$$x^2-8x+16-16+25=(x-4)^2+9$$

$$u=\frac{x-4}{3}$$

$$du=dx$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x-4)^2}{9}+1}dx=\frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+9}du$$

$$=tan^{-1}\frac{u}{3}=\frac{1}{9}tan^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)+c$$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}dx$$

$$6x-x^2=-(x^2-6x)$$

$$=-(x^2-6x+9-9)$$

$$=-(x^2-6x+9-9)$$

$$=-(x-3)^2+9$$

$$=9-(x-3)^2$$

$$u=\frac{x-3}{3}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}\rightarrow dx=3du$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}3du$$

$$=tan^{-1}u=tan^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+c$$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sqrt[3]{x^5 - x^3}\, dx$

$$= \int x\, \sqrt[3]{x^2 - 1}\, dx$$

$$\int x\, u^{\frac{1}{3}} . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}\, (x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$u = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

(2) $\int \frac{x^2}{x^6 + 1}\, dx$

$$\int \frac{x^2}{(x^3)^2 + 1}\, dx$$

$$= \int \frac{x^2}{u^2 + 1} . \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2 + 1}\, du$$

$$= \frac{1}{3} tan^{-1} u = \frac{1}{3}\, tan^{-1} x^3 + c$$

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 1}}\, dx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2 - 1}}\, dx = \int \frac{1}{x\sqrt{u^2 - 1}} . \frac{dx}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{x^2\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{2} sec^{-1} u = \frac{1}{2}\, sec^{-1} x^2 + c$$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^2(x-2)^5\,dx$

$$\int (u+2)^2 u^5 \frac{du}{2x}$$

$$= \int (u^2+2u+4)u^5\,du$$

$$= \int (u^7+2u^6+4u^5)\,du$$

$$= \left[\frac{1}{8}u^8+\frac{2}{7}u^7+\frac{4u^6}{6}\right]+c$$

$$= \left[\frac{(x-2)^8}{8}+\frac{2(x-2)^7}{7}+\frac{2(x-2)^6}{3}\right]+c$$

$$u = x-2$$
$$x = u+2$$
$$dx = du$$

(2) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$\int x.x^2\sqrt{u}\,\frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{3}{2}}\right)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]+c$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{2}}\right]+c$$

$$u = x^2-1$$
$$x^2 = u+1$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$dx = \frac{du}{2x}$$

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \sqrt{u}\;.2\sqrt{x}du$$

$$= 2\int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]+c$$

$$= \left[\frac{1}{5}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}\right]+c$$

$$u = 1+\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = u-1$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$dx = 2\sqrt{x}du$$

التكاملات التالية

(1) $\int x\sec^2 x^2 \tan x^2\, dx$

$$u = tanx^2$$
$$\frac{du}{dx} = 2xsec^2x^2$$
$$dx = \frac{du}{2xsec^2x^2}$$

$$\int xsec^2x^2\ .u\ \frac{du}{2xsec^2x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right] + c$$
$$= \frac{(tanx^2)^2}{4} + c$$

(2) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

ممكن حل السؤال بالتكامل مرتين

$$u = \sqrt{x} \rightarrow u^2 = x$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$dx = 2\sqrt{x}du = 2udu$$
$$w = u^3$$
$$\frac{dw}{du} = 3u^2$$
$$du = \frac{dw}{3u^2}$$

$$\int \frac{3u}{1+(u^2)^3}.2udu = \int \frac{6u^2}{1+u^6}du$$
$$\int \frac{6u^2}{1+w^2}.\frac{dw}{3u^2}$$
$$= 2\int \frac{dw}{1+w^2} = 2tan^{-1}w = 2tan^{-1}u^3 = 2tan^{-1}x^{\frac{3}{2}} + c$$

(3) $\int \frac{1}{x^{5/6}+x^{2/3}}\,dx = \int \frac{1}{x^{2/3}\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)}.3x^{\frac{2}{3}}du$

$$u = x^{1/3}$$
$$x = u^3 \rightarrow x^{\frac{1}{6}} = u^{3.\frac{1}{6}} = u^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$
$$dx = 3x^{2/3}du$$
$$w = u^{\frac{1}{2}} + 1 = \sqrt{u} \rightarrow \frac{dw}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$
$$du = 2\sqrt{u}dw = 2wdw$$

$$= 3\int \frac{1}{(u^{1/2}+1)}.du = \int \frac{1}{w}2wdw$$
$$\int 6\,dw = 6w + c = 6\sqrt{u} = 6\sqrt{x^{\frac{1}{3}}} = 6x^{\frac{2}{3}} + c$$

وجد قيمة التكاملات المحدودة التالية

(1) $\int_0^1 \frac{x^5}{x^6+1}\,dx$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{6x^5}{x^6+1}dx = \frac{1}{6}ln|x^6+1|]_0^1 = \frac{1}{6}[ln2 - ln1] = \frac{1}{6}ln2 = ln\sqrt[6]{2}$$

(2) $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx$

$$u = 1 + lnx$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$dx = xdu$$
$$x = 1 \ \rightarrow u = 1$$
$$x = e \ \rightarrow u = 2$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+lnx)} = \int_1^2 \frac{xdu}{x\,u} = \int_1^2 \frac{du}{u} = ln|u|]_1^2 = lu2 - ln1 = ln2$$

(3) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$u = x^2 + 1$$
$$x^2 = u - 1$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$dx = \frac{du}{2x}$$
$$x = 0 \ \rightarrow u = 1$$
$$x = 1 \ \rightarrow u = 5$$

$$\int_1^5 \frac{4x^3}{u^2}.\frac{du}{2x} = 2\int_1^5 \frac{x^2du}{u^2} = 2\int_1^5 \frac{(u-1)}{u^2}du = 2\int_1^5 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right)du$$

$$ln|u|]_1^5 + \frac{1}{u}]_1^5 = 2ln5 - \frac{8}{5}$$

(1) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx=-6$ ، اوجد

(a) $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

$$\int_0^3 f(u).3du = 3\int_0^1 f(u)du = 3(-6) = -18$$

$u=\frac{x}{3}$

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}$

$dx=3du$

$x=0\to u=0$

$x=3\to u=1$

(b) $\int_1^2 2f(x-1)\,dx$

$$\int_1^2 2f(u).du = 2\int_0^1 f(u)du = 2(-6) = -12$$

$u=x-1$

$dx=du$

$x=1\to u=0$

$x=2\to u=1$

(2) اذا كان $f(4)=-5\,,\,f(1)=3$ ، فاوجد $\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$$\int_1^4 xf'(u).\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^4 f'(u)du = \frac{1}{2}\,f(u)]_1^4$$

$$=\frac{1}{2}[f(4)-f(1)] = \frac{1}{2}(-5-3) = -4$$

$u=x^2$

$\frac{du}{dx}=2x$

$dx=\frac{du}{2x}$

$x=1\to u=2$

$x=2\to u=4$

(3) اذا كان $\int_0^1 2f(x)\,dx=10$ ، فاوجد $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{x}.xdu = \int_0^1 f(u)du = 5$$

$u=lnx$

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$

$dx=xdu$

$x=1\to u=0$

$x=e\to u=1$

(4) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx=2$ ، فاوجد $\int_0^{\pi/2} \cos x\, f(\sin x)\,dx$

$$\int_0^{\pi/2} cosx.f(u)\frac{du}{cosx} = \int_0^1 f(u)du = 2$$

$u=sinx$

$\frac{du}{dx}=cosx$

$dx=\frac{du}{cosx}$

$x=0\to u=0$

$x={\pi}/{2}\to u=1$

1) عند اجراء عملية لمريض يحقن بالبنج ، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دم المريض هو $C(t)$ حيث mg/cm^2

$$C(t)=\frac{3t}{(t^2+36)^{\frac{3}{2}}}$$

وجد متوسط تركيز المخدر في الدم اثناء الساعات الثمانية الاولى بعد حقن المريض

$u = t^2+36$

$\frac{du}{dt}=2t$

$dt=\frac{du}{2t}$

$t=0 \to u=36$

$t=8 \to u=100$

$$C_{avg}=\frac{1}{8-0}\int_0^8 \frac{3t}{(t^2+36)^{\frac{3}{2}}}dt=\frac{1}{8}\int_{36}^{100}\frac{3t}{u^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{du}{2t}$$

$$=\frac{3}{16}\int_{36}^{100}(-2)\,u^{-\frac{3}{2}}du=\frac{-3}{8}\left(u^{-\frac{1}{2}}\right)]_{36}^{100}==\frac{-3}{8\sqrt{u}}]_{36}^{100}=\frac{1}{40}mg/cm^3$$

2) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن نمذجتها بالعلاقة C

$$T(t)=3-\frac{1}{3}(t-5)^2$$

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

وجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءاً

$u = t-5$

$dt=du$

$t=8 \to u=3$

$t=17 \to u=12$

$$T_{avg}=\frac{1}{17-8}\int_8^{17}\left[3-\frac{1}{3}(t-5)^2\right]dt=\frac{1}{9}\int_3^{12}\left[3-\frac{1}{3}u^2\right]du$$

$$=\frac{1}{9}\left(3u-\frac{1}{9}u^3\right)]_3^{12}=\frac{1}{9}\left[\left(3(12)-\frac{1}{9}(12)^3\right)\left(3(3)-\frac{1}{9}(3)^3\right)\right]=-18$$

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاثبت ان

$$(1)\int_0^1 f(1-x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 f(x-1)dx=\int_1^0 f(u)\;.-du$$

$$=-\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(u)\;\;du$$

$u=1-x$
$du=-dx$
$dx=-du$
$x=0\to u=1$
$x=1\to u=0$

$$(2)\int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}dx=\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx$$

$$\int_0^1 \frac{f(x-1)}{f(1-x)+f(x)}dx=\int_1^0 \frac{f(u)}{f(u)+f(u-1)}.(-du)$$

$$=-\int_1^0 \frac{f(u)}{f(u)+f(1-u)}.(du)=\int_0^1 \frac{f(u)}{f(u)+f(1-u)}.(du)$$

$u=1-x\to x=1-u$
$du=-dx$
$dx=-du$
$x=0\to u=1$
$x=1\to u=0$

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,a]$ فيمكن اثبات ان $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$

(1) استفد من العلاقة السابقة لتبين ان

(1) $\int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}dx = 5$

$$f(x) = \sqrt{10-x}$$
$$a = 10$$
$$f(10-x) = \sqrt{10-(10-x)}$$
$$f(10-x) = \sqrt{x}$$

$$\int_0^{10} \frac{f(x)}{f(10-x)+f(x)}dx = \frac{10}{2} = 5$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{\pi}{4}$

$$f(x) = sinx$$
$$a = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sinx+sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

الوحدة الخامسة: التكـامل /// الدرس السابع: التكامل العددي

وجد كثير من الدوال لا نعرف ايجاد الدالة الاصلية لها (التكامل) ولكن نستطيع ايجاد تقريب للتكامل المحدود باستخدام بعض الطرق المشهورة

الطريقة الأولى: قاعدة "نقطة المنتصف"

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

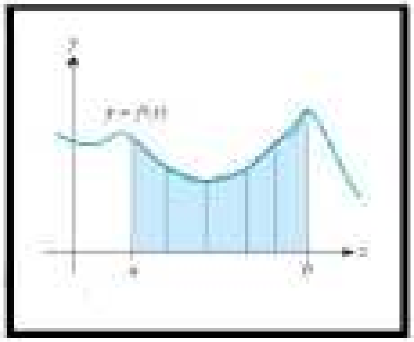
حيث c_i هي منتصف الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

1 قرب $\int_1^9 \frac{1}{x}\,dx$ باستخدام قاعدة "نقطة المنتصف" حيث $n=4$

تب عناصر التجزئة قبل الحل

(2 قرب $\int_0^1 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة "نقطة المنتصف" حيث $n=4$

الطريقة الثانية: قاعدة "شبة المنحرف"



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

(1 قرب $\int_0^1 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة "شبة المنحرف" حيث $n=4$

عناصر التجزئة هي 1 ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، 0

$$T_4(f) = \frac{1-0}{(2)(4)}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$\frac{1}{8}\left(0+\frac{3}{8}+\frac{12}{8}+\frac{27}{8}+3\right)=\frac{66}{64}=1.03125.$$

(2 قرب $\int_1^9 \frac{1}{x}\,dx$ باستخدام قاعدة "شبة المنحرف" حيث $n=4$

الطريقة الثالثة: قاعدة "سمبسون"

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+4f(x_4)+f(x_n)\right]$$

يجب أن تكون <u>n عدد زوجي</u>

1) قرب $\int_0^1 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة "شبة المنحرف" حيث $n=4$

عناصر التجزئة هي 1 ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، 0

$$S_4(f) = \frac{1-0}{(3)(4)}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right] = 1$$

2) قرب $\int_1^9 \frac{1}{x}\,dx$ باستخدام قاعدة "سيمسون" حيث $n=4$

1) اعتمد على الجدول المجاور الذي يمثل بعض

م الدالة $f(x)$ ، لتقدير قيمة التكامل

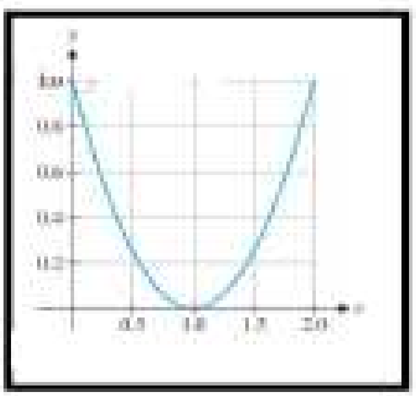
$\int_{0}^{2} f(x)\, d$. باستخدام قاعدة "شبة المنحرف"

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	4	4.6	5.2	4.8	5

2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

لتقدير قيمة التكامل $\int_{0}^{2} f(x)\, d\, x$

باستخدام قاعدة "سمبسون" حيث $n = 4$



1) اعتمد على الجدول المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة لجسم في ازمنة مختلفة

ستخدم هذة البيانات لتقدير المسافة المقطوعة خلال اول 6 ثواني

t	0	1	2	3	4	5	6
$v(t)$	40	42	40	44	48	50	46

2) اعتمد على الجدول المجاور الذي يمثل كمية تدفق الهواء خلال الحنجرة (سرعة التنفس) باللتر لكل

ثانية حيث يمثل الحجم (تكامل التدفق)، استخدم هذة البيانات لتقدير حجم الهواء خلال اول 10 ثواني

t	0	2	4	6	8	10
$f(t)$	26	30	28	28	32	30

الخطاء في التكامل العددي

اذا كانت $f''(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $|f''(x)| \le K$ لكل $x \in [a,b]$ فان الخطاء EM_n في التكامل العددي بطريقة قاعدة "نقطة المتصف" يحدد ب

$$|EM_n| \le K \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

اذا كانت $f''(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $|f''(x)| \le K$ لكل $x \in [a,b]$ فان الخطاء ET_n في التكامل العددي بطريقة قاعدة "شبة المنحرف" يحدد ب

$$|ET_n| \le K \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

اذا كانت $f^{(4)}(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $|f^{(4)}(x)| \le L$ لكل $x \in [a,b]$ فان الخطاء ES_n في التكامل العددي بطريقة قاعدة "سمبسون" يحدد ب

$$|ES_n| \le L \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

اوجد الحد الاعلى للخطاء في التكامل العددي $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$ عند استخدام قاعدة "شبة المنحرف" حيث $n=8$

1) اوجد الحد الاعلى للخطاء في التكامل العددي $\int_{1}^{2} x^{3}\, dx$ عند استخدام قاعدة "نقطة المنتصف "

حيث $n = 8$

2) اوجد الحد الاعلى للخطاء في التكامل العددي $\int_{0}^{2} 5x^{4}\, dx$ عند استخدام قاعدة "سيمسون "

حيث $n = 8$

3) اوجد الحد الاعلى للخطاء في التكامل العددي $\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\, dx$ عند استخدام قاعدة "شبة المنحرف " حيث

$n = 4$

1) اوجد عدد الفترات الجزئية n (اقل عدد من الخطوات) التي تضمن دقة على الاقل 10^{-6} في حساب

تكامل العددي $\int_1^2 (3x^2+1)\,dx$ عند استخدام قاعدة "شبة المنحرف"

مقدار الدقة ≤ مقدار الخطأ

2) اوجد عدد الفترات الجزئية n (اقل عدد من الخطوات) التي تضمن دقة على الاقل 10^{-7} في حساب

تكامل العددي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ عند استخدام قاعدة "نقطة المنتصف"

3) اوجد عدد الفترات الجزئية n (اقل عدد من الخطوات) التي تضمن دقة على الاقل 10^{-7} في حساب

تكامل العددي $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ عند استخدام قاعدة "سيمسون"

الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس الثامن: اللوغاريتم الطبيعي كتكامل

خواص اللوغارتمات الطبيعي

اذا كانت $x, y > 0$ فان

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y.$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$
3. $\ln x^r = r \ln x.$
4. $\ln 1 = 0.$
5. $\ln(e^x) = x.$
6. $e^{\ln x} = x.$
7. $\ln x = y \iff e^y = x.$

اذا كانت $a, x, c > 0,\ b, c \neq 1$ فان

$$(1) \quad \log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\ln x}{\ln b} \qquad , \qquad (2) \quad a^x = e^{x \ln a}$$

مشتقة الدوال الاسية

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \times \ln a$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} \times f'(x) \times \ln a$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \times \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \times \ln a}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = 5^{2x} + \ln(x^2 - 5x)$

(2) $y = \ln(\frac{1}{x}) + \ln(e^{\cos x}) + 4^{\ln x}$

(3) $y = 2^{\cos x} + \log_2 x$

(4) $y = \log_5(\sin 2x)$

(5) $y = \ln(x-1) + \log_3(3^{\tan x}) + 4^{2\log_4 x}$

(6) $y = 3^{\sin x^2} + \log 2^x$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = \log_3(\sqrt{x^2+1})$

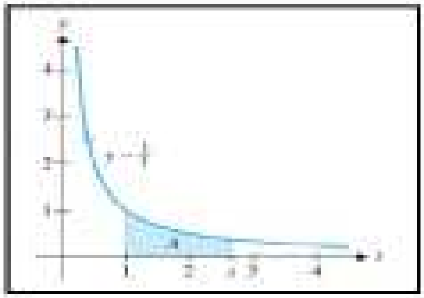
(2) $y = \log_5(x^3 \sin^2 x \cos x)$

(3) $y = \ln(\frac{x+\sin x}{1-\cos x})$

(4) $y = \ln(\sqrt{\frac{(x-2)^7}{x^5+1}})$

0505712489 د:حيدر عامر السعافين

الدالة اللوغاريتمية كتكامل



يمكن تعريف الدالة اللوغاريتمية $y = \ln x$ حيث $x > 0$

بالصيغة $\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt$

1) قدر قيمة $\ln 2$ باستخدام التكامل العددي بقاعدة سيمسون حيث $n = 4$

2) اثبت باستخدام التكامل ان $\ln (a \times b) = \ln a + \ln b$ حيث $a, b > 0$

اذا كانت $b > 0, b \neq 1, x \neq 0$ فان

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

اوجد كل مما يلي :

(1) $\int 2^x \quad dx$

(2) $\int 5^{3x} \quad dx$

(3) $\int 3^{\sin x} \cos x \quad dx$

جد كل مما يلي :

(4) $\displaystyle\int \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$

(2) $\displaystyle\int 3^x \cos 3^x\ dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{3^x}{3^x + 1}\ dx$

(4) $\displaystyle\int 3^{x^2 + \log_3 x}\ dx$

إجابات التمارين العامة موجودة
في آخر صفحة بالوحدة

تمارين عامة على الوحدة الخامسة

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) $\int t^2(4t - \frac{1}{t^2})\ dt =$

الدرس الأول

(a) $t^4 - 1$ (b) $t^4 - t + c$

(c) $t^3 - t + c$ (d) $4t^4 - t + c$

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x)\ dx =$

الدرس الأول

(a) $\sec x - \tan x + c$ (b) $\sec x + \tan x + c$

(c) $-\sec x - \tan x + c$ (d) $-\sec x + \tan x + c$

(3) $\int \sin^2 x\, dx =$

الدرس الأول

(a) $\frac{1}{2}(2x - \sin 2x) + c$ (b) $\frac{1}{2}(2x - \cos 2x) + c$

(c) $\frac{1}{4}(2x - \cos 2x) + c$ (d) $\frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + c$

(4) $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}\ dx =$

الدرس الأول

(a) $x - \cos x + c$ (b) $x + \cos x + c$

(c) $x + \sin x + c$ (d) $x - \sin x + c$

(5) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx =$

(a) $\sin 2x + c$ (b) $\cos 2x + c$

(c) $\frac{1}{2}\sin 2x + c$ (d) $\frac{1}{2}\cos 2x + c$

الدرس الأول

(6) $\int (\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}}) \quad dx =$

(a) $2\ln|x| - e^{x} + c$ (b) $2\ln|x| + e^{x} + c$

(c) $2\ln|x| - e^{-x} + c$ (d) $2\ln|x| + e^{-x} + c$

الدرس الأول

(7) $\int \frac{x}{x^2+1} \quad dx =$

(a) $2\ln(x^2+1) + c$ (b) $\ln(x^2+1) + c$

(c) $\frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + c$ (d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$

الدرس الأول

(8) $\int \cot x \quad dx =$

(a) $-\csc^2 x + c$ (b) $\csc x \cot x + c$

(c) $\ln|\cos x| + c$ (d) $\ln|\sin x| + c$

الدرس الأول

(9) $\int e^{x^2+\ln 2x} \quad dx =$

الدرس الأول

(a) $e^{x^2}+c$

(b) $2xe^{x^2}+c$

(c) $2e^{x^2}+c$

(d) $xe^{x^2}+c$

(10) $\int \frac{3}{x^2+1} \quad dx =$

الدرس الأول

(a) $3\ln(x^2+1)+c$

(b) $3x\ln|x|$

(c) $3\tan^{-1}x+c$

(d) $3\tan^{-1}(x^2+1)+c$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} \quad dx =$

الدرس الأول

(a) $\sec^{-1}x+c$

(b) $\csc^{-1}x+c$

(c) $\sin^{-1}x+c$

(d) $\cos^{-1}x+c$

(12) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} \quad dx =$

(a) $\sinh x+c$

(b) $2\mathrm{si}$

الدرس الأول

(c) $\cosh x+c$

(d) $2\cosh x+c$

(13) $\displaystyle\int \frac{e^{\sec^2 x}}{e^{\tan^2 x}}\, dx =$

الدرس الأول

(a) e

(b) $x + c$

(c) $e\,x + c$

(d) $e^x + c$

(14) $\displaystyle\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\, dx =$

الدرس الأول

(a) $\tan x + e^{\sin x} + c$

(b) $\tan x - e^{\sin x} + c$

(c) $\sec x + e^{\sin x} + c$

(d) $\sec x - e^{\sin x} + c$

(15) $\displaystyle\int \frac{x^2 + e^{3x}}{x^3 + e^{3x}}\, dx =$

الدرس الأول

(a) $3\ln\left|x^3 + e^{3x}\right| + c$

(b) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3 + e^{3x}\right| + c$

(c) $\ln\left|x^3 + e^{3x}\right| + c$

(d) $\frac{1}{9}\ln\left|x^3 + e^{3x}\right| + c$

(16) $\displaystyle\int 3xe^{x^2+1}\, dx =$

(a) $6e^{x^2+1} + c$

(b) $3e^{x^2+}$

الدرس السادس

(c) $\frac{2}{3}e^{x^2+1} + c$

(d) $\frac{3}{2}e^{x^2+1} + c$

(17) $\int \frac{1}{x^2+25}\ dx =$

(a) $5\tan^{-1}x+c$

(b) $\tan^{-1}5x+c$

(c) $\frac{1}{5}\tan^{-1}x+c$

(d) $\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}+c$

(18) $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}\,dx =$

(a) $(\tan^{-1}x)^3+c$

(b) $(x^2+1)^3+c$

(c) $\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3+c$

(d) $\frac{1}{3}(x^2+1)^3+c$

(19) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx =$

(a) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$

(b) $\frac{3}{2}(\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\frac{1}{3}(\sec x)^3+c$

(d) $-(\sec x)^3+c$

(20) $\int \sin x\cos^6 x\,dx =$

(a) $\frac{1}{7}\cos^7 x+c$

(b) $-\frac{1}{7}\cos^7 x+c$

(c) $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

(d) $-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

الدرس السادس

الدرس السادس

الدرس السادس

الدرس السادس

(21) $\int \sqrt[3]{x^5 - x^3}\ dx =$

الدرس السادس

(a) $\frac{3}{4}(x^5 - x^3)^{\frac{4}{3}} + c$

(b) $\frac{3}{4}(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} + c$

(c) $\frac{3}{8}(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} + c$

(d) $-(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} + c$

الدرس السادس

(22) $\int x^2 (x^3 + 1)^5\ dx =$

(a) $\frac{1}{6}(x^3 + 1)^6 + c$

(b) $\frac{1}{18}(x^3 + 1)^6 + c$

(c) $(x^3 + 1)^6 + c$

(d) $6(x^3 + 1)^6 + c$

(23) $\int x^2 \cos x^3\ dx =$

الدرس السادس

(a) $\frac{1}{3}\sin x^3 + c$

(b) $-\frac{1}{3}\sin x^3 + c$

(c) $\frac{x^3}{3}\sin x^3 + c$

(d) $-\frac{x^3}{3}\sin x^3 + c$

(24) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} =$

الدرس الرابع

(a) π

(b) 2π

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{4}$

(25) $\int_{-2}^{2} |x| =$

الدرس الرابع

(a) 0 (b) 2

(c) 4 (d) 8

(26) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\, dx =$

الدرس الرابع

(a) π (b) 2π

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(27) $\int_{0}^{1} \sqrt{x}(x+1)\, dx =$

الدرس الرابع

(a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{16}{15}$

(c) 1 (d) 2

(28) $\int_{0}^{1} x\sqrt{8x^2+1}\, dx =$

الدرس السادس

(a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{13}{12}$

(c) $\frac{9}{8}$ (d) $\frac{52}{3}$

(29) $\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx =$

الدرس السادس

(a) $\frac{1}{2}\int_{1}^{4} e^{u}\, dx$ (b) $\frac{1}{2}\int_{1}^{9} e^{u}\, dx$

(c) $2\int_{1}^{2} e^{u}\, dx$ (d) $2\int_{0}^{8} e^{u}\, dx$

(30) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^{2}+1}\, dx =$

الدرس الرابع

(a) 1 (b) $\ln\sqrt{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

الدرس الخامس

(31) $\lim_{x\to 1} \frac{\int_{1}^{x} e^{t^{2}}\, dt}{x^{2}-1} =$

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}e$

الدرس الخامس

(32) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{t^2+1}\,dt =$

(a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x^2+1)}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ (d) $\dfrac{1}{(x+1)}$

نستعين بتعريف التكامل

الدرس الثالث

(33) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\sin\dfrac{3\pi}{n}+\dots+\sin\dfrac{n\pi}{n}+\right]=$

(a) $\dfrac{4}{\pi}$ (b) $\dfrac{-2}{\pi}$

(c) $\dfrac{2}{\pi}$ (d) $\dfrac{-4}{\pi}$

(34) اذا كان $\sum\limits_{i=1}^{10}(2i+c)=140$ فان قيمة c تساوي

الدرس الثاني

(a) 30 (b) 3

(c) 2 (d) 1

(35) الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sin 2x$ هي

الدرس الأول

(a) $F(x)=-\cos 2x+c$ (b) $F(x)=2\cos 2x+c$

(c) $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c$ (d) $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+c$

36) اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 4 & x\ge 2 \\ 2x & x<2 \end{cases}$ فان $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ يساوي

الدرس الرابع

(a) 4 (b) 8

(c) 12 (d) 16

37) اذا كانت $f(x)=|2x-2|$ فان $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ يساوي

الدرس الرابع

(a) 6 (b) 4

(c) 3 (d) 5

38) اذا كان $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 dx = k$ و $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx = l$ فان $k+l$ يساوي

الدرس الرابع

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 0 (d) 1

39) اذا كان $\int_{1}^{5} f(x)\,dx=-7$ ، $\int_{1}^{3} 2f(x)\,dx=10$ فان $\int_{3}^{5} f(x)\,dx$ يساوي

الدرس الرابع

(a) 17 (b) 12

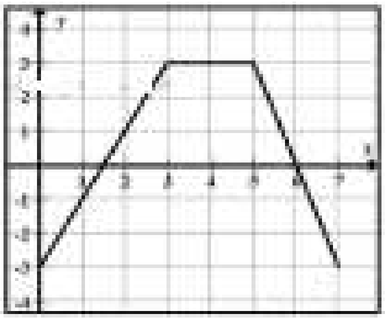
(c) -17 (d) -12

40) ان قيمة $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx$ تقع بين

a) $\pi, \sqrt{2}\pi$ (b) $1, \sqrt{2}\pi$

الدرس الرابع

c) $0, \pi$ (d) $\sqrt{2}\pi, 2\pi$



41) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

ن قيمة $\int_0^7 f(x)\, dx$ تساوي

الدرس الرابع

(a) 13.5 (b) 11.5 (c) 6 (d) 12

42) اذا كان $\int_9^0 f(x)\, dx = 3$ ، $\int_2^0 f(x)\, dx = 5$ فان القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على

فترة $[2,9]$ تساوي

(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{8}{9}$ (d) $\frac{1}{9}$

الدرس الرابع

43) اذا كانت $f(x) = 3x^2$ فان قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

ي

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (c) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

الدرس الرابع

الدرس الرابع

44) اذا كانت $\int_{-2}^{3k+10} f(x)\,dx = 0$ فان قيمة k تساوي

(a) 4 (b) -4 (c) 0 (d) -2

الدرس الخامس

45) اذا كانت $\int_{6}^{2x} f(t)\,dt = \cos(x-3)+k$ فان قيمة k تساوي

(a) 3 (b) 1 (c) -1 (d) 6

46) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2+bx-1$ فان قيمة b تساوي

الدرس الخامس

(a) 3 (b) -3 (c) 1 (d) 5

47) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}\,dt = 2\ln\left|x^3+5x+1\right|$

الدرس الخامس

فان قيمة b تساوي

(a) 3 (b) -3 (c) 6 (d) -6

48) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^2-2x+1$ فان $f(x)$ تكون

الدرس الخامس

(a) $2x$

(b) x^2-2x+1

(c) $\frac{1}{3}x^3-x^2$

(d) $2x-2$

الدرس الرابع

44) اذا كانت $\int_{-2}^{3k+10} f(x)\,dx = 0$ فان قيمة k تساوي

(a) 4 (b) -4 (c) 0 (d) -2

الدرس الخامس

45) اذا كانت $\int_{6}^{2x} f(t)\,dt = \cos(x-3)+k$ فان قيمة k تساوي

(a) 3 (b) 1 (c) -1 (d) 6

46) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2+bx-1$ فان قيمة b تساوي

الدرس الخامس

(a) 3 (b) -3 (c) 1 (d) 5

47) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}\,dt = 2\ln\left|x^3+5x+1\right|$

الدرس الخامس

فان قيمة b تساوي

(a) 3 (b) -3 (c) 6 (d) -6

48) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^2-2x+1$ فان $f(x)$ تكون

الدرس الخامس

(a) $2x$ (b) x^2-2x+1

(c) $\frac{1}{3}x^3-x^2$ (d) $2x-2$

49) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = e^{\sin 2x} - \ln\cos x - 1$ فان $f(0)$ تكون

(a) 1 (b) 2

الدرس الخامس

(c) e (d) $2e$

50) اذا كانت $\int f'(x)\,dx = x^3 + 9x$ حيث $f(2) = 7$ فان قيمة $f(-1)$ تساوي

(a) -29 (b) -19 (c) -9 (d) 26

الدرس الخامس

51) اذا كانت $\int_{0}^{3} (3x^2 + k)\,dt = 3$ فان قيمة k تساوي

(a) 24 (b) -24 (c) 8 (d) -8

الدرس الرابع

52) اذا كانت $f(x)$ دالة خطية فان $\int_{a}^{b} f''(x)\,dx$ تساوي

الدرس الخامس

(a) 0 (b) 1 (c) $b - a$ (d) $b + a$

53) اذا كانت $f(x) = g(x) + 7$ على الفترة $[3,5]$ فان $\int_{3}^{5} [f(x) + g(x)]\,dx =$ تساوي

(a) $2\int_{3}^{5} g(x)\,dx + 7$ (b) $2\int_{3}^{5} g(x)\,dx + 28$

الدرس الرابع

(c) $2\int_{3}^{5} g(x)\,dx + 14$ (d) $\int_{3}^{5} g(x)\,dx + 7$

(54) ان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = 3x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى تساوي

الدرس الثالث

(a) 14 (b) 22.5 (c) 90 (d) 64

(55) طول الفترة الجزئية المنتظمة للفترة $[-1,2]$ التي عدد عناصرها 15 هي

الدرس الثالث

(a) $\frac{3}{14}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{1}{15}$ (d) $\frac{1}{14}$

الدرس الثالث

(56) التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 11 للفترة $[0,2]$ هي

(a) $P = \left\{0, \frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \ldots, 2\right\}$ (b) $P = \left\{0, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \ldots, 2\right\}$

(c) $P = \left\{0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \ldots, 2\right\}$ (d) $P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, 2\right\}$

(57) العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$ هو

الدرس السابع

(a) $2 + \frac{3}{31} \times 6$ (b) $2 + \frac{3}{30} \times 6$

(c) $2 + \frac{3}{31} \times 7$ (d) $2 + \frac{3}{30} \times 7$

58) المساحة تحت المنحنى $f(x)=x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان) تعطى بالعلاقة

الدرس الثالث

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{64}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{64}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$

59) التكامل المحدود الذي يعبر عن مجموع ريمان $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin c_i^{\,2}\Delta x_i$ على الفترة $[0,2]$ هو

الدرس الثالث

(a) $\int_0^2 \sin^2 x\, dx$ (b) $\int_0^2 \sin x\, dx$

(c) $\int_0^2 x\sin x^2\, dx$ (d) $\int_0^2 \sin x^2\, dx$

60) اذا كانت $f'(x)=3e^x+2x$, $f(0)=4$ فان $f(x)$ تساوي

(a) $f(x)=3e^{3x}+x^2+4$ (b) $f(x)=3e^x+x^2+4$

الدرس الأول

(c) $f(x)=e^{3x}+x^2+1$ (d) $f(x)=3e^x+x^2+1$

61) الدالة المكانية $s(x)$ لدالة السرعة المتجهة $v(x)=10t+2$ حيث $s(0)=10$ هي

(a) $s(t)=t^2+2t+10$ (b) $s(t)=5t^2+2t$

الدرس الأول

(c) $s(t)=5t^2+2t+10$ (d) $s(t)=5t^2+t+10$

62) اذا كانت دالة التسارع هي $a(x)=12t^2+4$ حيث $s(0)=1, v(0)=4$ فان $s(2)$ تساوي

(a) 37 (b) 33 (c) 25 (d) 32

الدرس الأول

63) اذا كانت $f''(x)=6x$ حيث $f(x)$ تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة فان الدالة $f(x)$ تساوي

(a) $f(x)=x^3+1$ (b) $f'(x)=3x^2+1$

الدرس الأول

(c) $f(x)=x^3+x$ (d) $f'(x)=x^3$

64) اذا كانت تكلفة طباعة كتاب واحد هي 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية بالعلاقة $c'(x)=\frac{200}{\sqrt{x}}$ لطباعة x نسخة من نفس النوع ، فان تكلفة طباعة 100 كتاب من نفس النوع هو

(a) 5200 (b) 3200 (c) 160000 (d) 2800

الدرس الأول

65) ان ناتج $\sum_{i=1}(2i+1)$ يساوي

(a) 440 (b) 401 (c) 230 (d) 411

الدرس الثاني

66) يمكن كتابة $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-...-\frac{1}{400}$ باستخدام رمز $\sum$ على الشكل

(a) $\sum_{i=1}^{4000}\frac{1}{i^2}$ (b) $\sum_{i=1}^{20}(-1)^i\frac{1}{i^2}$

الدرس الثاني

(c) $\sum_{i=1}^{20}(-1)^{i+1}\frac{1}{i^2}$ (d) $\sum_{i=1}^{20}-\frac{1}{i^2}$

الدرس الثاني

ان ناتج $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$ يساوي

(a) $\frac{1}{e-1}$ (b) $\frac{e}{e-1}$ (c) $\frac{1}{e^2-e}$ (d) $\frac{e}{e^2-1}$

اذا كان ثمن شراء كمبيوتر شخصي هو 2500 درهم ،وقيمته $p(t)$ تتناقص بمعدل

الدرس الأول

$p'(t)=\frac{-250}{(t+1)}$ حيث t الزمن بالسنوات ، فان ثمنه بعد 4 سنوات يكون

(a) 2000 (b) 100 (c) 500 (d) 1500

الدرس السادس

اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx=-3$ ، فان $\int_1^2 2f(x-1)\,dx$ يساوي

(a) 3 (b) −3 (c) 6 (d) −6

الدرس السادس

اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على R ، فان $\int_0^{\pi} \cos x\, f'(\sin x)\,dx$ يساوي

(a) 1 (b) π (c) 0 (d) 2π

الدرس السادس

ان $\int x\cos x^2\,dx$

(a) $\cos x^2+c$

(b) $\sin x^2+c$

(c) $\frac{1}{2}\sin x^2+c$

(d) $\frac{1}{2}x^2\sin x^2+c$

الدرس السابع

72) ان $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ باستخدام قاعدة "شبة المنحرف" حيث $n = 4$ يساوي

(a) $\frac{1}{2}[(f(1)+2f(2)+2f(3)+2f(4)+f(5)]$ (b) $\frac{1}{2}[(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)]$

(c) $\frac{1}{3}[(f(1)+2f(2)+4f(3)+2f(4)+f(5)]$ (d) $\frac{1}{4}[(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)]$

الدرس السابع

73) ان $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ باستخدام قاعدة "سيمبسون" حيث $n = 4$ يساوي

(a) $\frac{1}{3}[(f(1)+2f(2)+2f(3)+2f(4)+f(5)]$ (b) $\frac{1}{3}[(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)]$

(c) $\frac{1}{3}[(f(1)+4f(2)+2f(3)+4f(4)+f(5)]$ (d) $\frac{1}{3}[(f(1)+2f(2)+4f(3)+2f(4)+f(5)]$

الدرس السابع

74) ان $\int_{0}^{1} 3x^2\,dx$ باستخدام قاعدة "سيمبسون" حيث $n = 4$ يساوي

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

75) اعتمد على الجدول التالي الذي يمثل بعض قيم

الدالة المتصلة $f(x)$ ، ان قيمة $T_3(f)$ على الفترة

$[2,14]$ تساوي

x	2	6	10	14
$f(x)$	12	28	34	30

(a) 249 (b) 296

(c) 332 (d) 368

الدرس السابع

76) ان $\int_1^9 \frac{1}{x}\, dx$ باستخدام قاعدة "شبة المنحرف " حيث $n = 2$ يساوي

الدرس السابع

a) $\frac{118}{45}$ (b) $\frac{136}{45}$

(c) $\frac{272}{45}$ (d) $\frac{544}{45}$

77) اذا كان $\left|f^{(4)}(x)\right| \le \frac{1}{5}$ فان الحد الاعلى للخطاء في التكامل العددي $\int_1^3 f(x)\, dx$ باستخدام قاعدة "سمبسون " حيث $n = 4$ هو هي

الدرس السابع

(a) 8.53×10^{-5} (b) 6.69×10^{-5}

(c) 1.39×10^{-4} (d) 1.14×10^{-5}

78) ان الحد الاعلى للخطاء في التكامل العددي $\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$ عند استخدام قاعدة "نقطة المنتصف " حيث $n = 10$ هو

الدرس السابع

(a) 0.006667 (b) 0.013333

(c) 0.000427 (d) 0.000147

79) اذا كان $|f''(x)| \le 2$ فان عدد الفترات الجزئية n (اقل عدد من الخطوات) التي تضمن دقة على الاقل 10^{-7} في حساب التكامل العددي $\int_1^3 f(x)\, dx$ باستخدام قاعدة "شبة المنحرف " هي

الدرس السابع

(a) 3651 (b) 3652

(c) 81 (d) 82

(80) اذا كان $\left|f^{(4)}(x)\right| \le 24$ فان عدد الفترات الجزئية n (اقل عدد من الخطوات) التي تضمن دقة على الاقل 10^{-7} في حساب التكامل العددي $\int_1^3 f(x)\,dx$ باستخدام قاعدة "سمبسون" هي

الدرس السابع

(a) 80 (b) 82

(c) 40 (d) 81

(81) ان التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = x^2 - 4$ ومحور السينات هو

الدرس الرابع

(a) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx$ (b) $-\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx$

(c) $\int_{0}^{4} (x^2 - 4)\,dx$ (d) $-\int_{0}^{4} (x^2 - 4)\,dx$

(82) ان المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور السينات على الفترة $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ تساوي

الدرس الرابع

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(83) ان المساحة المحصورة بين الدالة $\mathbf{f(x) = 4x - x^2}$ ومحور السينات تساوي

الدرس الرابع

(a) $\frac{64}{3}$ (b) $\frac{32}{3}$

(c) $\frac{16}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

84) اذا كانت $F(x)$ دالية اصلية للدالة $f(x)$ المتصلة على $[-1,3]$ وكان منحنى الدالة $F(x)$ مر بالنقطتين $(-1,-4)\,,(3,2)$ فان $\int_{-1}^{3}(f(x)+1)\,dx$ يساوي

الدرس الرابع

(a) 14 (b) 7

(c) 13 (d) 10

85) اذا كان كل من $F(x)$ و $G(x)$ دوال اصلية للدالة $h(x)$ المتصلة على $[0,4]$ وكان $\int_{0}^{4}(F(x)-G(x))\,dx=12$ فان $\int_{0}^{4}(F(x)-G(x))x^2\,dx$ يساوي

الدرس الرابع

(a) 16 (b) 64

(c) 32 (d) 48

(86) اذا كان $\int(f'(x)+2x)\,dx=x^3+a\,x+1$ حيث $f(2)=7$ و $f'(1)=5$ فان a يساوي

الدرس الخامس

(a) 12 (b) 4

(c) 2 (d) -3

(87) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt=$ $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

الدرس الخامس

(a) 1 (b) -1

(c) $\sin x$ (d) $\cos x$

(88) $\int 2(\tan x + \tan^3 x)\, dt =$

الدرس السادس

(a) $\tan^2 x + c$ (b) $\sec^2 x + c$

(c) $\sec^3 x + c$ (d) $2x + c$

(89) $\int_0^2 f(x)\, dx + \int_2^1 f(x)\, dx =$

الدرس الرابع

(a) $-\int_0^1 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^1 f(x)\, dx$

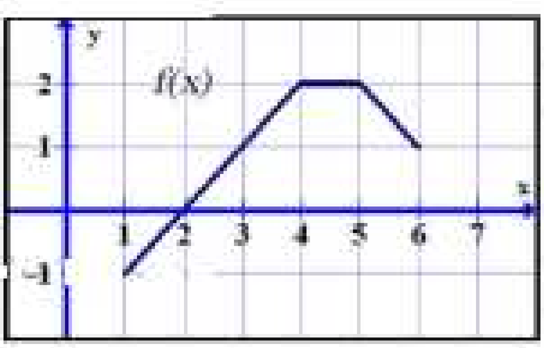
(c) 0 (d) $2\int_0^1 f(x)\, dx$

(90) $\int 3^{x^2 + \log_3 x} \quad dx =$

الدرس الثامن

(a) $3^{x^2} \times 2\ln 3$ (b) $3^{x^2} \times \ln 3$

(c) $\frac{1}{2\ln 3} 3^{x^2}$ (d) $\frac{2}{2\ln 3} 3^{x^2}$



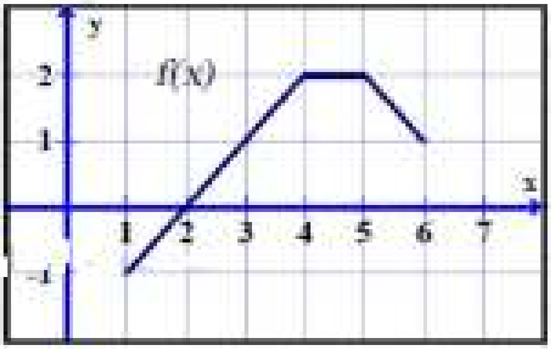
(91) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x) = \int_1^x f(t)\, dt$

ان $H(3)$ تساوي

الدرس الخامس

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 3



(92) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

ان $H'(4)$ تساوي

الدرس الخامس

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2 **(d)** 2.5

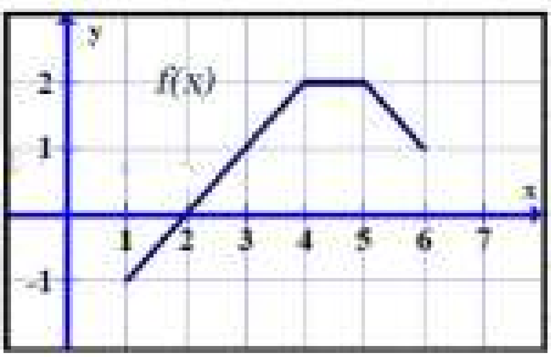
x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

(93) اعتمد على الجدول التالي حيث $h(x)=\int_1^{g(x)} f(t)\,dt$

ان $h'(3)$ تساوي

الدرس الخامس

(a) -2 **(b)** 1 **(c)** -1 **(d)** 2



(94) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

ان القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

تساوي

الدرس الخامس

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 5 **(d)** 1.2

(95) ان معادلة المماس للدالة $H(x)$ عند $x=1$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x^2} 2t-1\,dt$ هي

(a) $y=2x-1$ (b) $y=2x-2$

الدرس الخامس

(c) $y=2x-3$ (d) $y=2x$

(96) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فان قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$ هي

(a) 0 (b) 1 (c) 2π (d) π

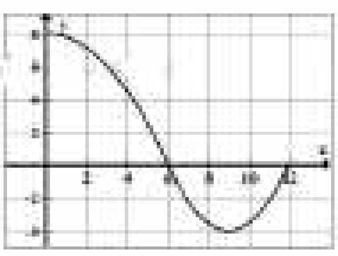
الدرس الرابع

(97) مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $f(x)=4-x^2$ ومحور السينات تساوي مساحة مستطيل طوله 4 وحدات وعرضه

(a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{10}{3}$

الدرس الرابع

(98) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

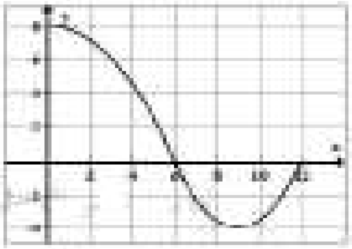
ان فترة التزايد للدالة $H(x)$ هي

(a) $(0,6)$ (b) $(0,9)$

الدرس الخامس

(c) $(6,12)$ (d) $(0,12)$

(99) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

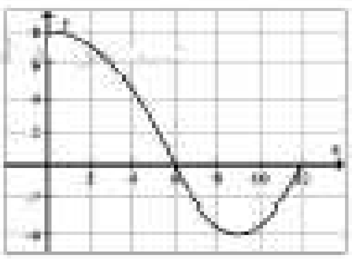
إن القيمة العظمى المطلقة للدالة $H(x)$ تكون عند

(a) 0 (b) 6

الدرس الخامس

(c) 9 (d) 12

(100) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

إن فترة التقعر للأعلى للدالة $H(x)$ هي

(a) $(6,12)$ (b) $(0,9)$

الدرس الخامس

(c) $(9,12)$ (d) $(0,12)$

101) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\ dx =$

(a) $\frac{-e^{x^3}}{3}+c$ (b) $\frac{x^3}{3e^{x^3}}+c$

(c) $\frac{-1}{3e^{x^3}}+c$ (d) $-\frac{1}{3}\ln e^{x^3}$

(102) $\int \left(\frac{1}{x} \int_{1}^{x} \frac{1}{u} du \right) dx =$

الدرس الأول

(a) $\frac{1}{x^3} + c$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x^2) + c$

(c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$ (d) $\ln(\ln x) + c$

(103) اذا كان $g(x) = \int_{0}^{2x} \left(\int_{0}^{u} \sin t \ dt \right) du$ ، فان $g''(x)$ هو

الدرس الخامس

(a) $\sin 2x$ (b) $2 \sin x$

(c) $2 \sin 2x$ (d) $4 \sin 2x$

(104) اذا كان $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ، فان $\int_{-5}^{3} f(x)\, dx$ يساوي

(a) -2 (b) 2

الدرس الرابع

(c) 8 (d) 0

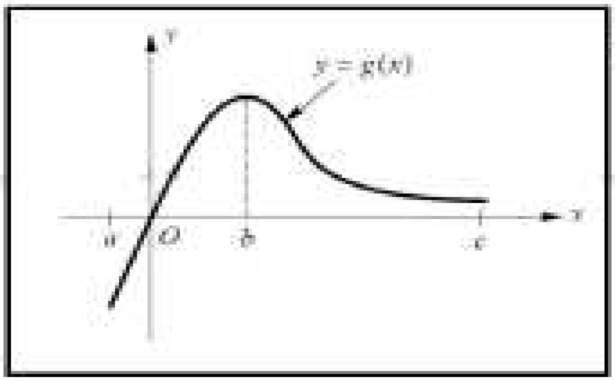
(105) ان $\int_{2}^{5} x^2 \, dx$ باستخدام نهاية مجموعة ريمان يساوي

(a) $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (2 + \frac{i}{n})^2 \frac{1}{n}$ (b) $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (2 + \frac{i}{n})^2 \frac{3}{n}$

(c) $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (2 + \frac{3i}{n})^2 \frac{1}{n}$ (d) $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (2 + \frac{3i}{n})^2 \frac{3}{n}$

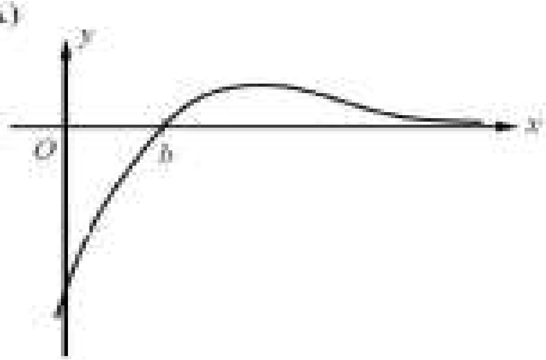
الدرس الثالث

(106) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة المتصلة $g(x)$ على الفترة $[a,c]$ حيث $g(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ لتحديد التمثيل البياني للدالة $f(x)$

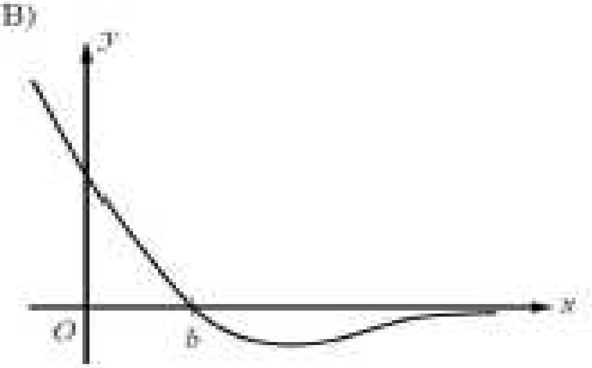


الدرس الخامس

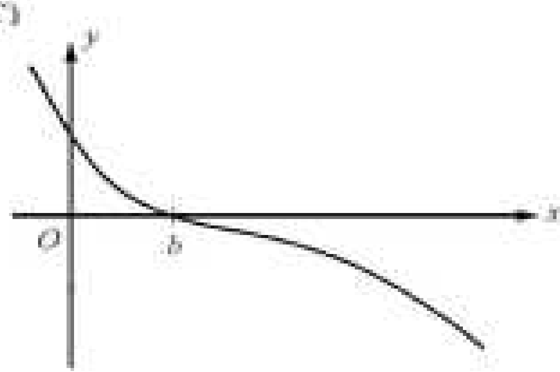
(A)



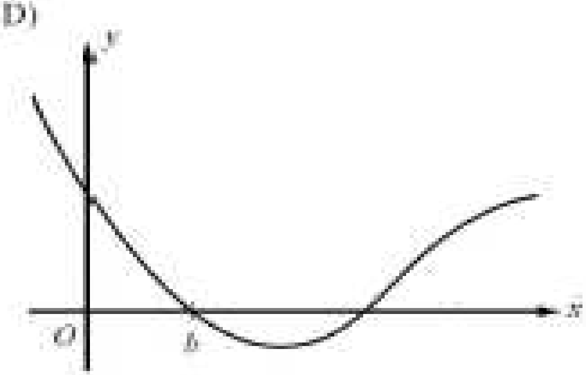
(B)



(C)



(D)

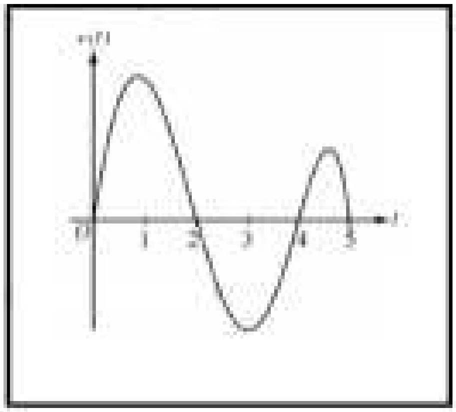


(107) اذا كانت القيمة المتوسط في التكامل للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,k]$ تساوي 2 فان قيمة k تساوي

(a) 3 **(b)** 4 **(c)** 6 **(d)** 9

الدرس الرابع

(108) الشكل المجاور يمثل بيان دالة السرعه المتجهة $v(x)$



لجسم يتحرك على خط مستقيم على الفترة الزمنية $[0,5]$

اذا كانت المسافة التي قطعها الجسم هي $13m$ والازاحة هي $3m$

على نفس الفترة

فان $\int_{2}^{4} v(t)\, dt$

(a) -10 (b) -5

الدرس الرابع

(c) 5 (d) 10

(109) التكامل $\int_{4}^{5} f(x)\, dx - \int_{-2}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\, dx$ بصورة تكامل منفردة هو

(a) $\int_{-2}^{5} f(x)\, dx$ (b) $\int_{3}^{5} f(x)\, dx$

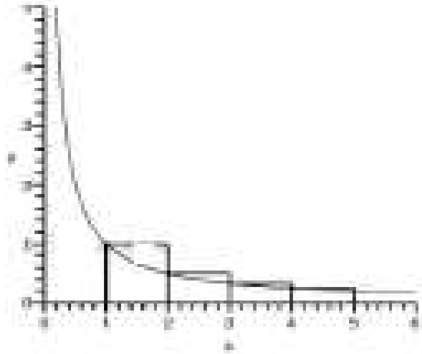
(c) $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx$ (d) $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$

(110) اذا كان $f(x) \le 3$ على الفترة $[-1,2]$ فان اعلى قيمة للتكامل $\int_{-1}^{2} (f(x)+2)\, dx$ هو

(a) 9 (b) 11

الدرس الرابع

(c) 15 (d) 5



(111) الشكل المجاور يمثل جزء من بيان الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$

من خلال مجموع مساحات المستطيلات اسفل الدالة والتكامل

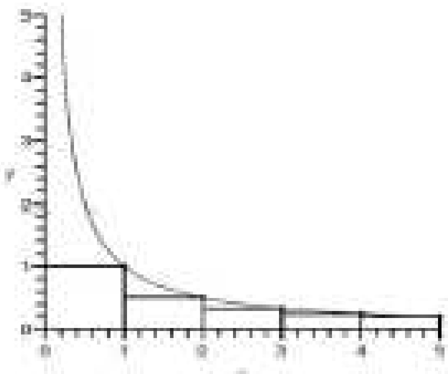
$$\ln n=\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

الدرس الثامن

ممكن استنتاج ان

(a) $\ln(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (b) $\ln(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$

(c) $\ln(n)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (d) $\ln(n)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$



(112) الشكل المجاور يمثل جزء من بيان الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$

من خلال مجموع مساحات المستطيلات اسفل الدالة والتكامل

$$\ln n=\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

الدرس الثامن

ممكن استنتاج ان

(a) $\ln(n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (b) $\ln(n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$

(c) $\ln(n)>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (d) $\ln(n)>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}$

(113) اذا كان القيمة المتوسطة في التكامل للدالة $f(x)=3x^2+1$ على الفترة $[0,4]$ تساوي 17
فان قيمة (قيم) c التي تحقق النظرية هي

الدرس الرابع

(a) $-\dfrac{4}{\sqrt{3}},\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

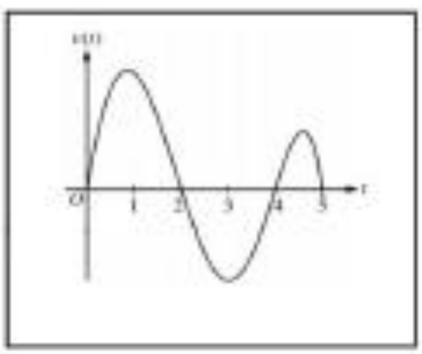
(114) اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ حيث $F(3)=4, F(0)=1$ فان
$\int_0^3 2f(x)\,F(x)\,dx$ تساوي

الدرس السادس

(a) 3 (b) 15

(c) 6 (d) 10

(115) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان دالة $f(x)$
في تحديد اي من التكاملات التالية له اكبر قيمة



الدرس الرابع

(a) $\int_0^4 f(x)\,dx$ (b) $\int_2^5 f(x)\,dx$

(c) $\int_1^2 f(x)\,dx$ (d) $\int_4^5 f(x)\,dx$

إجابات تمارين الوحدة الخامسة

1	B	21	C	41	C	61	C	81	B	101	C
2	A	22	B	42	B	62	B	82	[illegible]	102	C
3	D	23	A	43	D	63	A	83	B	103	D
4	A	24	C	44	B	64	A	84	D	104	C
5	C	25	C	45	C	65	A	85	B	105	D
6	C	26	D	46	B	66	C	86	B	106	B
7	B	27	B	47	C	67	A	87	B	107	B
8	D	28	B	48	D	68	C	88	A	108	B
9	A	29	C	49	B	69	D	89	B	109	C
10	C	30	B	50	A	70	C	90	C	110	C
11	A	31	D	51	D	71	C	91	B	111	D
12	D	32	B	52	A	72	A	92	C	112	C
13	C	33	C	53	C	73	C	93	A	113	B
14	A	34	B	54	C	74	A	94	B	114	B
15	B	35	C	55	A	75	C	95	B	115	C
16	D	36	C	56	C	76	B	96	D		
17	D	37	D	57	B	77	C	97	B		
18	C	38	A	58	A	78	A	98	A		
19	A	39	D	59	D	79	B	99	B		
20	B	40	A	60	D	80	B	100	C		

إنتهت الوحدة الخامسة بحمد الله

واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق