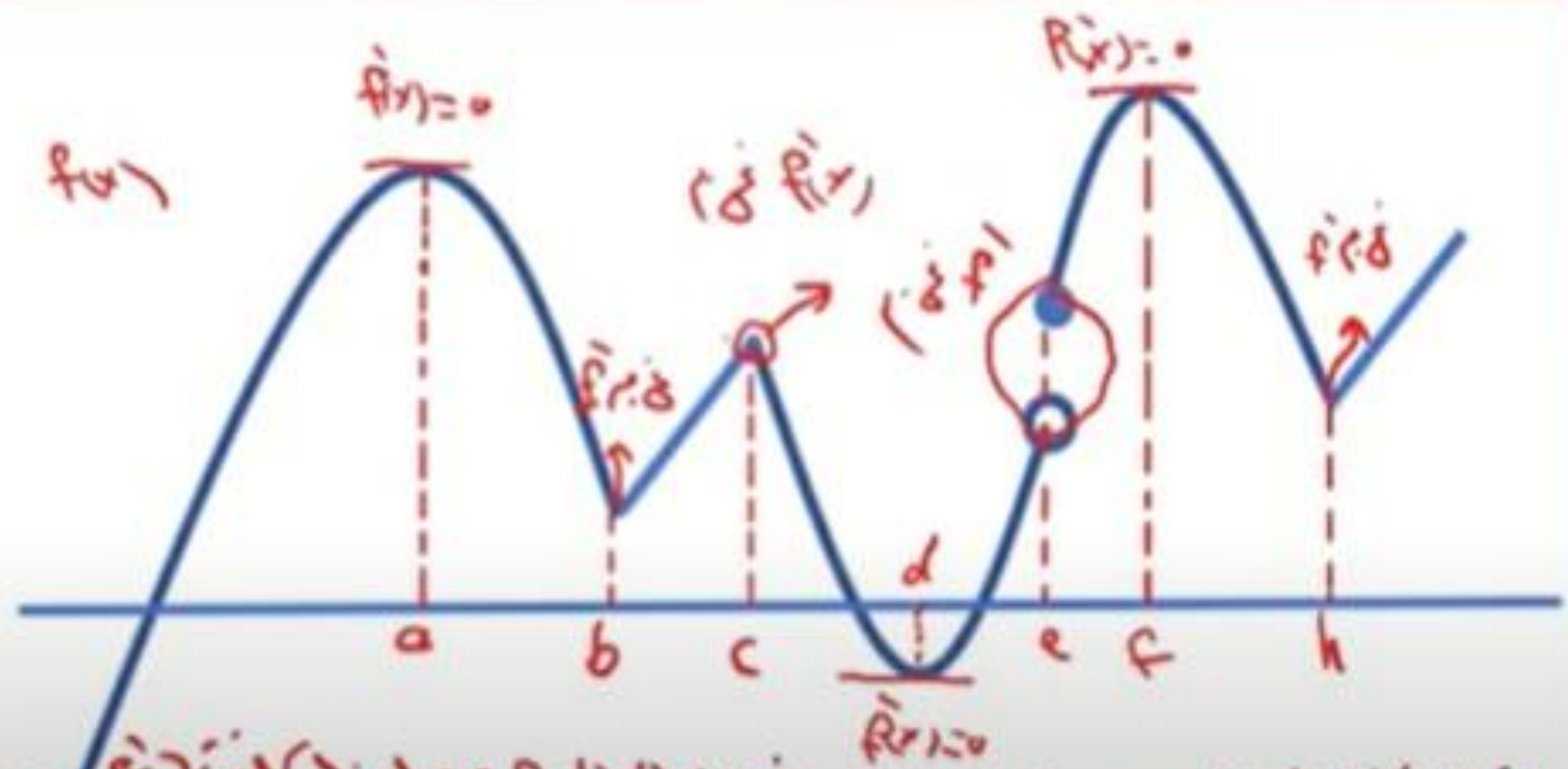
حل مسائل جميع دروس الوحدة الرابعة

فيديوهات الوحدة الرابعة

إعداد

د: حيدر عامر السعافين

مقدمة : النقطة الحرجة (العدد الحرج)
critical point



تعريف: النقطة الحرجة: النقطة c في مجال الدالة حرجة إذا (١) كانت $f'(c)=0$ (٢) أو $f'(c)$ غ م

الاعداد الحرجة جبرياً: مثال ١ أوجد الاعداد الحرجة للدالة:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$$

الحل:

مجال الدالة هو R :

① نوجد: $f'(x) = -3x^2 + 12x$

نضع $f'(x) = 0$

$\Rightarrow -3x^2 + 12x = 0$

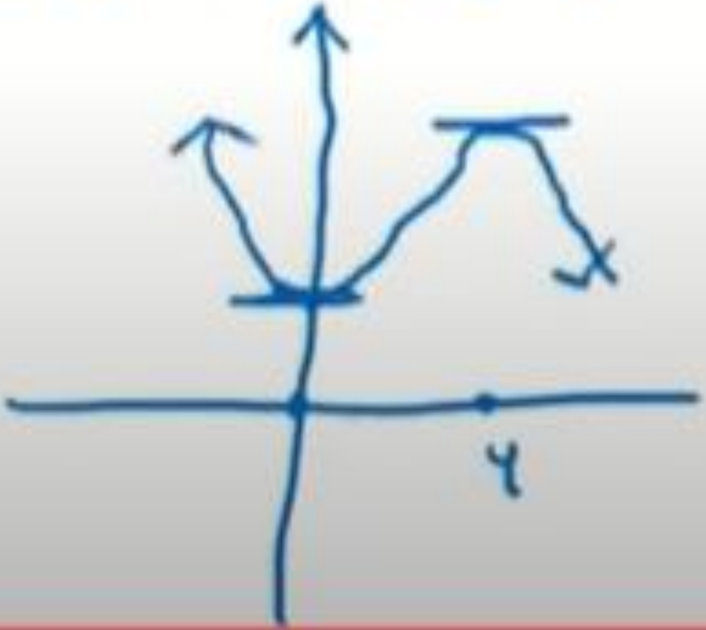
$-3x(x-4) = 0$

$x = 0 \in R$

$x = 4 \in R$

النقاط الحرجة هي

$x = 0 \,,\, x = 4$



حصة ② القيمة الحرجة (العدد الحرج)

مثال ② اوجد الأعداد الحرجة للدالة

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

الحل:

① المجال هو $R \setminus \{-2\}$

② $$f'(x) = \frac{(x+2)(4x) - 2x^2(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x - 2x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$$

① $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 8x = 0$

$2x(x+4) = 0$

$x = 0 \in$ المجال عدد ح.ج

$x = -4 \in$ المجال عدد ح.ج

② $f'(x)$ غ.م

$\Rightarrow x + 2 = 0$

$x = -2 \notin$ المجال ليس ع.ح

الأعداد الحرجة هي $x = 0, -2$

مثال 3

$f(x) = (3x+1)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \sqrt[3]{(3x+1)^2}$

أوجد الاعداد الحرجة.

الحل

المجال R

$f'(x) = \frac{2}{3}(3x+1)^{-\frac{1}{3}}(3)$

$f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}$

① $f'(x) \overset{?}{=} 0$

لا يوجد نقاط حرجة

② $f'(x)$ غ م

اصفار المقام: $3x+1=0$

$3x=-1$

$x=-\frac{1}{3} \in$ المجال عدد حرج

مثال ٤

أوجد الاعداد الحرجة. $f(x)=2x\cdot\sqrt{x+1}$

الحل:

المجال: $(-1,\infty)$

$$f'(x)=2\sqrt{x+1}+2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x+1}}{1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$$

① $f'(x)=0$

$3x+2=0$

$x=-\frac{2}{3}\in[-1,\infty)$ عدد حرج

② غير معرفة $f'(x) \Rightarrow x+1=0$

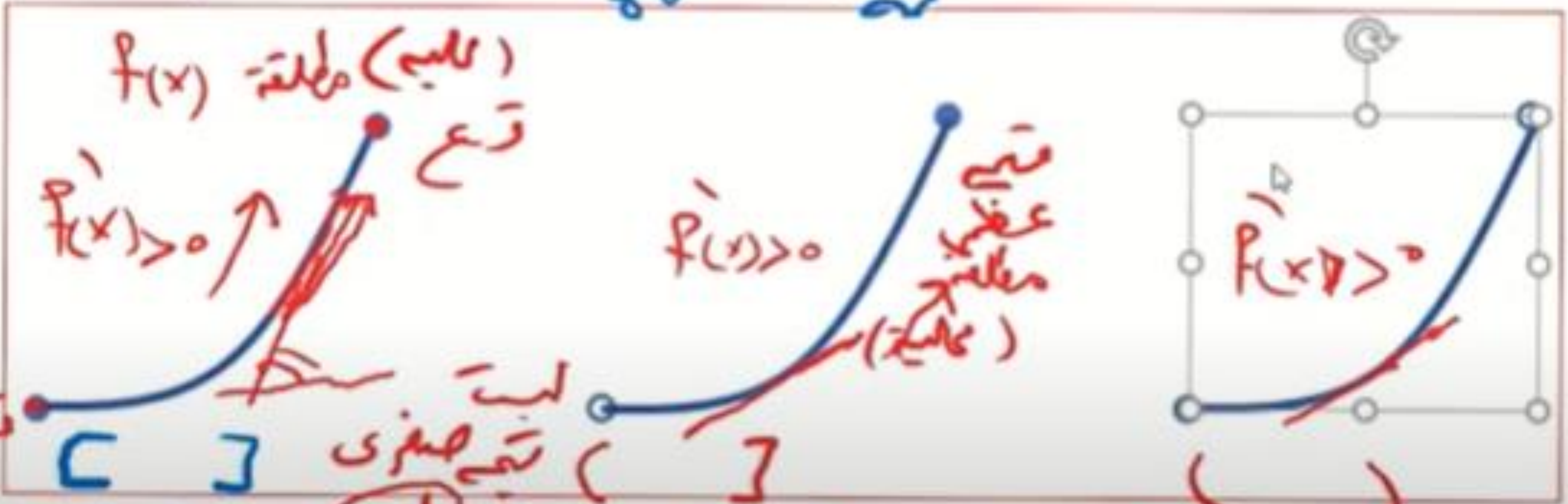
$x=-1\in[-1,\infty)$ عدد حرج

الاعداد الحرجة

$x=-\frac{2}{3},\ x=-1$

القيم القصوى المحلية والمطلقة

عظمى قمة | صغرى قاع | عظمى | صغرى



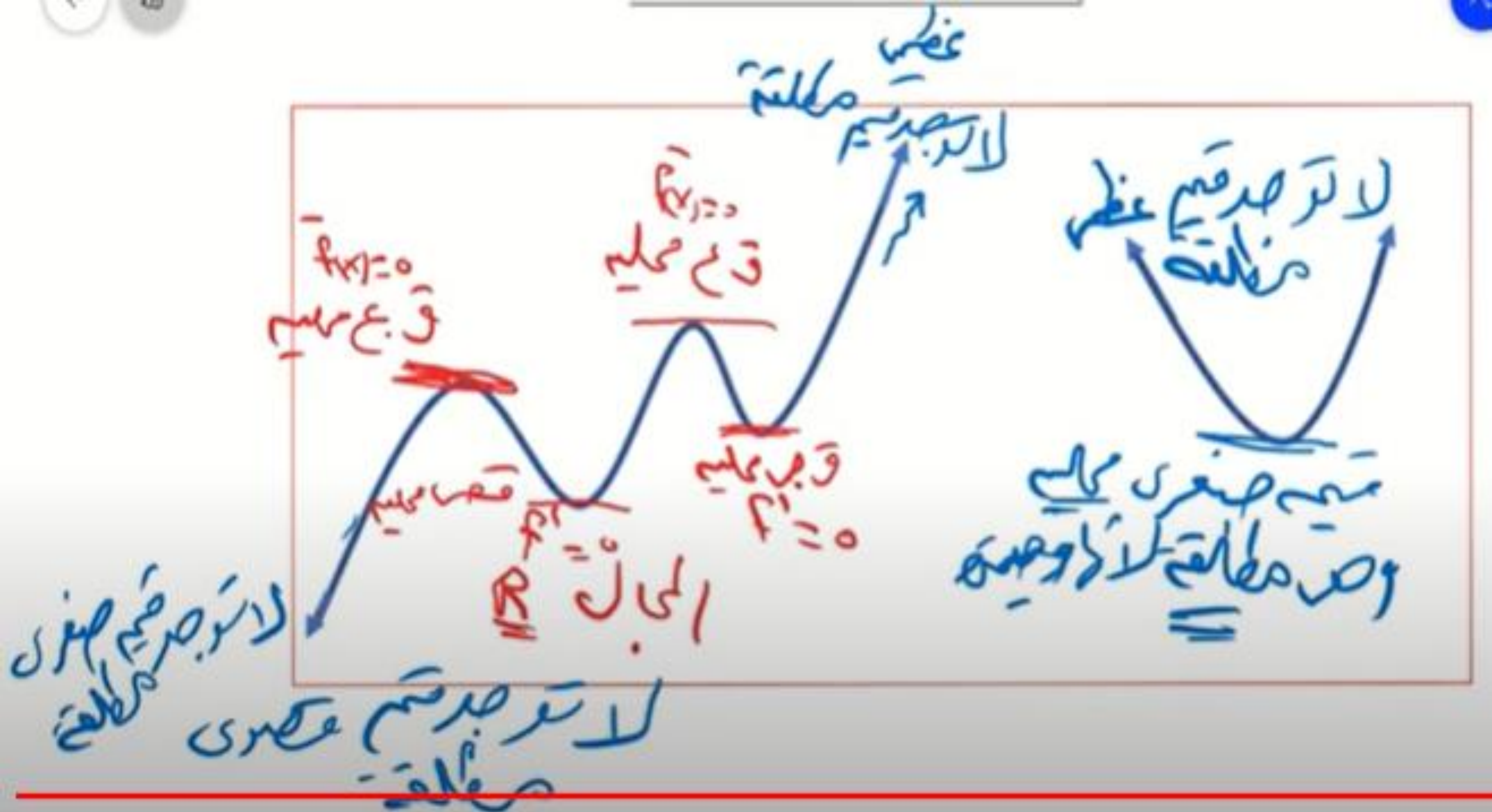
اي فترة مغلقة

لا قيم مطلقة صغرى وعظمى

يوجد قيمة عظمى (مطلقة)

ولا يوجد قيمة (صغرى)

لا توجد قيم لا صغرى ولا عظمى


لا توجد قيمة عظمى مطلقة
f'(x)=0
ق ع محلية
f'(x)=0
ق ع محلية
ق ص محلية
f' = 0
ق ص محلية
f' = 0
المجال R
لا توجد قيمة صغرى مطلقة
لا توجد قيمة عظمى مطلقة
قيمة صغرى محلية وص مطلقة لأنها وحيدة

التقعر ونقاط الانعطاف (الانقلاب)

حصة ١

تعريف

لكل دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f :

(١) مقعراً للأعلى إذا كانت 'f متزايدة في I

أو

(٢) مقعراً للأسفل إذا كانت 'f متناقصة في I

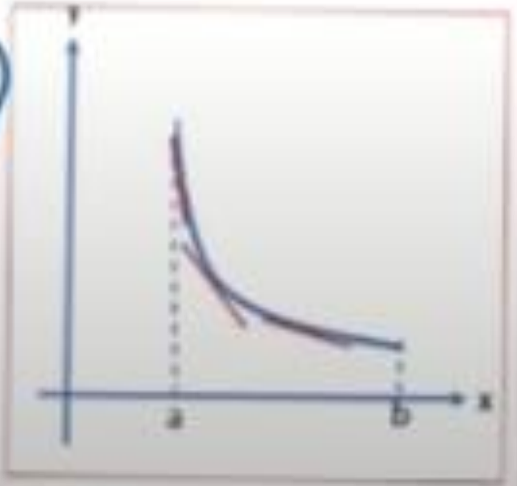
١

تقعر إلى الأعلى: متزايد

٢

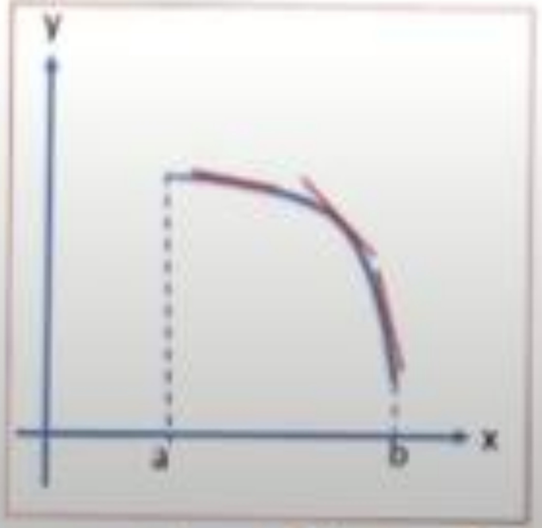
تقعر إلى الأسفل: متزايد

٣

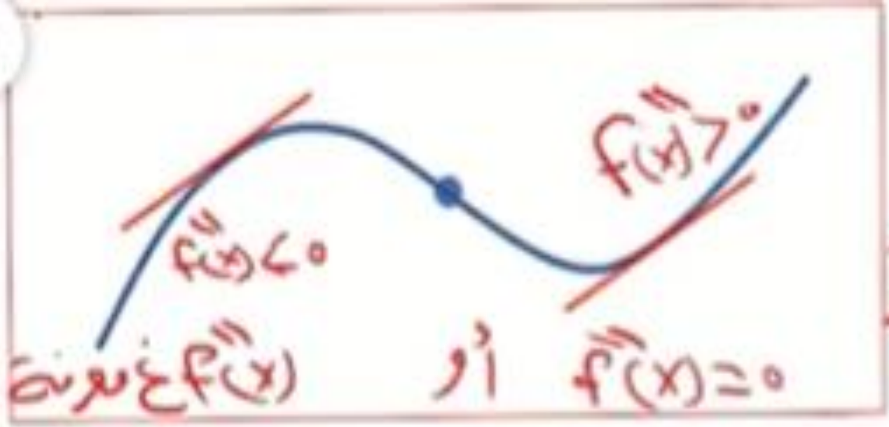


تقعر للأعلى: متناقص

٤



تقعر للأسفل: متناقص



نظرية

على فرض أن f'' موجودة في الفترة I

(أ) إذا كانت $f''(x) > 0$ في I. يكون تقعراً للأعلى

(ب) إذا كانت $f''(x) < 0$ في I. يكون تقعراً للأسفل

مثال (1)

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 12x + 1$$

أوجد: (1) نقاط الانعطاف (الانقلاب)

(2) حدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل

الحل

المجال : R

$$f'(x) = 9x^2 - 12x - 12$$

$$f''(x) = \underline{18x - 12}$$

نضع $f''(x) = 0 \Rightarrow 18x - 12 = 0$

نقطة انعطاف $x = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \in R$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	∞
f''	$- - -$	0	$+ + +$
f	$\frown$	$(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$	$\smile$

التقعر لأعلى في $(\frac{2}{3}, \infty)$

التقعر لأسفل في $(-\infty, \frac{2}{3})$

نقطة انعطاف $(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$

مثال 3

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

اوجد 1) نقاط الانعطاف (الانقلاب)

ثم حدد فترات التقعر الاسفل والاعلى

الحل:

$R \setminus \{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

1) $f''(x) \neq 0$

$f''(x)$ غ.م

$\Rightarrow x = 0 \notin R \setminus \{0\}$

لا توجد نقاط انعطاف

x	$-\infty$	0	∞
f''	$- - -$		$+ + +$
f	$\cap$		$\cup$

فترة التقعر لاعلى $(0, \infty)$

= = = لاسفل $(-\infty, 0)$

لا توجد نقاط انقلاب

مثال ② فترات التقعر للأعلى والأسفل ونقاط الانعطاف

للدالة: $f(x) = x^2 + 4\sin x$ ، $[0, 2\pi)$.

الحل

$f'(x) = 2x + 4\cos x$ ①

$f''(x) = 2 - 4\sin x$

بوضع $f''(x) = 0 \Rightarrow 2 - 4\sin x = 0$

$\frac{2}{4} = \frac{4\sin x}{4}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
f''		$++$	0	$--$	0	$++$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

فترات التقعر للأعلى

$(0, \frac{\pi}{6}) , (\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$

فترات التقعر لأسفل $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$

نقاط الانعطاف

$(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6})) , (\frac{5\pi}{6}, f(\frac{5\pi}{6}))$

إذا كانت للدالة: $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ قيمة عظمى محلية

تساوي $\boxed{8}$ ونقطة انعطاف عند: $x=1$. أوجد قيمة كل من a, c.

الحل

نقطة انعطاف $\Leftarrow f''(x) = 0$ عند $x=1$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6 \Rightarrow$

$f''(x) = 0$ at $\boxed{x=1}$

$6a + 6 = 0$

$6a = -6$

$a = -1$

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

نرسم $f' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x-2) = 0 \Rightarrow$ حرجة $\boxed{x=0, x=2}$

x	$-\infty$		0		2		∞
f'		$-\,-$	0	$+\,+$	0	$-\,-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

$8 = -8 + 12 + c \Rightarrow$

$c = 4 \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4$

10:48 / 10:53

إيجاد القيم القصوى المطلقة

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x-3} \quad , \quad [-2, 2]$$

الحل

$$f'(x) = \frac{(x-3)(6x) - 3x^2(1)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 18x - 3x^2}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 18x}{(x-3)^2}$$

بوضع: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 18x = 0$

$3x(x-6) = 0$

عدد حرج $x = \boxed{0} \in [-2, 2]$ ، ليس حرج $x = 6 \notin [-2, 2]$

$f(2) = \frac{3(2)^2}{2-3} = \boxed{-12}$ قيمة صغرى مطلقة

قيمة عظمى مطلقة $f(0) = 0$ ، $f(-2) = -2.4$

للدالة قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$

تساوي $\boxed{0}$ $(0, 0)$

للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $x = 2$

تساوي -12 (

اختبار المشتقة الثانية في إيجاد القيم القصوى

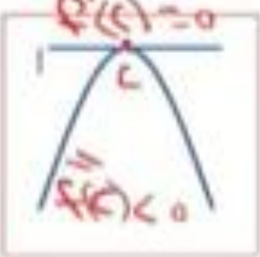
مبرهنة) اختبار المشتقة الثانية

على فرض أن f'' متصلة في الفترة (a,b)

و $f'(c)=0$ لكل $c \in (a,b)$

(1) إذا كانت $f''(c)<0$ فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية

(2) إذا كانت $f''(c)>0$ فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية



(1)

(2)

مثال 1: استخدم اختبار المشتقة الثانية في إيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x)=x^4-8x^2+10$

الحل

المجال R

$16-32+10=-6$

$f'(x)=4x^3-16x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-16x=0$

$4x(x^2-4)=0$

$x=0$

$x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$

$x=0$ ، $x=2$ ، $x=-2$

الاعداد الحرجة

$f''(x)=12x^2-16$

$f''(0)=-16<0$ قيمة عظمى محلية

$(0, 10)$

$f''(-2)=f''(2)=32>0$

قيمة صغرى محلية عند $x=\pm2$

$(2,-6)$ ، $(-2,-6)$

باستخدام اختبار ا... القيم القصوى المحلية للدالة :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$$

الحل

المجال $R / \{0\}$

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

اعداد حرجة

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \in$$ المجال

غير $f'(x) \Rightarrow x = 0 \in R / \{0\}$

$$f'(x) = 1 - 4x^{-2}$$

$$f''(x) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$$

$$f''(2) = \frac{8}{8} = 1 > 0$$

عند $\boxed{x = 2}$ قيمة صغرى محلية

$(2, -1)$

عند $x = -2$

$$f''(-2) = -1 < 0$$

تكون قيمة عظمى محلية

$(-2, -9)$

رسم منحنى الدالة (التفاضل)

الخطوات:

① مجال الدالة
- ← كثيرة حدود ...
- ← كسرية ...
- ← جذرية ...

② التناظر
- ← زوجية : $f(-x) = f(x)$ (متناظرة حول y)
- ← فردية : $f(-x) = -f(x)$ متناظرة حول نقطة الأصل

③ نقاط التقاطع مع المحورين
- ← $x = 0$ مع محور y
- ← $y = 0$ مع محور x

④ المقاربات
- ← رأسية ← أصفار المقام
- ← أفقية ← $\lim_{x \to \pm\infty}$

⑤ نمو المشتقة الأولى

النقاط الحرجة | فترات التزايد | فترات التناقص | القيم الصغرى والعظمى

⑥ المشتقة الثانية

نقاط انعطاف | التقعر لأعلى | التقعر لأسفل

⑦ نقاط إضافية

x	...
y	...

استخدم معلومات ... منحنى الدالة

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

الحل

1) المجال $R \setminus \{-1\}$

2) التناظر: لا يوجد تناظر

3) نقاط التقاطع: $x=0 \Rightarrow y=-1$

$(0,-1)$

$y=0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1}=0 \Rightarrow 2x-1=0$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2},0)$

4) المقاربات: الرأسية $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

المقاربات الأفقية

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \boxed{y=2}$ معادلة ...

$$f'(x) = \frac{(x+1)(2)-(2x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} = 3(x+1)^{-2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow f'(x) \Rightarrow x=-1 \notin$ المجال

f': $+++$ $\circ$ $+++$ (-1)

$(-\infty,-1)$ $(-1,\infty)$ تزايد

$f''(x) = -6(x+1)^{-3} = \frac{-6}{(x+1)^3} \neq 0$ نقاط انعطاف

$f''(x) \Rightarrow x=-1 \notin$ المجال

x	-2	0	$\frac{1}{2}$
y	5	-1	0

تطبيقات على القيم

مثال (١) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن.

الحل: نفرض أن العدد هو x

مربعه x^2

$$f(x) = x + x^2$$

$$f'(x) = 1 + 2x$$

نضع $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ عدد حرج

صحة ②

$f''(x) = 2 > 0$ لذا

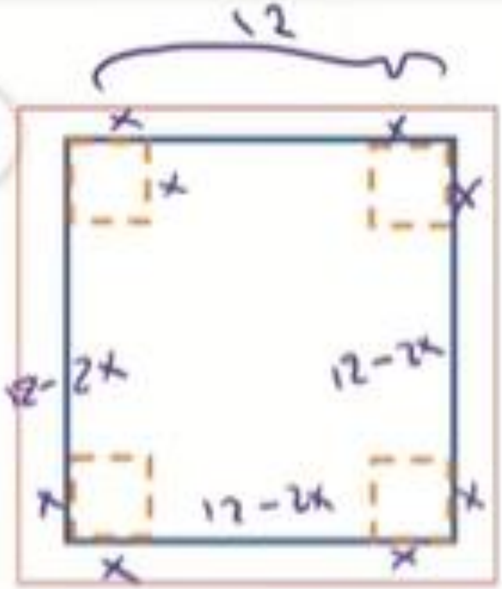
يوجد قيمة صغرى مطلقة

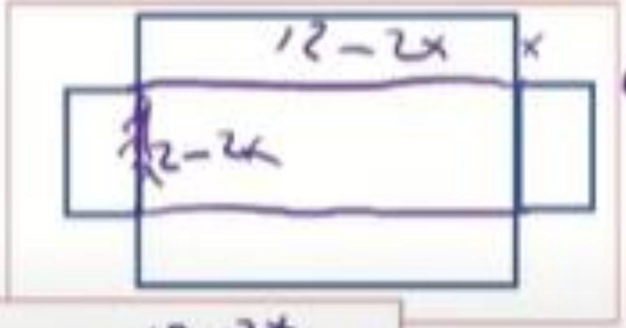
عند $x = -\frac{1}{2}$

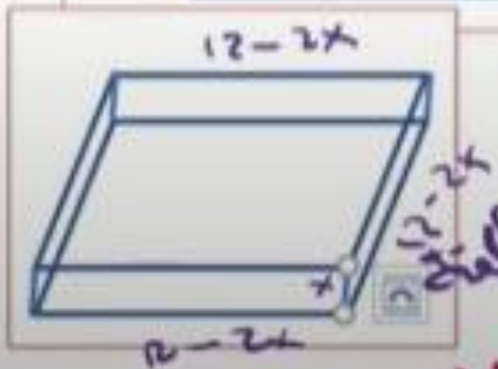
$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$







مثال ② قطعة نحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm يراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى وذلك بقص مربعات من أركانها ثم ثني الأجزاء البارزة فما هو أكبر حجم للصندوق

الحل نفرض طول ضلع المربع $= x$

$V = w \cdot L \cdot h = (12-2x)(12-2x)\,x$

$V = (144 - 48x + 4x^2)\,x$

$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$

$V' = 144 - 96x + 12x^2$

$V' = 0 \Rightarrow 144 - 96x + 12x^2 = 0$

نقسم على $(+12)$ $\Leftarrow$ $x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-2)(x-6) = 0$

$x = 6$ مرفوض

لأن المجال $0 < x < 6$

$x = 2$ عدد حرج

$V''(x) = -96 + 24x$

$V''(2) = -96 + 48 = -48$

$V''(2) < 0 \quad \cap$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x=2$ وهي

$V = (8)(8)(2) = 128\ cm^3$

المعدلات المرتبطة بالزمن

حصة ①

١) لو تغيرت أي كمية متغيرة على الزمن مثل: x, y, V, d, A ......

على الزمن تصبح $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dV}{dt}$ ، $\frac{dA}{dt}$ ... تسمى المعدلات الزمنية

هنالك أمور كثيرة تتغير مع الزمن .....

متوازي مستطيلات

كرة (V, r, A)

قرص دائرة (A و r)

مثال ١

صفيحة معدنية دائرية الشكل تتمدد بالحرارة. فإذا كان معدل ازدياد طول نصف قطرها $0.002\,cm/s$

احسب معدل ازدياد مساحتها عندما يكون $r = 5$.

الحل

$\frac{dr}{dt} = 0.002$ ، $\frac{dA}{dt} = ?$ عندما يكون $\boxed{r=5}$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi (2r) \frac{dr}{dt}$$

$$= \pi\, 2(5)(0.002)$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.02\pi \ cm^2/s$$

مثال (٤) ينكمش طول نصف قطر كرة

بمعدل $\frac{3}{\pi}$ cm/s . عندما يكون طول قطرها 4 cm

احسب معدل نقصان مساحة سطح الكرة وحجمها.

الحل

$\frac{dA}{dt} = ?$ ، $\frac{dr}{dt} = \frac{-3}{\pi}$ ، $\frac{dV}{dt} \Leftarrow \boxed{r = 2}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi (3r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi}(3)(4)\frac{-3}{\cancel{\pi}}$$

$$= -48 \ cm^3/s$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi(2r)\frac{dr}{dt}$$

$$= 4\cancel{\pi}(2)(2)\left(\frac{-3}{\cancel{\pi}}\right)$$

$$= -48 \ cm^2/s$$

مثال 3 تتمدد كرة بانتظام محتفظة بشكلها الكروي.
فإذا كان معدل الزيادة في مساحتها السطحية في لحظة ما
هو: $\boxed{6\pi}\ cm^2/s$ عندما كان طول قطرها 6cm فأوجد:
① معدل الزيادة في طول نصف قطرها في تلك اللحظة.
② معدل الزيادة في حجمها في تلك اللحظة.

الحل

$$\frac{dV}{dt} = ?\ ,\ \frac{dr}{dt} = ? \Leftarrow \frac{dA}{dt} = 6\pi$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi(2r)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{6\pi}{4\pi(6)} = \frac{4\pi(2)(3)}{4\pi(6)}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \boxed{\frac{1}{4}}\ cm/s$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{4}{3}\pi(3)(3)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

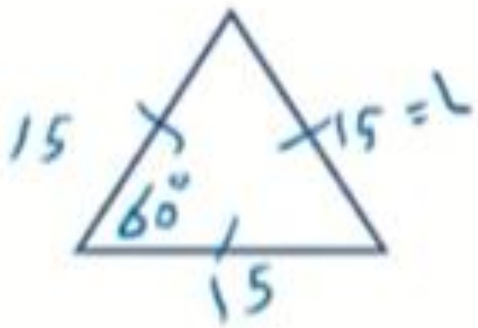
$$\frac{dV}{dt} = 9\pi\ cm^3/s$$

حصة ٢

المعدلات المرتبطة

مثال ١) مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 15cm . يزداد طوله بمعدل 2cm/min . ما معدل ازدياد المساحة .

الحل



$\boxed{L=15}$, $\frac{dA}{dt} = ?$, $\frac{dL}{dt} = \boxed{2}$

$A = \frac{1}{2} L^2 (\sin 60)$

$A = \frac{1}{2} L^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2L) \frac{dL}{dt}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} (2)(15)(2)$

$= 15\sqrt{3} \ cm^2/min$

مثال ٢ وعاء ماء على شكل أسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها $\frac{1}{2}m$ يتسرب منه الماء من قاعدتها بمعدل $\frac{1}{8}\pi\ m^3/min$ أوجد معدل هبوط سطح الماء.

الحل

$r = \frac{1}{2}m \ , \ \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{8}\pi \ , \ \frac{dh}{dt}$

$V = \pi r^2 h$

$V = (\frac{1}{2})^2 \pi \ h$

$\frac{dV}{dt} = (\frac{1}{4}\pi)\frac{dh}{dt}$

$\frac{1}{8}\cancel{\pi} = \frac{1}{4}\cancel{\pi}\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{8} \div \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{8} \times \frac{4}{1}$

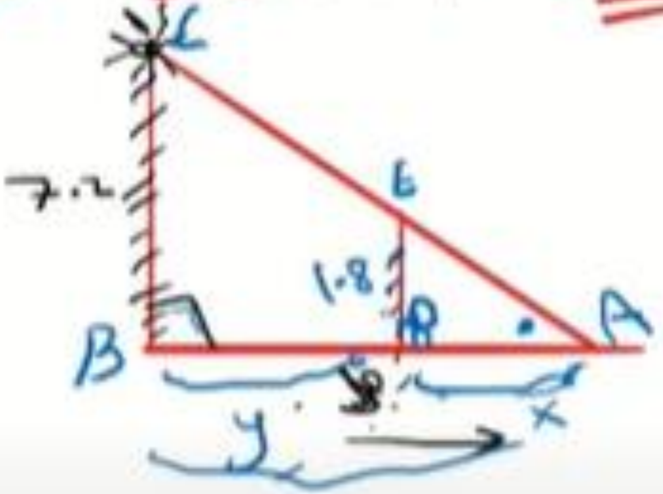
$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} m/min$

حصة 3

المعدلات المرتبطة بالزمن

مثال ① عمود إنارة طوله 7.2m في نهايته مصباح.
يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعدًا عن العمود بسرعة 30m/min. أوجد معدل تغير ظل الرجل

الحل:



$$\frac{dy}{dt} = ? \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 30$$

ΔΔ ABC ، ΔDE متشابهين

$$\frac{x}{y+x} = \frac{1.8}{7.2} = \frac{1}{4}$$

$$4x = y + x$$

$$3x = y$$

نشتق بالنسبة للزمن

$$3\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

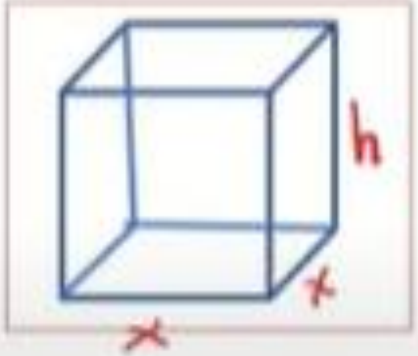
$$\frac{dy}{dt} = 3(30)$$

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{90}\ m$$

مثال (2) متوازي سطوح مستطيلات أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل. يزداد طول قاعدته بمعدل 0.3cm/s وارتفاعه يتناقص بمعدل: 0.5 cm/s . أوجد:

معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4cm والارتفاع 3cm.

الحل



$x = 4$

$h = 3$

$\frac{dh}{dt} = -0.5\ cm/s \qquad \frac{dx}{dt} = 0.3\ cm/s$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}(h) + x^2\frac{dh}{dt}$$

$$= 2(4)(0.3)(3) + (16)(-0.5)$$

$$= 7.2 - 8 = -0.8\ cm^3/s$$

مثال ٣ : أوجد نقطة أو أكثر تنتمي للدائرة: $x^2+y^2-4x=4$

عندما يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً لمعدل تغير y بالنسبة للزمن:

الحل

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}}$$

$$x^2+y^2-4x=4$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dx}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$$

$$\frac{dx}{dt}(2x+2y-4)=0$$

$\div 2$

$$2y+2x-4=0$$

$$y+x-2=0$$

$$\boxed{y=2-x}$$

نضع $x=0$

$$y=2-0=2$$

$$(0,2)$$

نضع $x=4$

$$y=2-4=-2$$

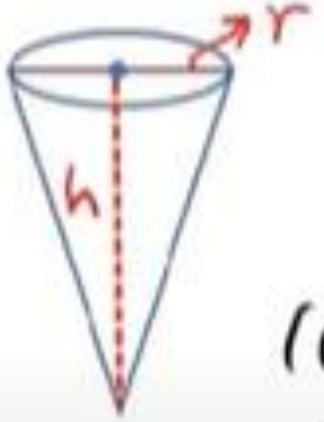
حصة رقم ٦

المعدلات المرتبطة بالزمن

مثال ١) مخروط دائري قائم ذو حجم ثابت. يزداد طول نصف قاعدته بمعدل: 1 cm/s

أوجد: معدل تغير ارتفاع المخروط عندما يصل ارتفاعه إلى 2cm و نصف قطر قاعدته إلى 8 cm.

الحل



$r = 8\,cm/s$ ، $\frac{dh}{dt} = ?$ ، $\frac{dr}{dt} = \boxed{1}\,cm/s$ ، $\frac{dV}{dt} = 0$

$h = 2\,cm/s$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left[2r\frac{dr}{dt}\cdot h + r^2\frac{dh}{dt}\right]$$

$$0 = \frac{1}{3}\pi\left[2(8)(1) + (8)^2\frac{dh}{dt}\right]$$

$$0 = \frac{\pi}{3}\left[16 + 64\frac{dh}{dt}\right]$$

$$16 + 64\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\frac{64}{64}\frac{dh}{dt} = \frac{-16}{64}$$

$$\frac{dh}{dt} = \boxed{-\frac{1}{4}\,cm/s}$$

مثال 2: يتساقط الرمل مكوناً مخروطاً دائرياً قائماً ارتفاعه يساوي $\frac{3}{4}$ نصف قطر قاعدته. فإذا كان معدل انسكاب الرمل $12\ cm^3/s$. أوجد معدل زيادة ارتفاع المخروط عندما يكون ارتفاع المخروط $6\ cm$.

الحل

$\left(\frac{dh}{dt}\right)$ ، $\frac{dV}{dt} = \boxed{12}\ cm^3/s$ ، $h = \frac{3}{4} r$ ، $\boxed{h = 6}$

$\frac{4}{3} h = \left(\frac{4}{3}\right)\frac{3}{4} r$

$$\boxed{r = \frac{4}{3} h}$$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{4h}{3}\right)^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{16}{9}\right) h^3$

$V = \boxed{\frac{16}{27} \pi} h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{27} \pi \left(3h^2 \frac{dh}{dt}\right)$

$12 = \frac{16}{27} \pi (3(6)^2) \frac{dh}{dt}$

$\frac{16}{27}(3)(36)\pi \frac{dh}{dt} = 12$

$\frac{dh}{dt} = \frac{12 \times 27}{48 \times 36\pi}$

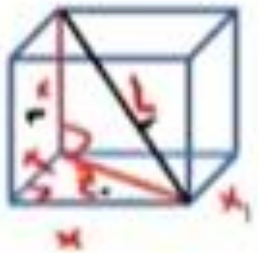
$= \frac{3}{16\pi}\ cm/s$

$= \frac{3}{16\pi}\ cm/s$

المعدلات المرتبطة بالزمن

الحصة رقم 5

مثال ١: مكعب طول حرفه x يتمدد بانتظام. فإذا كان معدل ازدياد طول القطر $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm/s احسب: معدل الزيادة في الحجم عندما يكون $\boxed{x = 3cm}$



الحل

من نظرية فيثاغورث

$$z^2 = x^2 + x^2$$
$$z^2 = 2x^2$$
$$L^2 = x^2 + z^2 = x^2 + 2x^2$$
$$L^2 = 3x^2 \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{3}\,x}$$
$$\frac{dL}{dt} = \sqrt{3}\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1}\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}$$

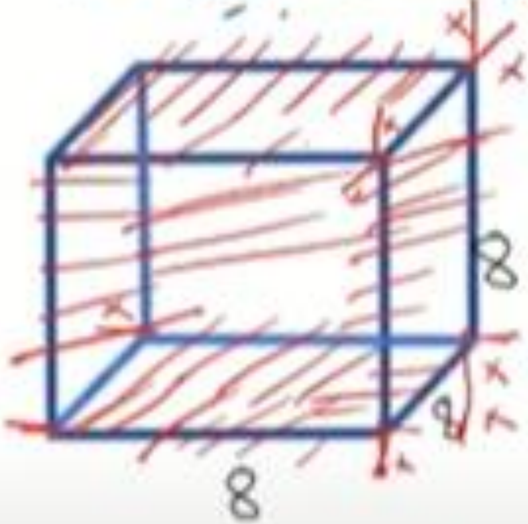
$$\frac{dL}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \Leftarrow \frac{dV}{dt}$$

$$x = 3$$

$$V = x^3$$
$$\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = 3(3)^2\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\frac{dV}{dt} = 18 \text{ cm}^3/\text{s}$$

مثال ٢: مكعب طول ضلعه 8cm مغطى بطبقة من الجليد محافظاً على شكله مكعباً. فإذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6\,cm^3/s$. أوجد:
معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1cm.

الحل



$\boxed{x=1} \Leftarrow \frac{dx}{dt} = ? \quad , \quad \frac{dV}{dt} = -6 \; cm^3/s$

(الأصلي)

$V_1 = 8^3$

$V_2 = (8+2x)^3$

$V = V_2 - V_1$

$= (8+2x)^3 - 8^3$

$\frac{dV}{dt} = 3(8+2x)^2(2)\frac{dx}{dt} - 0$

$-6 = 3(8+2(1))^2(2)\frac{dx}{dt}$

$-6 = 3(100)(2)\frac{dx}{dt}$

$\frac{-6}{600} = \frac{600}{600}\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = -0.01 \; cm/s$

تطبيقات في الاقتصاد

حصة ①

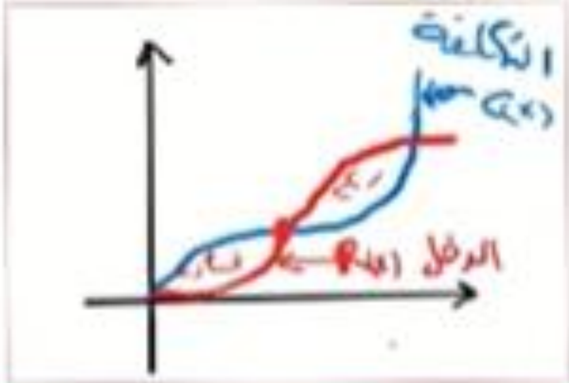
أهم المصطلحات

التكلفة الحدية $C'(x) \rightarrow \boxed{C(x)}$ دالة التكلفة (إنتاج)

الدخل الحدي $R'(x) \rightarrow \boxed{R(x)}$ دالة الإيراد (الدخل)

الربح الحدي $P'(x) \rightarrow \boxed{P(x)}$ دالة الربح (البيع)

دالة الربح $P(x) = R(x) - C(x)$



مثال ١ لتكن التكلفة الإنتاجية لـ x وحدة بالدرهم من منتج معين يعطى بالعلاقة

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 400$$

أوجد:

① التكلفة الحدية عند $x = 100$

$C'(x) = 0.04x + 2 \quad , x = 100$

$C'(100) = 0.04(100) + 2 = \boxed{6}$ درهم

② قارن التكلفة الحدية مع التكلفة الفعلية

$x = 100$

الفعلية $= C(100) - C(99)$

$= [0.02(100)^2 + 2(100) + 400] - [0.02(99)^2 + 2(99) + 400] = \boxed{5.98}$ درهم

الفعلية $= \boxed{5.98}$ ، الحدية $= \boxed{6}$

تقارب

التكلفة الحدية

مثال 2 لتكن $f(p) = 200(30-p)$: هو طلب منتج معين

$f(p) = 6000 - 200p$

$f'(p) = -200$

p (بالدراهم) أوجد:

أ) مرونة الطلب (E) ب) أوجد مدى الأسعار التي تجعل $E < -1$

الحل

مرونة الطلب $(E) = \dfrac{p \cdot f'(p)}{f(p)}$

$= \dfrac{p \cdot (-200)}{200(30-p)}$

$E = \boxed{\dfrac{-p}{30-p}}$

ب: $E < -1 \Leftarrow$

$\dfrac{-p}{30-p} < -1$

$\dfrac{-p}{30-p} + 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{-p + 30 - p}{30-p} < 0$

$\dfrac{-2p+30}{30-p} < 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{30-2p}{p-30} < 0}$

$15 \qquad 30$

$15 < p < 30$

مدى الأسعار

تطبيقات في الاقتصاد

حصة ②

مثال ١: إذا كانت $f(p)=100p(20-p)$: هو طلب منتج معين p بالدرهم

أوجد: ① مرونة الطلب E

② أوجد مدى الأسعار التي تجعل $\boxed{E<-1}$

الحل

① مرونة الطلب $E=\dfrac{p\cdot f'(p)}{f(p)}$

$f(p)=2000p-100p^2$

$f'(p)=2000-200p$

$E=\dfrac{p\cdot(2000-200p)}{100p(20-p)}$

$E=\dfrac{\cancel{100p}(20-2p)}{\cancel{100p}(20-p)}$

$E=\dfrac{20-2p}{20-p}$

② $\because E<-1 \Rightarrow \dfrac{20-2p}{20-p}<-1$

$\dfrac{20-2p}{20-p}+\dfrac{1}{1}<0 \Rightarrow \dfrac{20-2p+20-p}{20-p}<0$

$\dfrac{40-3p}{20-p}<0$

$40-3p=0$

$40=3p$

$p=\dfrac{40}{3}$

$\dfrac{40}{3}<p<20$ مدى الأسعار $\leftarrow E<-1$

مثال 2 إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي:

$C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$

أوجد:

1) التكلفة الحدية لـ 50 منتج

2) قارن بين التكلفة الحدية والفعلية عند $x = 50$

الحل

$\bar{C}(x) = 4x^3 + 28x + 60$

$\bar{C}(50) = 4(50)^3 + 28(50) + 60$

التكلفة الحدية $\bar{C}(x) = 501460$

$C(x) = C(50) - C(49)$

$C(50) = (50)^4 + 14(50)^2 + 60(50) + 35$

$= 6288075$

$C(49) = (49)^4 + 14(49)^2 + 60(49) + 35$

$= 5801390$

التكلفة الفعلية $= C(50) - C(49) = 486685$

التكلفة الحدية والفعلية متقاربتان