

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية



الملف مراجعة درس تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية مع الحل

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر المتقدم ← رياضيات ← الفصل الثالث

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

[الرياضيات](#)

[اللغة الانجليزية](#)

[اللغة العربية](#)

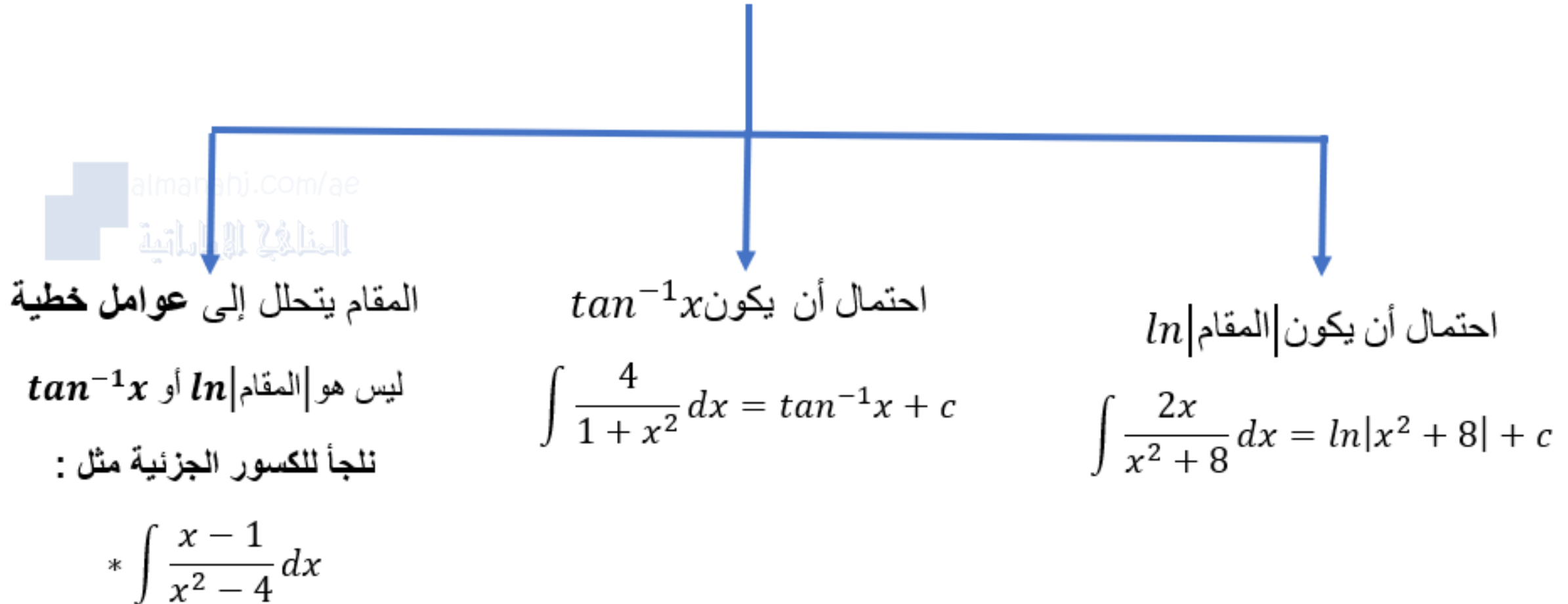
[التربية الاسلامية](#)

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

<a href="#">الدرس الأول المشتقات العكسية والتكامل غير المحدود.</a>	1
<a href="#">ملخص وأوراق عمل الوحدة السابعة: التكامل وتطبيقاته</a>	2
<a href="#">إختبار تدريبي في التكامل</a>	3
<a href="#">مقررات الفصل الثالث</a>	4
<a href="#">نموذج تحريبي 2</a>	5

# تكامل الدوال التسيبية باستخدام الكسور الجزئية

## الحالة الأولى: درجة البسط أصغر من درجة المقام



$$* \int \frac{x - 1}{x^2 - 4} dx$$

$$\frac{x - 1}{x^2 - 4} = \frac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

$$\frac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$x - 1 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

لإيجاد الثوابت نفرض أصفار المقام:

$$x = 2 \rightarrow 1 = A(2 + 2) + 0 \rightarrow 1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x = -2 \rightarrow -3 = A(-2 + 2) + B(-2 - 2) \rightarrow -3 = -4A \rightarrow B = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x+2} dx$$

 [almanahj.com/ae](http://almanahj.com/ae)  
المنهج الإلكتروني

$$= \frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{3}{4} \ln|x+2| + c$$

## الحصة 2

تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

$$* \int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$\frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)A}{(x + 1)(x + 1)} + \frac{B}{(x + 1)^2}$$

$$\frac{2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1) + B}{(x + 1)^2}$$

$$2x + 3 = A(x + 1) + B$$

إيجاد الثوابت بفرض أصفار المقام:

almanahj.com/ae

$$x = -1 \rightarrow 2(-1) + 3 = A(-1 + 1) + B \rightarrow B = 1$$

لا توجد أصفار أخرى نختار أي قيمة ولتكن :  $x = 0$

$$x = 0 \rightarrow 3 = A(1) + \overset{\uparrow B}{1} \rightarrow A = 2$$

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = 2 \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{(x + 1)^2} \int dx$$

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = 2 \int \frac{1}{x + 1} dx + \int (x + 1)^{-2} dx$$

almanahj.com/ae  
المنهجية

$$= 2 \ln|x + 1| + \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= 2 \ln|x + 1| - \frac{1}{x + 1} + c$$



### حصة 3


ثانياً: إذا كانت درجة البسط أكبر من او تساوي درجة المقام:

$$1) \int \frac{2x^3 + 3x + 1}{x^2 + 1} dx$$

المقسوم عليه  $\frac{\text{الباقى}}{\text{الناتج}} = \int$  بالقسمة المطولة




$$2) \int \frac{3x^4 - 3x^2 - x}{x^2 - 1} dx$$


[almanahj.com/ae](http://almanahj.com/ae)  
 المنهج الإلكتروني

$$= \int 3x^2 dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

$$\begin{array}{r}
 \phantom{3x^2} \\
 \hline
 x^2 - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^4 + \dots - 3x^2 - x \\ \hline + 3x^4 + \dots - 3x^2 \\ \hline 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad -x \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

 [almanahj.com/ae](http://almanahj.com/ae)  
المنهج التعليمية

$$= x^3 - \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + c$$

## حصة 4

$$1) \int \frac{5x + 3}{x^3 - 9x} dx$$

ننظر للمقام إذا يحلل أو لا  
فإذا كان قابل للتحويل نلجأ للكسور

$$\frac{5x + 3}{x^3 - 9x} = \frac{5x + 3}{x(x^2 - 9)} = \frac{5x + 3}{x(x - 3)(x + 3)}$$

$$\frac{5x + 3}{x(x - 3)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 3}$$

Handwritten annotations in red show the cancellation of factors:  $(x-3)$  from the denominator of the first term,  $(x+3)$  from the denominator of the second term, and  $(x-3)$  from the denominator of the third term.

$$\frac{5x + 3}{x(x - 3)(x + 3)} = \frac{A(x - 3)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 3)}{x(x - 3)(x + 3)}$$

$$5x + 3 = A(x - 3)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 3)$$

## إيجاد الثوابت بفرض أصفار المقام:

$$x = 0 \rightarrow 3 = A(0 - 3)(0 + 3) + 0 + 0 \rightarrow -9A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$x = 3 \rightarrow 5(3) + 3 = 0 + B(3)(3 + 3) + 0 \rightarrow 18 = 18B \rightarrow B = 1$$

$$x = -3 \rightarrow 5(-3) + 3 = 0 + 0 + C(-3)(-3 - 3) \rightarrow -12 = C(-18) \rightarrow C = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{5x + 3}{x^3 - 9x} dx = \frac{-1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x - 3} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 3} dx$$



$$= \frac{-1}{3} \ln|x| + \ln|x - 3| - \frac{2}{3} \ln|x + 3| + c$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

(2) استخدم التعويض ثم الكسور الجزئية لإيجاد :

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{2u du}{e^x} = \int \frac{2 du}{e^x}$$

$$= \int \frac{2}{u^2 - 1} du$$

$$\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$u = \sqrt{e^x + 1}$$

$$u^2 = e^x + 1$$

$$2u du = e^x dx$$

$$dx = \frac{2u du}{e^x}$$

$$u^2 = e^x + 1$$

$$u^2 - 1 = e^x$$

$$\frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{A(u+1) + B(u-1)}{(u-1)(u+1)}$$



$$2 = A(u+1) + B(u-1)$$

لإيجاد الثوابت نفرض أصفار المقام:

$$u = 1 \rightarrow 2 = A(1 + 1) + B(1 - 1) \rightarrow 2A = 2 \rightarrow A = 1$$

$$u = -1 \rightarrow 2 = A(-1 + 1) + B(-1 - 1) \rightarrow -2B = 2 \rightarrow B = -1$$

$$= \int \frac{2}{u^2 - 1} du = \int \frac{1}{u - 1} du - \int \frac{1}{u + 1} du$$

$$= \ln|u - 1| - \ln|u + 1| + c$$



$$= \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + c$$