الوحدة السادسة

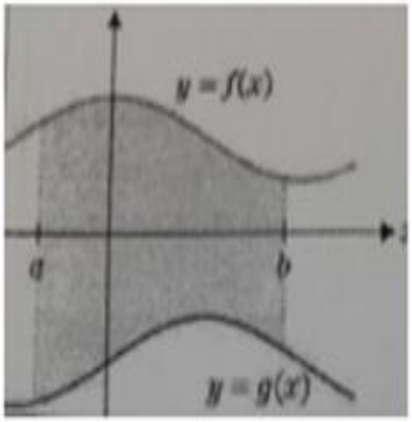
المساحة بين منحنيين (1)

الصف الثاني عشر متقدم

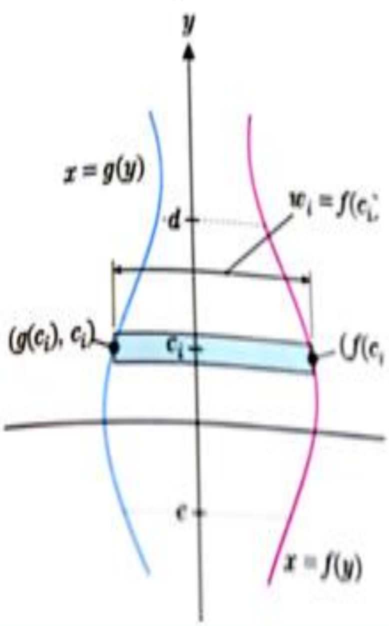
إعداد

د: حيدر عامر السعافين

7-1 المساحة بين منحنيين



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(c_i) - g(c_i)\right]\Delta x = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$



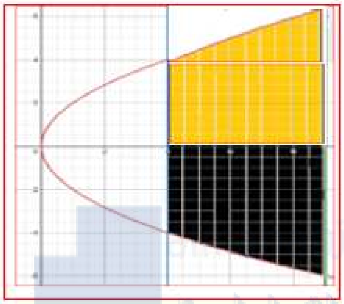
$$\boldsymbol{A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)]\Delta x = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy}$$

الحصة 1

المساحة بين منحنيين (الوحده 6)

احسب المساحة الواقعة فوق وتحت محور (x) والمحدده

والقطع المكافئ $y^2 = 4x$ وبالمستقيمين $x = 9\,, x = 4$



الحل:

نحسب المنطقة فوق محور السينات ثم نضرب في 2

المظللة باللون البرتقالي

$$A = \int_4^9 y\,dx$$

$$y^2 = 4x \rightarrow y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

$$A = 2\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = 2\int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

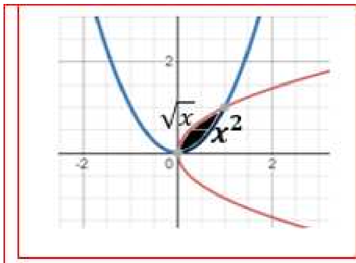
$$A = 2\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = 2\int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$A = 2\left(\frac{2}{3}\right)\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = \frac{4}{3}\left[9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$A = \frac{4}{3}[27 - 8]$$

مساحة الجزء العلوي $A = \frac{4}{3} \times 19 = \frac{76}{3}$

المساحة الكلية $A = \frac{76}{3} \times 2 = \frac{152}{3}$ وحدة مساحة



2)احسب المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين

$$y^2 = x \ , y = x^2$$

الحل:

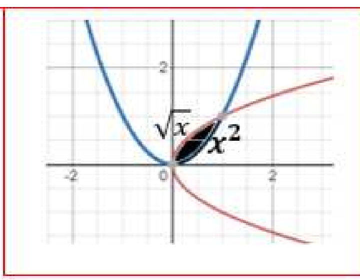
$$y^2 = x \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

لايجاد نقاط التقاطع $y_1 = y_2$

بتربيع الطرفين $y_1 = y_2 \rightarrow x^2 = \sqrt{x}$

$$x^4 = x \rightarrow x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$$



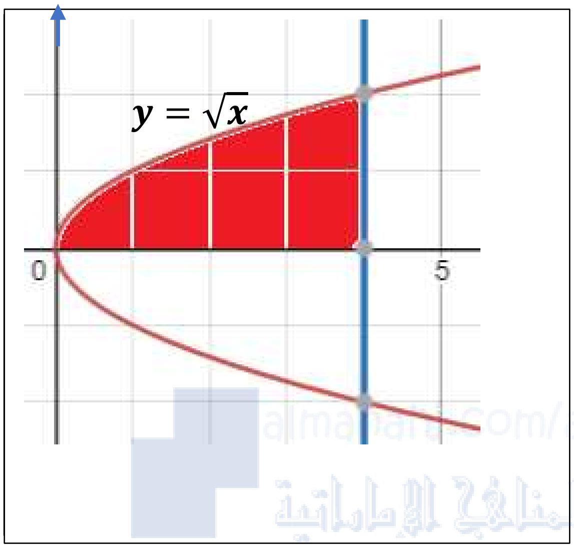
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$A = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx$$

$$A = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}(1) - \frac{1}{3}\right] - (0) = \frac{1}{3}$$ وحدة مساحة

الحصة الثانية (المساحة بين منحنيين)

3)احسب بين المساحة المنحنيين $x = y^2 , x = 4$



الحل:

طريقة اولى:

$$x = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

يمكن حساب المساحة كالتالي :

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right) dx$$

يفضل حساب الجزء العلوي ثم الضرب في 2

$$A = \int_0^4 (\sqrt{x} - 0) dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\ dx$$

المساحة العلوية $A = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 0\right] = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3}$

المساحة الكلية $A = \frac{16}{3} \times 2 = \frac{32}{3}$ وحدة مساحة

طريقة ثانية:

نحسب المساحة بالنسبة إلى :**dy**

نوجد نقاط التقاطع : $x_1 = x_2 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2) dy$$

$$\mathrm{A} = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right)\right]$$

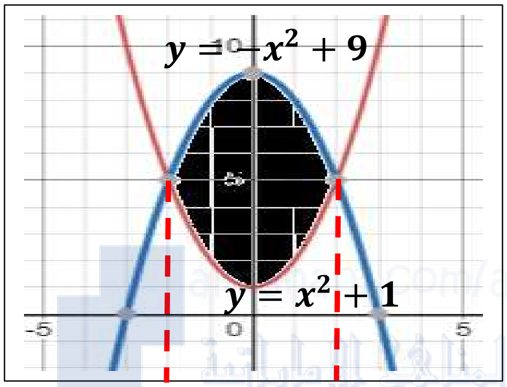
$$\mathrm{A} = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + \left(8 + \frac{-8}{3}\right)\right] = 16 + \frac{-18}{3}$$

<u>الحصة الثالثة</u>

<u>المساحة بين منحنيين</u>

4) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالرسمين البيانيين للدالتين $y = x^2 + 1\,, y = -x^2 + 9$

<u>الحل:</u>



$$\mathbf{A} = \int_{-2}^{2}\left((-x^2 + 9) - (x^2 + 1)\right)dx$$

$$\mathbf{A} = \int_{-2}^{2}(-x^2 + 9 - x^2 - 1)dx$$

$$\mathbf{A} = \int_{-2}^{2}(-2x^2 + 8)dx$$

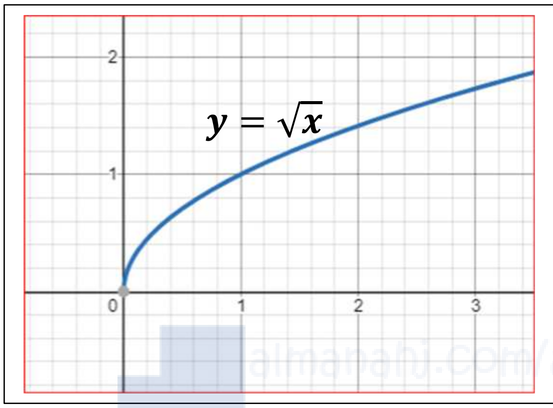
$$\mathbf{A} = \left[\frac{-2x^3}{3} + 8x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{(-2)(2)^3}{3} + 8(2)\right] - \left[\frac{(-2)(-2)^3}{3} + 8(-2)\right]$$

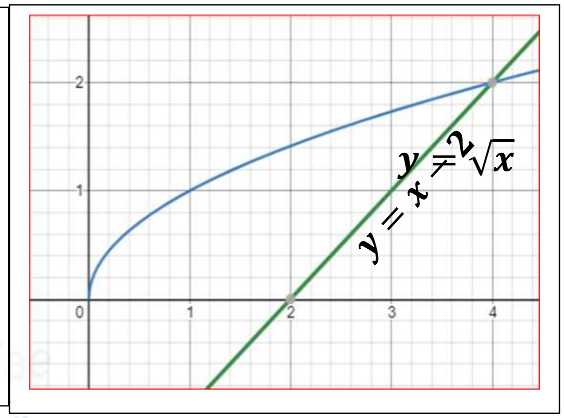
$$A = \left(\frac{-16}{3} + 16\right) - \left(\frac{16}{3} + (-16)\right) = \left(\frac{-16}{3} + 16\right) + \left(\frac{-16}{3} + 16\right)$$

$$\mathbf{A} = \frac{-32}{3} + 32 = \frac{-32 + 96}{3} = \frac{64}{3}$$

4)ظلل المنطقةمساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمنحنى $y = \sqrt{x}$ والمحور السيني

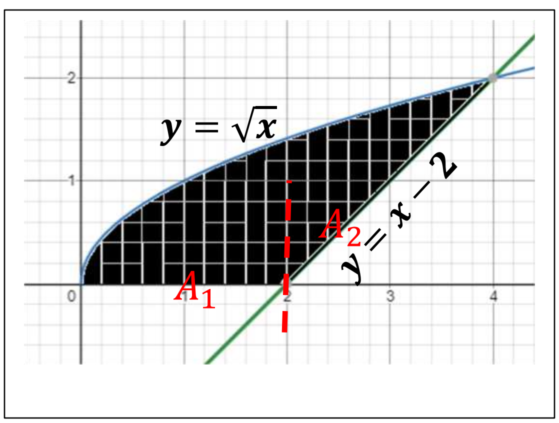
والمستقيم $y = x - 2$ ثم احسب هذه المساحة.





طريقة اولى:

نقسم المنطقة المظلله إلى A_1 و A_2



نحسب مساحة A_1:

$$\boldsymbol{A = \int_0^2 (\sqrt{x} - 0)dx}$$

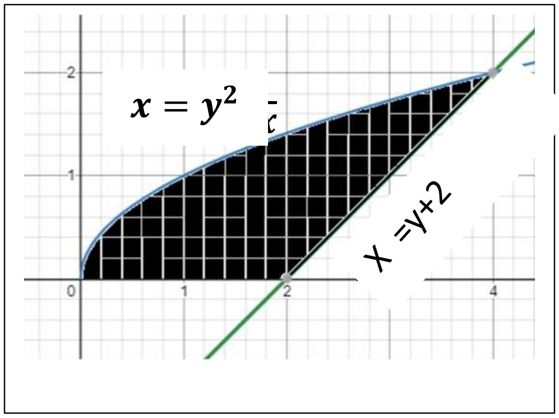
نحسب مساحة A_2

$$\boldsymbol{A = \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2))dx}$$

ثم نجمع : $A_1 + A_2$

__**طريقة ثانية:**__

نوجد المساحة على حدود Y كما يلي:



نضع الدالتين كالتالي $\cdots = x$

بتربيع الطرفين $y = \sqrt{x}$

يكون $x = y^2$ وتكون الدالة الثانية $x = y + 2$

نوجد نقاط التقاطع :

$$x_1 = x_2 \quad \rightarrow \quad y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

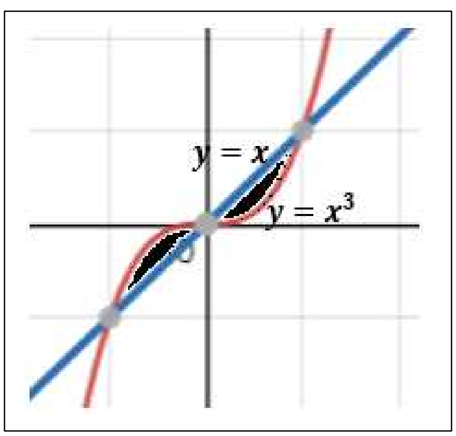
$$(y-2)(y+1) = 0 \quad \rightarrow y = 2, y = -1$$ مرفوض

$$A = \int_0^2 (y + 2 - y^2)dy$$

$$A = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{2^2}{2} + 2(2) - \frac{2^3}{3}\right] - (0)$$

$$A = 2 + 4 - \frac{8}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{18}{3} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

5) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$



__**الحل:**__ **نعمل جدول لرسم الدوال**

نوجد نقاط التقاطع $y_1 = y_2 \quad \rightarrow \quad x = x^3$

$$x = x^3 \rightarrow \quad x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \quad x = 0, x = \pm 1$$

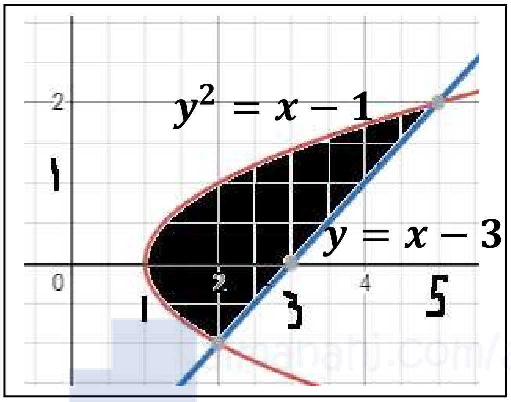
$$A = \int_0^1 (x - x^3)dx$$

المساحة العلوية $\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{x}^2}{2} - \frac{\mathbf{x}^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

المساحة الكلية $A = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ **مساحة وحدة**

المساحة بين منحنيين

حصة (4)



1) بين أن المساحة بين القطع المكافئ $y^2 = x - 1$

والمستقيم $y = x - 3$ هي 4.5 وحدة مربعة .

<u>الحل:</u> لرسم الدالة نفرض نقاط ،لذا ايجاد المجال

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

نوجد نقاط التقاطع $y^2 = x - 1 \rightarrow x = y^2 + 1 \, , x = y + 3$

$$x_1 = x_2 \rightarrow y^2 + 1 = y + 3$$

$$y^2 + 1 - y - 3 = 0 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0 \rightarrow y = -1, y = 2$$

$$A = \int_{-1}^{2} [(y + 3) - (y^2 + 1)]dy = \int_{-1}^{2} [y + 3 - y^2 - 1]dy$$

$$A = \int_{-1}^{2} [y + 2 - y^2]dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$A = \left[\left(\frac{(2)^2}{2} + 2(2) - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1^3)}{3}\right)\right]$$

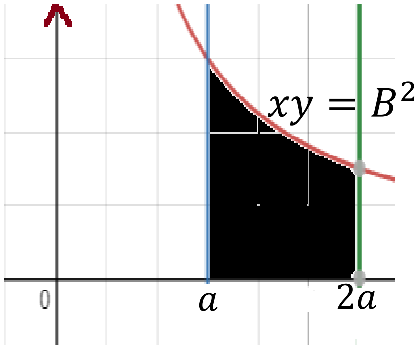
$$A = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$A = \left(\frac{6}{3} + \frac{12}{3} - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{3}{6} - \frac{12}{6} + \frac{2}{6}\right)$$

$$A = \frac{10}{3} - \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{20}{6} + \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{27}{6} = 4.5$$ وحدة مساحة

* بين أن مساحة المنطقة المحددة بالقطع الزائد $xy = B^2$ و محور x

والمستقيمين $x = a$, $x = 2a$ تساوي $B^2 . \ln 2$



الحل:

نرسم المنحنيات

$x = a$, $x = 2a$ $y = \dfrac{B^2}{x}$ ونظلل الجزء المطلوب مساحته

$$A = \int_{a}^{2a} \frac{B^2}{x}\, dx = B^2 \int_{a}^{2a} \frac{1}{x}\, dx$$

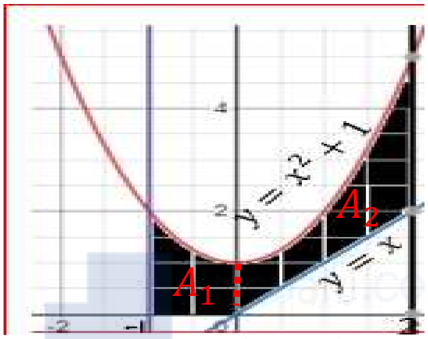
$$A = B^2 [\ln x]_a^{2a} = B^2 (\ln 2a - \ln a)$$

$$A = B^2 . \ln\left(\frac{2a}{a}\right) = B^2 . \ln 2$$

المساحة بين منحنيين (5)

مساحة المنطقة المظللة

تطبيقات التكامل



1)أوجد مساحة المنطقة المظللة

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 + 1 - 0)\, dx$$

$$A_1 = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_{-1}^{0}$$

$$A_1 = 0 - \left(\left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right)\right)$$

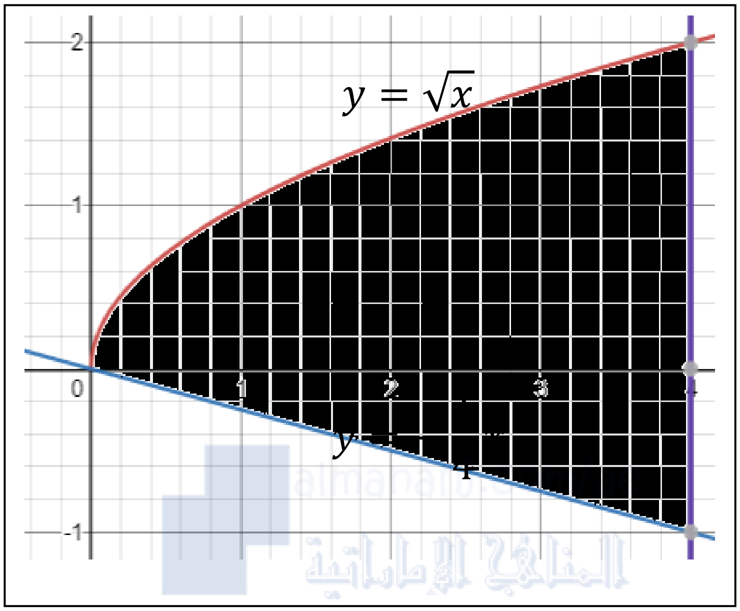
$$A_1 = -\left[\frac{-1}{3} + (-1)\right] = -\left(\frac{-1}{3} + \frac{-3}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^2 + 1 - x)\, dx \quad \rightarrow \quad A_2 = \left(\frac{x^3}{3} + x - \frac{x^2}{2}\right)_{0}^{2}$$

$$A_2 = \left(\frac{8}{3} + (2) - 2\right) - 0 = \frac{8}{3}$$

$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$ وحدة مساحة

2)أوجد مساحة المنطقة المظللة



$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \left(-\frac{1}{4}x\right)\right) dx$$

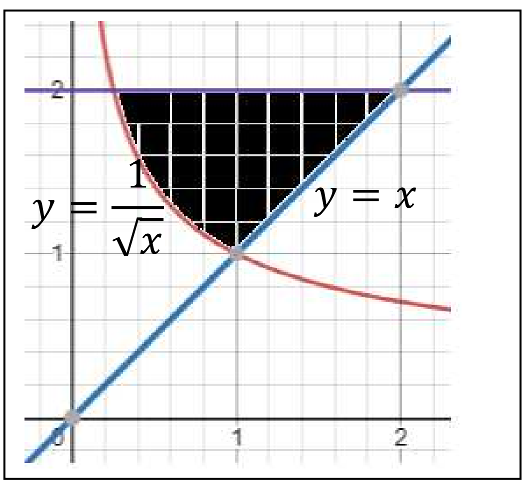
$$A = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\, x\right) dx$$

$$A = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}.\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$A = \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}.\frac{(4)^2}{2}\right]$$

$$A = \left(\frac{16}{3} + 2\right) - 0 = \frac{16}{3} + \frac{6}{3} = \frac{22}{3}$$ وحدة مساحة

3)أوجد مساحة المنطقة المظللة



<u>الحل:</u>

نجعل $x_1 = y$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y^2 = \frac{1}{x} \rightarrow x_2 = \frac{1}{y^2}$

بوضع $x_1 = x_2$ يكون

$$\frac{1}{y^2} = y \rightarrow y^3 = 1 \rightarrow y = 1$$

$$A = \int_1^2 \left(y - \frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$A = \int_{1}^{2} (y - y^{-2})dy$$

$$A = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$A = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right]_1^2 = \left[\left(\frac{2^2}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{1}\right)\right]$$

$A = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 1$ وحدة مساحة

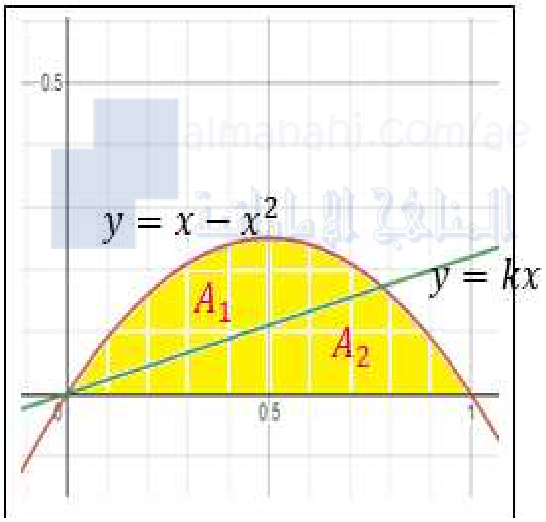
المساحة بين منحنيين (6)

إيجاد الثوابت

من الشكل المجاور اوجد k بحيث $A_1 = A_2$ وأن :

$y = kx \ , y = x - x^2$

الحل



$$A_1 + A_2 = \int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$A_1 + A_2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$A_1 = A_2 \rightarrow A_2 + A_2 = \frac{1}{6}$$

$$2A_2 = \frac{1}{6} \rightarrow A_2 = \frac{1}{6} \div 2 = \frac{1}{12}$$

نوجد نقطة تقاطع المنحنيين $y = kx \ , y = x - x^2$ بجعل $y_1 = y_2$

$$y_1 = y_2 \rightarrow \ x - x^2 = kx$$

$$x^2 - x + kx = 0 \ \rightarrow x(x - 1 + k) = 0$$

$$x = 0 \ , x = 1 - k$$

$$A_2 = \int_0^{K-1} (kx)\, dx + \int_{k-1}^{1} (x - x^2)dx$$

$$\frac{1}{12}=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-k}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{k-1}^{1}$$

$$\frac{1}{12}=k\left[\frac{(1-k)^2}{2}\right]+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{(1-k)^2}{2}-\frac{(1-k)^3}{3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{12}=k\left[\frac{(1-k)^2}{2}\right]+\left[\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)-\left(\frac{(1-k)^2}{2}-\frac{(1-k)^3}{3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=k\left[\frac{(1-k)^2}{2}\right]-\left[\left(\frac{(1-k)^2}{2}-\frac{(1-k)^3}{3}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{12}=\frac{k(1-k)^2}{2}-\frac{(1-k)^2}{2}+\frac{(1-k)^3}{3}$$

$$-\frac{1}{12}=\frac{3k(1-k)^2-3(1-k)^2+2(1-k)^3}{6}$$

$\frac{-6}{12}=(1-k)^2[3k-3+2(1-k)]$ بالضرب التبادلي وبأخذ العامل المشترك

$$\frac{-1}{2}=(1-k)^2[3k-3+2-2k]$$

$$\frac{-1}{2}=(1-k)^2(k-1)$$

$$\frac{-1}{2}=-(1-k)(1-k)^2\rightarrow\frac{1}{2}=(1-k)^3$$

$$1-k=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\rightarrow 1-k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\rightarrow k==1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

الحجوم

المقطعية (التقطيع)

أولاً : مساحة المقطع معلوم $\boldsymbol{A(x)}$

$$V = \int_{a}^{b} A(x)dx$$

ثانياً : مساحة المقطع غير معلوم

($\boldsymbol{1}$) المقطع محدد بدالتين $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$

(أ) مربع طول ضلعه $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S = f(x) - g(x)}$$

$$\boldsymbol{A(x) = S^2}$$

(ب) دائرة نصف قطرها $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r = \frac{f(x) - g(x)}{2}}$$

$$\boldsymbol{A(x) = \pi r^2}$$

(ج) مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{l = f(x) - g(x)}$$

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2}$$

2)المقطع محدد بشكل هندسي منتظم (مثل الهرم)

حصة(1)

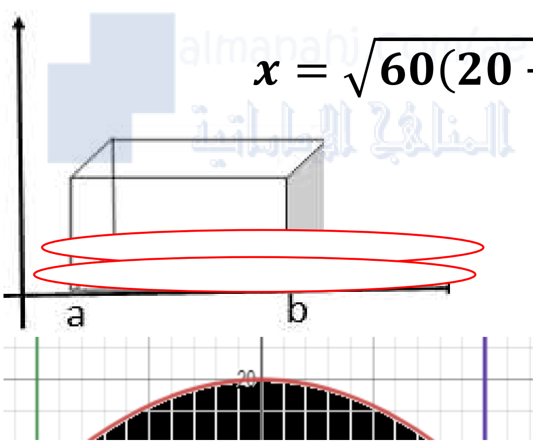
الحجوم بالشرائح (1)

1) يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 20 - \frac{x^2}{60}$ لكل

$-20 \le x \le 20$ (بالأمتار) بمقاطع عرضية دائرية متعامدة

على محور y . أوجد حجمه

$$x = \sqrt{60(20-y)}$$



الحل:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

لأن المقاطع العرضية الدائرية متعامدة على محور y

نجعل الدالة على شكل $x = f(y)$

$$y = 20 - \frac{x^2}{60} \rightarrow \frac{x^2}{60} = 20 - y$$

$$x^2 = 60(20-y) \quad \rightarrow x = \pm\sqrt{60(20-y)}$$

$$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{60(20-y)}\right)^2 = \pi(1200 - 60y)$$

$$V = \int_0^{20} \pi(1200 - 60y)dy$$

$$V = \pi\left[1200y - \frac{60y^2}{2}\right]_0^{20}$$

$$V = \pi[1200(20) - 30(20)^2] - 0$$

$$V = \pi[24000 - 12000] = 12000\pi$$ حجم وحدة

2) يقع المجسم بين $x = 0$, $x = 9$ لمنحنى الدالة

$x = y^2$ أوجد ما يلي :

a) صيغة المساحة $A(x)$

b) اوجد الحجم إذا كانت

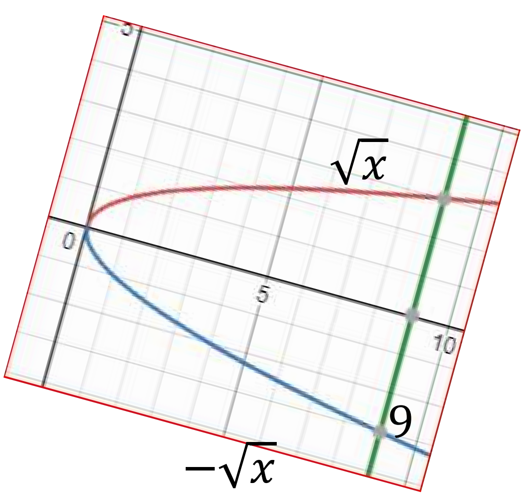
 # المقاطع العرضية على شكل دائرية
متعامدة على محور X

 # المقاطع العرضية هي مربعات قواعدها في المستوي

 # المقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع

<u>الحل:</u>

$$x = y^2 \ \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$$



(طول القطر) $L = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \rightarrow r = \sqrt{x}$

$$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

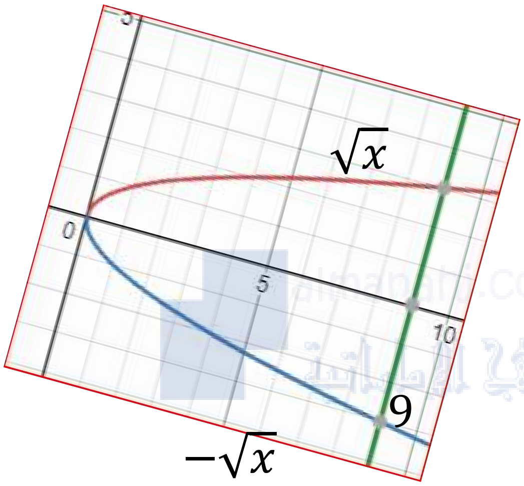
$$V = \int_0^9 A(x)dx = \int_0^9 \pi x \, dx$$

$$V = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9 = \pi\left(\frac{9^2}{2} - 0\right) = \frac{81}{2}\pi$$ وحدة حجوم

2) المقاطع العرضية هي مربعات قواعدها في المستوي x y

<u>الحل:</u>

$$\boldsymbol{x = y^2 \ \rightarrow y = \pm\sqrt{x}}$$



(طول ضلع المربع) $L = \sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}$

$$\boldsymbol{A(x) = L^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2 = 4x}$$

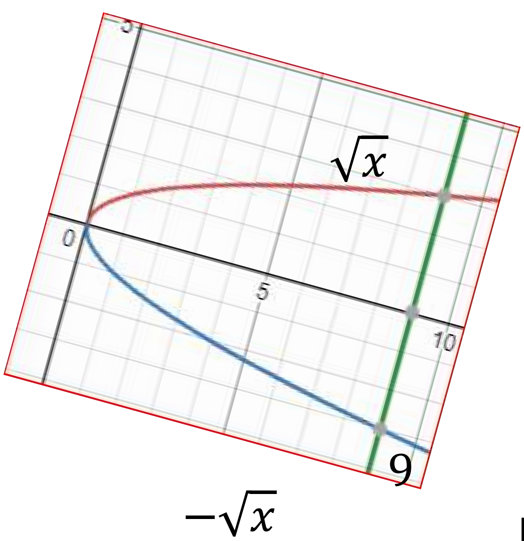
$$\boldsymbol{V = \int_0^9 A(x)dx = \int_0^9 4x\, dx}$$

$$V = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9 = 4\left(\frac{9^2}{2} - 0\right) = \frac{(4)81}{2} = 162$$ وحدة حجوم

3) المقاطع العرضية هي مثلثات متساوي الأضلاع في المستوي x y

<u>الحل:</u>

$$\boldsymbol{x = y^2 \ \rightarrow y = \pm\sqrt{x}}$$



(طول ضلع المثلث) $L = \sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}$

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{1}{2}L^2 sin60^\circ = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}x}$$

$$\boldsymbol{V = \int_0^9 A(x)dx = \int_0^9 \sqrt{3}x\, dx}$$

$$\boldsymbol{V = \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9 = \sqrt{3}\left(\frac{9^2}{2} - 0\right) = \frac{(\sqrt{3})81}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}}$$ وحدة حجوم

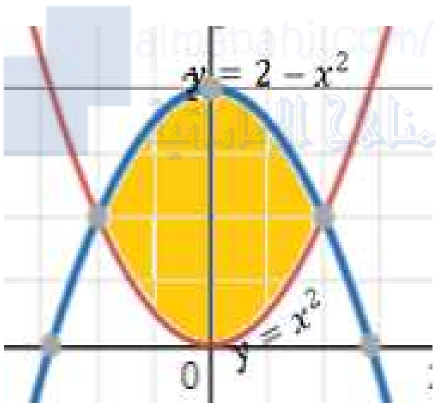
<u>حصة (2) حساب الحجوم بالشرائح</u>

1) قاعدة المجسم هي المنطقة المحددة بواسطة $y = 2 - x^2 \, , y = x^2$

أوجد الحجم : أ) إذا كانت المقاطع العرضية على شكل نصف دائرة

ب)إذا كانت المقاطع العرضية على شكل مثلثات متساوية الأضلاع

وكلاهما متعامد على محور X



<u>الحل:</u>

$\boldsymbol{L = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2}$ (القطر)

نقاط التقاطع $\boldsymbol{2 - x^2 = x^2 \rightarrow y_1 = y_2}$

$\boldsymbol{2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1}$

$\boldsymbol{x = 1, x = -1}$

<u>في حالة نصف دائرة:</u>

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\pi r^2}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{L}{2} = \frac{2 - 2x^2}{2} = 1 - x^2}$$

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{1}{2}\pi(1 - x^2)^2 = \frac{1}{2}\pi(1 - 2x^2 + x^4)}$$

$$\boldsymbol{V = \int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\pi\,(1 - 2x^2 + x^4)dx}$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{15}$$ وحدة حجم

في حالة مثلث متساوي الأضلاع : (2)

الحل:

$L = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2$ (طول ضلع المثلث)

$$A(x) = \frac{1}{2} a.b \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(2-2x^2)^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 8x^2 + 4x^4)$$

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 8x^2 + 4x^4)dx$$

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - 2x^2 + x^4)dx$$

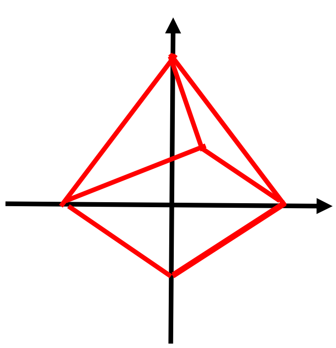
$$V = \sqrt{3}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{16\sqrt{3}}{15}$$ وحدة حجم

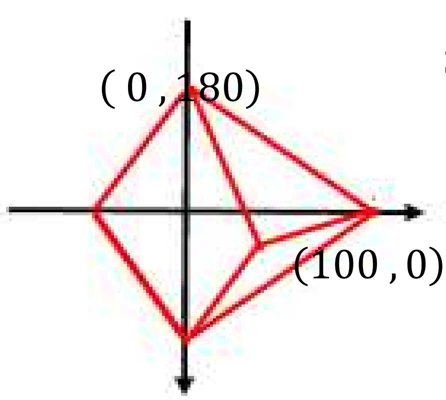
حساب حجم الهرم (الشرائح) حصة (3)

3)يبلغ ارتفاع أحد أهرامات مصر في الجيزة 100 متر

وقاعدة مربعة طول ضلعها 180 م

اوجد حجم الهرم باستخدام التكامل





الحل:

نوجد الدالة :نوجد الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{0 - 180}{100 - 0} = \frac{-180}{100} = \frac{-9}{5}$$

نوجد المعادلة:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-9}{5}(x - 100)$$

$$y = \frac{-9}{5}x + 180$$

الشرائح على شكل مربع

مساحة الشريحة على شكل مربع :

$$A(x) = y^2 = \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2$$

$$V = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

$$V = \frac{-5}{9}\int_0^{100} \frac{-9}{5}.\left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

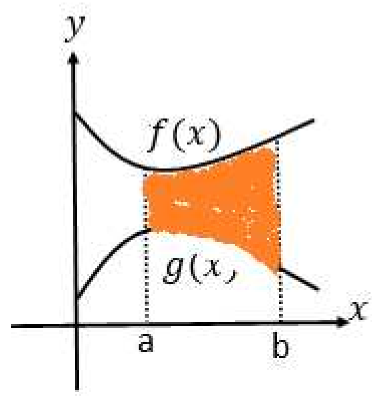
يحل التكامل بعدة طرق : التعويض او المباشر

$$V=\frac{-5}{9}\left[.\frac{\left(\frac{-9}{5}x+180\right)^3}{3}\right]_0^{100}$$

$$V=\frac{-5}{27}\left[\left(\frac{-9}{5}(100)+180\right)^3-\left((0+180)\right)\right]$$

$$V=\frac{-5}{27}[(0-180)^3]=\frac{-5}{27}\times(180)^3=1080000\,m^3$$

الحجوم الدورانية (الاقراص والحلقات)(1)



$f(x)$

dx (المكامل)

الشريحة عمودية على محور الدوران

(أقراص وحلقات)

1)إذا كان الدوران حول محور أفقي

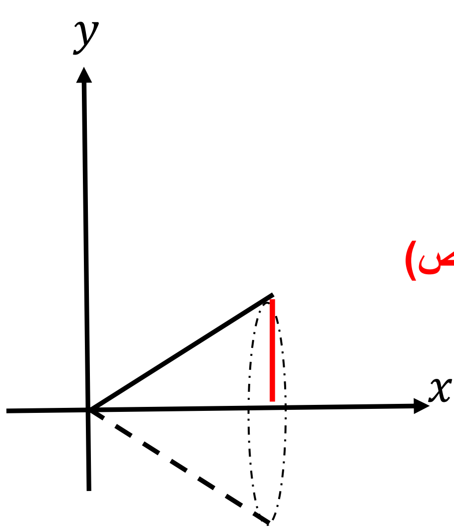
إذا كانت المنطقة التي تدور ملاصقة لمحور الدوران(قرص)

نوجد نصف القطر

$$\boldsymbol{r = f(x) - g(x)}$$

2)إذا كانت المنطقة التي تدور يوجد فراغ تكون (حلقة)

تكون



$$\boldsymbol{V = \int_a^b \pi R^2 dx - \int_a^b \pi r^2 dx}$$

محور الدوران – الدالة العليا = $\boldsymbol{R}$ (نصف القطر الكبير)

محور الدوران – الدالة السفلى = $\boldsymbol{R}$ (نصف القطر الصغير)

ثانياً : الحجوم الدورانية : الاقراص (الحلقات) والاصداف

الحجوم الدورانية

- الاقراص (الحلقات) (الشريحة – الارتفاع – عمودية على محور الدوران)
- الاصداف (الشريحة – الارتفاع – توازي محور الدوران)

ملاحظة: عندما يكون حجم المجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R المحصورة بدالة مع احد المحاور فاننا نستخدم الاقراص اما اذا كانت المساحة محصورة بدالتين فاننا نستخدم الحلقات .

الأقراص: الشريحة – الارتفاع – عمودي على محور الدوران

1)إذا كان الدوران حول محور السينات فإن سمك القرص الدائري سيكون المكامل dx

2)إذا كان الدوران حول محور الصادات فإن سمك القرص الدائري سيكون المكامل dy

الحالة الاولى: إذا كان الدوران حول محور السينات (x)

إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة $\boldsymbol{R}$ المحصورة بالمنحنى $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ ومحور السينات والمستقيمين $\boldsymbol{x = a\,, x = b}$ دورة كاملة حول محور السينات يعطى بالتكامل

$$\boldsymbol{V = \int_a^b A\,dx = \int_a^b \pi r^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

مساحة القرص الدائري

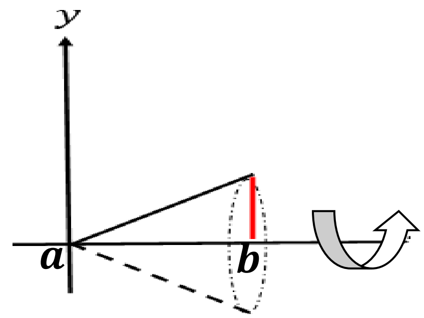
$$A = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

سمك القرص الدائري dx

طريقة اخرى للشرح

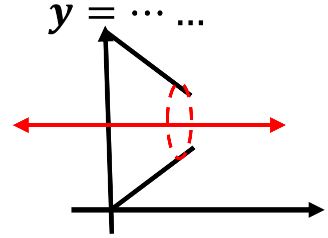
الحجوم الدورانية

الدوران حول محور أفقي

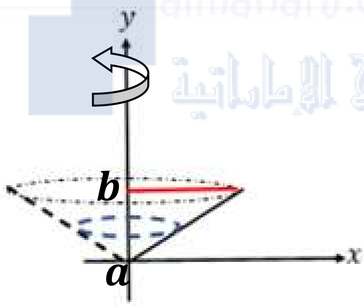


$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi r^2 dx$$

$y = \cdots ...$

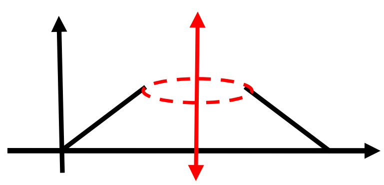


الدوران حول محور رأسي



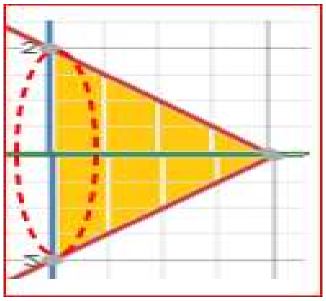
$$V = \int_{y=a}^{y=b} \pi r^2 dy$$

$x = \cdots ...$



1)احسب حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بواسطة :

$x = 0 , y = 0 , y = 2 - x$ حول :



a) حول المحور X

الحل:

نوجد نقاط التقاطع $y_1 = y_2 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow x = 2$

محور الدوران – منحنى الدالة = r

$$r = 2 - x - (0) = 2 - x$$

$$V = \int_0^2 \pi r^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx = -\pi \int_0^2 [-(2-x)^2] dx =$$

$$V = -\pi \left[\frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2$$

$$V = -\pi \left[\frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(2-0)^3}{3}\right]$$

$$V = -\pi \left[0 - \frac{8}{3}\right] = \frac{8\pi}{3} u^3$$

الحجوم الدورانية (الاقراص والحلقات)

حصة (2)

1) احسب حجم المنطقة المحددة بواسطة $y = 0 \, , y = x^2$

و $x = 1$ وذلك بالدوران حول

1) حول المحور Y

الحل:

(الدوران رأسي) في هذه الحالة نجعل الدالة بشكل .... $x = \cdots$

فراغ

$$y = x^2 \;\rightarrow x = \sqrt{y}$$

حلقة

$$V = \int_0^1 \pi R^2 \, dy - \int_0^1 \pi r^2 \, dy$$

محور الدوران – المنحنى البعيد= R

$$R = 1 - 0 = 1$$

محور الدوران – المنحنى القريب= r

$$r = \sqrt{y} - 0 = \sqrt{y}$$

$$V = \int_{0}^{1} \pi(1)^2 \, dy - \int_{0}^{1} \pi(\sqrt{y})^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} 1 \, dy - \pi \int_{0}^{1} y \, dy$$

$$V = \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left[1 - \frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{2} \; u^3$$

2) احسب حجم المنطقة المحددة بواسطة $y = 0 \, , y = x^2$

و $x = 1$ وذلك بالدوران حول

حول المحور ***x=1***

<u>الحل:</u>

لا يوجد فراغ (<u>قرص</u>)

الدوران رأسي $dy \quad x = \cdots$

$$y = x^2 \;\to x = \sqrt{y}$$

$$V = \int_{0}^{1} \pi r^2 dy$$

$$r = 1 - \sqrt{y}$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} \left(1 - 2\sqrt{y} + y\right) dy = \frac{\pi}{6}\ u^3$$

3) احسب حجم المنطقة المحددة بواسطة $y = x^2 , y = 0$

و $x = 1$ وذلك بالدوران حول

حول المحور *y=1*

<u>الحل:</u>

(الدوران أفقي) في هذه الحالة نجعل الدالة بشكل .... $y = \cdots$

الحدود على x

$$y = x^2$$

<u>حلقة</u>

$$V = \int_{0}^{1} \pi R^2\ dx - \int_{0}^{1} \pi r^2\ dx$$

محور الدوران – المنحنى البعيد= R

$$R = 1 - 0 = 1$$

محور الدوران – المنحنى القريب= r

$$r = 1 - x^2$$

$$V = \int_{0}^{1} \pi (1)^2\ dx - \int_{0}^{1} \pi (1 - x^2)^2\ dx$$

$$V = \int_0^1 \pi\, dx - \int_0^1 \pi(1 - 2x^2 + x^4)\, dx$$

$$V = \int_0^1 \pi[1 - (1 - 2x^2 + x^4]dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (2x^2 - x^4)dx = \frac{7\pi}{15}\, u^3$$

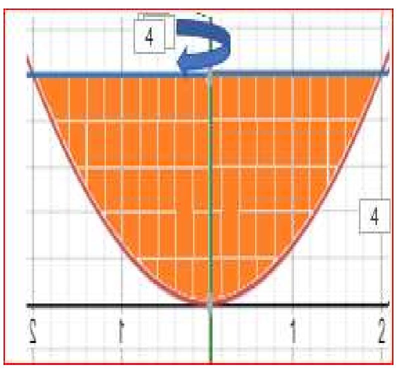
الحجوم الدورانية (الأقراص والحلقات)(3)

<u>حصة (3)</u>

1) لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين

$y = \frac{1}{4}x^2 \,,\, y = 1 \,,\, x = 0$ احسب حجم المجسم الذي تكون :

من دوران المنطقة R محور y



<u>الحل:</u>

(الدوران رأسي) في هذه الحالة نجعل الدالة بشكل .... $x = \cdots$

(قرص)

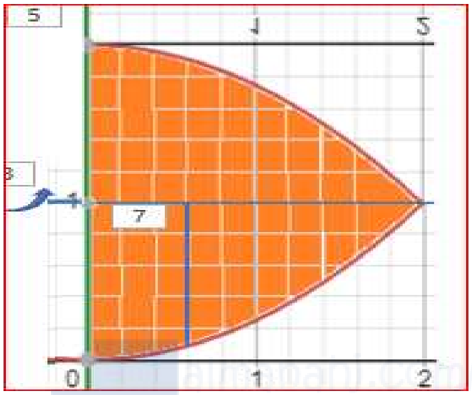
$$y = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow x^2 = 4y \rightarrow x = \pm\sqrt{4y} \rightarrow r = \sqrt{4y}$$

$$r: \left(x = \sqrt{4y}\right) - (x = 0)$$
$$r = \sqrt{4y} - 0 = \sqrt{4y}$$

حدود التكامل من محور $\mathbf{y}$

$$V = \int_0^1 \pi r^2 dy = \int_0^1 \pi(\sqrt{4y})^2 dy = \pi \int_0^1 4y dy$$

$$V = 4\pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 4\pi \left[\frac{1}{2} - 0\right] = 2\pi\ u^3$$



2) لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين

$y = \frac{1}{4}x^2 , y = 1 , x = 0$ احسب حجم المجسم الذي تكون

من دوران المنطقة R محور $y = 1$ (أفقي)

الحل:

(الدوران أفقي) في هذه الحالة نجعل الدالة بشكل .... ⋯ = y

حدود التكامل من محور x

$$y_1 = y_2 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1$$

$x^2 = 4 \rightarrow x = 2 , x = -2$ مرفوض

(قرص)

$$V = \int_0^2 \pi\, r^2 dx = \int_0^2 \pi \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$r: (y = 1) - \left(y = \frac{1}{4}x^2\right)$$

$$r = 1 - \frac{1}{4}x^2$$

$$V = \int_0^2 \pi \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4\right) dx$$

$$V = \pi \left[x - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{16}.\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

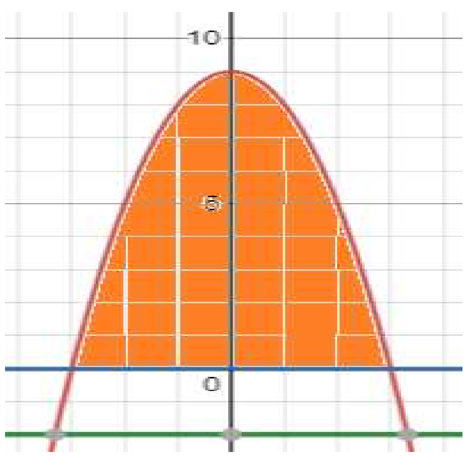
$$V = \pi \left[2 - \frac{2^3}{6} + \frac{2^5}{80} - (0)\right] = \frac{5}{3}\pi\ u^3$$

الحجوم بالحلقات
حصة (4)

1)لتكن $\boldsymbol{R}$ هي المنطقة المحدودة بواسطة $\boldsymbol{y = 9 - x^2}$, $\boldsymbol{y = 0}$
أوجد حجم المجسمات الناتج الحصول عليها من دوران $\boldsymbol{R}$ حول :
$\boldsymbol{a}$) المستقيم $\boldsymbol{y = -2}$

الحل:

الدوران أفقي ... $\boldsymbol{y = \cdots}$
حدود التكامل من محور $\boldsymbol{x}$
نقاط التقاطع $\boldsymbol{y_1 = y_2 \;\to\; 9 - x^2 = 9 - x^2 = 0}$
$\boldsymbol{x^2 = 9 \;\to x = \pm 3}$



يوجد فراغ عند الدوران هنا يسمى (حلقة)

$$\boldsymbol{V = \int_{-3}^{3} \pi R^2 dy - \int_{-3}^{3} \pi r^2 dy}$$

$$\boldsymbol{R = 9 - x^2 - (-2)}$$

$$\boldsymbol{R = 9 - x^2 + (+2)}$$

$$\boldsymbol{R = 11 - x^2}$$

$$\boldsymbol{r = 0 - (-2) = 2}$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (R^2 - r^2)dy$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} [(11 - x^2)^2 - (2)^2]dy$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (121 - 22x^2 + x^4 - 4)dy$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (117 - 22x^2 + x^4)dy$$

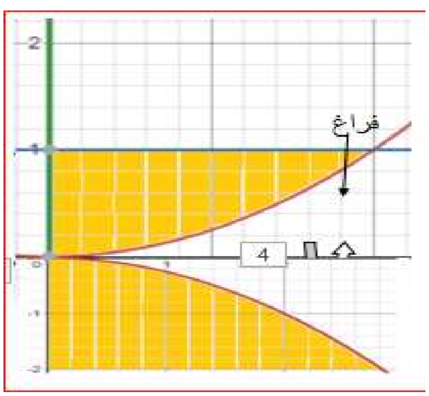
$$V = \pi \left[117x - \frac{22x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3} = \frac{2016}{5}\pi\, u^3$$

2)لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين

هي المنطقة المحدودة بواسطة $x = 0\ , y = 1, x^2 = 4y$

احسب حجم المجسم الذي تكون من دوران R حول :

a) محور x



الحل:

الدوران أفقي . $y = \cdots$

$$x^2 = 4y \ \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

نوجد نقاط التقاطع $y_1 = y_2 \ \rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1$

$$\frac{1}{4}x^2 = 1 \rightarrow \ x^2 = 4 \ \rightarrow x = \pm 2$$

يوجد فراغ فتكون حلقة

$$R = 1 - 0 = 1$$

$$r = \frac{1}{4}x^2 - 0 = \frac{1}{4}x^2$$

$$V = \int_0^2 \pi R^2 dy - \int_0^2 \pi r^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (R^2 - r^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[(1)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[1 - \frac{1}{16}x^4\right] dx$$

$$V = \pi \left[x - \frac{1}{16} . \frac{x^5}{5}\right]_0^2 - 0 = \pi \left[2 - \frac{1}{16} . \frac{(32)}{5}\right] = \frac{8}{5}\pi\, u^3$$

2)لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين

هي المنطقة المحدودة بواسطة $x = 0\, , y = 1, x^2 = 4y$

احسب حجم المجسم الذي تكون من دوران R حول :

b) المستقيم $y = 3$

<u>الحل:</u>

الدوران أفقي $y = \cdots \ldots$

$$x^2 = 4y \ \rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

نوجد نقاط التقاطع $y_1 = y_2 \ \rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1$

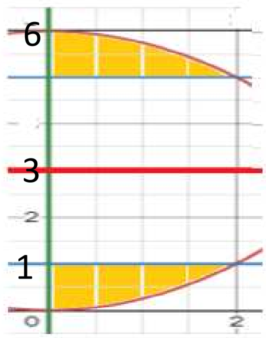
$$\frac{1}{4}x^2 = 1 \rightarrow \ x^2 = 4 \ \rightarrow x = \pm 2$$

يوجد فراغ فتكون حلقة

$$R = 3 - \frac{1}{4}x^2$$

$$r = 3 - 1 = 2$$

$$V = \int_0^2 \pi R^2 dy - \int_0^2 \pi r^2 dx$$



$$= \pi \int_0^2 (R^2 - r^2)\,dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(3 - \frac{1}{4}x^2\right)^2 - (2)^2\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[9 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4 - 4\right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[5 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4\right] dx$$

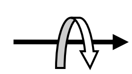
$$V = \pi \left[5x - \frac{3}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{16}.\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi\, u^3$$

الأحجام بالأصداف الإسطوانية

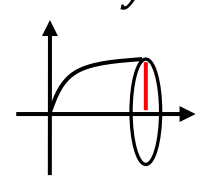
الدوران حول محور أفقي

الدوران حول محور رأسي

حول محور x

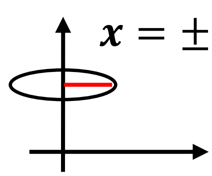


$y = \pm a$



حول محور y

$x = \pm a$



نجعل $x = \cdots ...$

*نرسم الصدفة بحيث توازي محور الدوران

* التكامل بدلالة y : $\int_{y=a}^{y=b} 2\pi r h dy$

$$V = \int_{y=a}^{y=b} 2\pi r h \ dy$$

نجعل $y = \cdots ...$

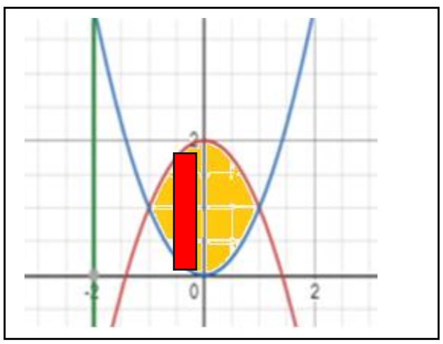
*نرسم الصدفة بحيث توازي محور الدوران

* التكامل بدلالة x : $\int_{x=a}^{x=b} 2\pi r h dx$

$$V = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi r h \ dx$$

1) يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 , y = 2 - x^2$

حول $x = -2$



<u>الحل:</u>

الدوران رأسي

Y=.......

نقاط التقاطع $y_1 = y_2 \rightarrow x^2 = 2 - x^2$

$2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

الصدفة توازي محور الدوران Y

$r = 2 + x$

$h =$ الدالة العليا – الدالة السفلى

$h = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2$

$$V = \int_{-1}^{1} 2\pi r h . dx = 2\pi \int_{-1}^{1} (2 + x)(2 - 2x^2) . dx$$

<u>طريقة إيجاد r:</u>

$r = a \pm x$

إذا كان $x = 2$ فإن $r = 2 + x$

إذا كان $x = -2$ فإن $r = 2 - x$

$r = a \pm y$

إذا كان $y = 2$ فإن $r = 2 + y$

إذا كان $y = -2$ فإن $r = 2 - y$

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2 + 2x - 2x^3).dx$$

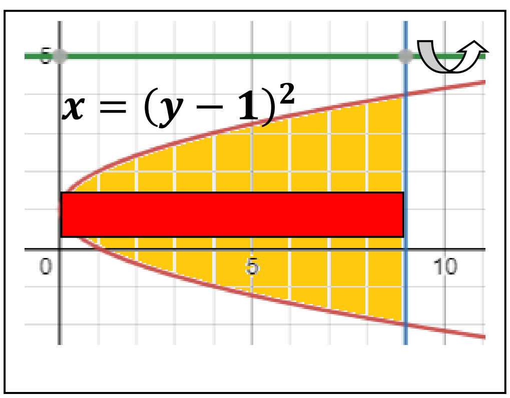
$$V = \left[4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{3}\pi$$ وحدة حجوم

2) يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y-1)^2$

و $x = 9$ حول $y = 5$

<u>الحل:</u>

الدوران أفقي



نوجد نقاط التقاطع $x_1 = x_2 \rightarrow (y-1)^2 = 9$

$y - 1 = \pm 3 \rightarrow y = \pm 3 + 1$

$y = 4 , y = -2$

الصدفة موازية لمحور x نرسم صدفة

نوجد الارتفاع ونصف القطر

$r = 5 - y$

$h =$ الدالة اليمين − الدالة اليسار

$h = 9 - (y-1)^2$

$$V = \int_{-2}^{4} 2\pi r h \, dy = V = \int_{-2}^{4} 2\pi(5-y)(9-(y-1)^2)\, dy$$

$$V = 288\pi \, u^3$$

الحجوم بالأصداف الإسطوانية (2)

1)باستخدام الأصداف الإسطوانية اوجد حجم الدوراني

للدالة $y = 4 - x^2$ ومحور x حول $x = 3$

2)استخدام الأصداف الإسطوانية لحساب حجم المنطقة المحددة

بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$ حول $y = -2$

3)استخدام الأصداف الإسطوانية لحساب الحجم للمنطقة

$y = sin(x^2)$ على $[0, \sqrt{\pi}]$

س) إستخدم الأصداف الأسطوانية لإيجاد الحجم للمنطقة $y = \sin(x^2)$ على $[0, \sqrt{\pi}]$. بالدوران حول محور ص .

س) بالأصداف الأسطوانية . أحسب حجم المنطقة المحددة $y = -x^2 +$ ، $y = 0$ بالدوران حول محور ص.