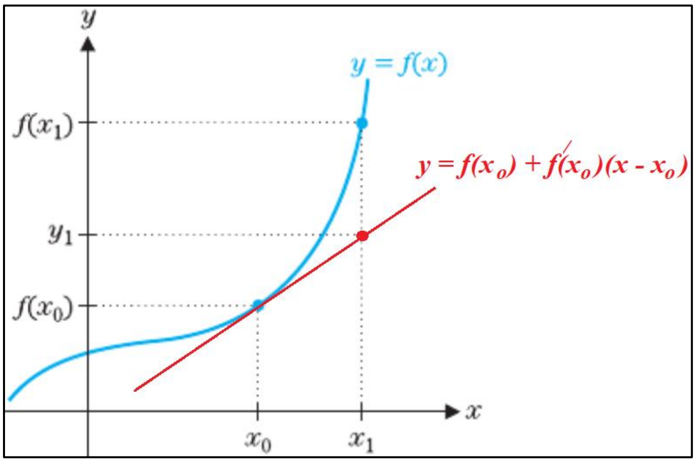
أولًا: التقريبات الخطية

التقريب الخطي للدالة f(x) عند x_0 هو معادلة المماس عند x_0

التعريف 1.1

التقريب الخطي (أو **المماس**) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو الدالة

$$\boxed{L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



حيث:

x : هو العدد <u>المطلوب</u> عنده قيمة الدالة f <u>تقريبًا</u>

x_o : هو العدد <u>المعلوم</u> عنده قيمة الدالة f <u>بدقة</u>

تمارين ص 236: جد التقريب الخطي للدالة f(x) عند $x = x_o$

استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المطلوب.

1. $f(x) = \sqrt{x} \quad , x_o = 1 \quad , \sqrt{1.2}$

<u>ملخص المعلومات:</u>

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x_o = 1$

<u>استكشاف العدد x:</u>

$\sqrt{x} = \sqrt{1.2}$

$x = 1.2$

$f(x_o) = f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x_o) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

<u>أولًا: التقريب الخطي للدالة:</u>

$L(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

$L(x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$

$L(x) \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

<u>ثانيًا: تقدير العدد المطلوب:</u>

$L(1.2) \approx \frac{1}{2}(1.2) + \frac{1}{2} = 1.1$

تمارين ص 236: جد التقريب الخطي للدالة f(x) عند $x = x_o$
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المطلوب.

2. $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x_o = 0$, $\sqrt[3]{1.2}$

ملخص المعلومات:

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

$x_o =$ 0 ...

استكشاف العدد x:

$(x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1.2}$

$\left((x+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (\sqrt[3]{1.2})^3$

$x = 0.2$

$f(x_o) = f(0) =$ ... ...$(0+1)^{\frac{1}{3}} = 1$ ... ...

$f'(x_o) = f'(0) =$ $\frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$ .. ..

أولًا: التقريب الخطي للدالة:

$L(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

$L(x) \approx 1 + \frac{1}{3}(x-0)$ ....

$L(x) \approx \frac{1}{3}x + 1$ ....

ثانيًا: تقدير العدد المطلوب:

$L(0.2) \approx \frac{1}{3}(0.2) + 1 = 1.067$ ....

....

5. $f(x) = \sin 3x$, $x_o = 0$, $\sin(0.3)$

ملخص المعلومات:

$f(x) =$ $\sin 3x$ ..

$f'(x) =$ $3\cos 3x$

$x_o =$. 0 ..

استكشاف العدد x:

$\sin 3x = \sin(0.3)$

.... $3x = 0.3$ ....

$x = 0.1$.

$f(x_o) = f(0) =$ $\sin(0) = 0$ .. ..

$f'(x_o) = f'(0) =$ $3\cos(0) = 3$ ... ...

أولًا: التقريب الخطي للدالة:

$L(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

$L(x) \approx 0 + 3(x-0)$ ....

$L(x) \approx 3x$ ....

ثانيًا: تقدير العدد المطلوب:

$L(0.1) \approx 3(0.1) \approx 0.3$ ....

....

تمارين ص 236: استخدم التقريبات الخطية لتقدير الكمية

$7.(a) \quad \sqrt[4]{16.04}$

ملخص المعلومات:

$f(x) = \sqrt[4]{16+x}$

$f'(x) = \frac{1}{4}(16+x)^{-\frac{3}{4}}$

$x = 0.04$

استكشاف العدد x_o:

هو أقرب عدد لـ x بشرط

$\sqrt[4]{x_o}$ معلوم بدقة

$x_o = 0$ ..

$f(x_o) = f(\ 0\ ) = \sqrt[4]{16+0} = 2$ ………………….

$f'(x_o) = f'(\ 0\ ) = .\frac{1}{4}(16+0)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{32}$ ……….

تقدير الكمية المطلوبة باستخدام التقريب الخطي:

$L(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

$L(x) \approx 2 + \frac{1}{32}(x-0)$ ……………… $L(x) \approx 2 + \frac{1}{32}x$.

$L(0.04) \approx 2 + \frac{1}{32}(0.04) \approx 2.00125$ ………………………

$8.(b) \quad \sin(1)$

ملخص المعلومات:

$f(x) =$. $\sin x$ ..

$f'(x) = \cos x$ ..

$x = 1$ ...

استكشاف العدد x_o:

هو أقرب عدد لـ x بشرط

$\sin(x_o)$ معلومة بدقة

$x_o = \frac{\pi}{3}$ ...

$f(x_o) = f(\frac{\pi}{3}) =$ …… $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………

$f'(x_o) = f'(\frac{\pi}{3}) =$ … $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. ……………

تقدير الكمية المطلوبة باستخدام التقريب الخطي:

$L(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

$L(x) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ………………………………

$L(1) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0.842$ ……………………………

تمارين ص 236: استخدم الاستكمال الداخلي الخطي لتقدير الكمية المطلوبة

.9 قدّرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجية بالسعر x AED كما هو مُعطى في الجدول.

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

(a) قدّر عدد اللعبات التي يمكن بيعها بسعر 24 AED

ملخص المعلومات:

$x = 24$ ..

استكشاف العدد x_o:

هو أقرب عدد لـ x بشرط $f(x_o)$ معلومة بدقة

$x_o = 20$...

$f(x_o) = f(20) = 18$ ..

$f'(x_o) = f'(20) = \dfrac{14-18}{30-20} = -\dfrac{2}{5}$ ....

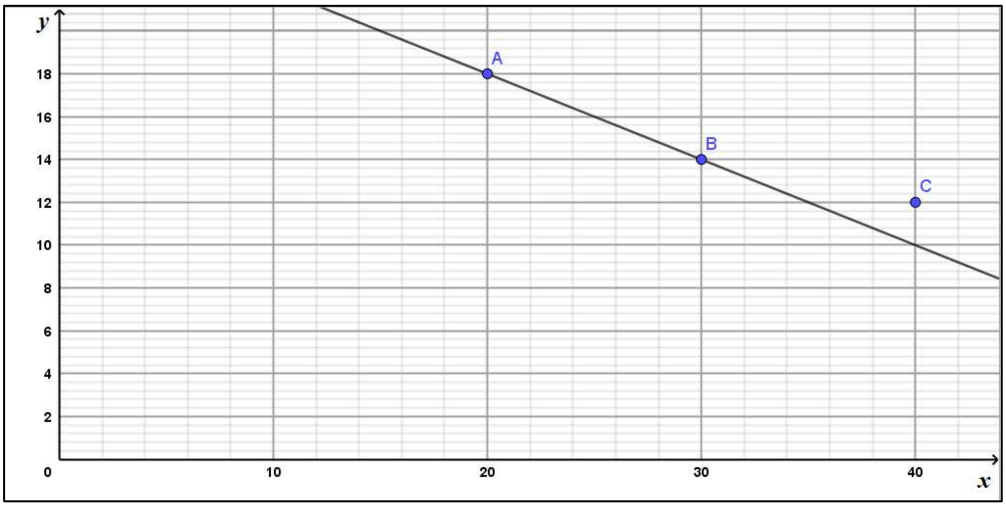
تقدير الكمية المطلوبة باستخدام التقريب الخطي:

$L(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$

$L(x) \approx 18 - \dfrac{2}{5}(x-20)$ ....

$L(24) \approx 18 - \dfrac{2}{5}(24-20) \approx 16.4$ لعبة ....

الاستكمال الداخلي الخطي من أجل حساب $f'(20)$



مستقيم التقريب الخطي في هذه الحالة هو القاطع الواصل بين أول نقطتين بيانات

و $f'(20)$ هي ميل هذا المستقيم

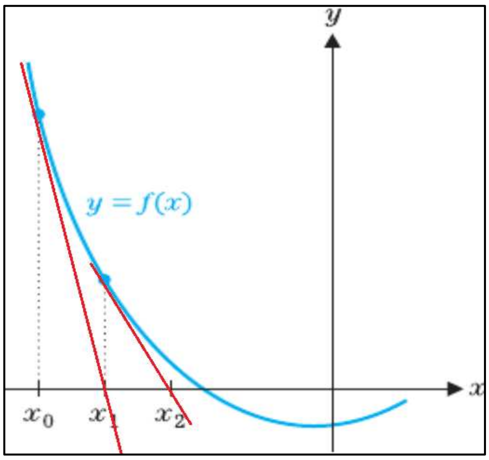
(4 - 1) التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

ثانيًا: طريقة نيوتن

هي طريقة لإيجاد أصفار تقريبية لدالة متصلة f أو جذور المعادلة f(x) = 0 لدوال لا تتوفر صيغ لإيجاد أصفارها مثل: f(x) = tan x - x

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

التخمين الأولي الجيد لـ x_o يؤدي إلى سرعة إيجاد تقريب دقيق لصفر الدالة.



تمارين ص 236: استخدم طريقة نيوتن مع قيم x_o لإيجاد الجذر لخمس منازل عشرية دقيقة

13. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \qquad , x_o = 1$

ملخص المعلومات:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$x_o = ..1..$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(1)^3 + 3(1)^2 - 1}{3(1)^2 + 6(1)} = \frac{2}{3}.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{2}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{79}{144} \approx 0.5486$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{79}{144} - \frac{\left(\frac{79}{144}\right)^3 + 3\left(\frac{79}{144}\right)^2 - 1}{3\left(\frac{79}{144}\right)^2 + 6\left(\frac{79}{144}\right)} \approx 0.53239$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.53239 - \frac{(0.53239)^3 + 3(0.53239)^2 - 1}{3(0.53239)^2 + 6(0.53239)} \approx 0.53209$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = \approx 0.53209 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

تفكير ناقد: لماذا توقفنا عند هذا الجذر؟

مختبر الرياضيات: يمكن أن تساعدك الآلة الحاسبة في سرعة انجاز تلك المهام (الأصفار المتتالية)

أولًا: اكتب في الآلة $x - \frac{x^3+3x^2-1}{3x^2+6x}$ ... لماذا؟ ثانيًا: اضغط CALC واكتب 1 وهي قيمة x_o ثم = تنتج x_1

ثالثًا: اضغط CALC ثم Ans ثم = تنتج x_2

أكمل بنفس الطريقة في ثالثًا لتحصل على الأصفار المتتالية الأخرى.

تمارين ص 236: استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر تقريبي (دقيق لست منازل عشرية دقيقة)

ارسم التمثيل البياني واشرح كيفية توصلك إلى تخمينك الأولى.

23. $e^x = -x$ ⋙⋙ .... $e^x + x$ ... $= 0$ ⋙⋙ $f(x) =$ $e^x + x$....

مختبر الرياضيات: استكشاف التخمين الأولى x_o

طريقة (1): الآلة الحاسبة

الخطوة الأولى: إعداد الآلة لنظام البيانات المجدولة

الآلة الحاسبة fx – 991ES PLUS : استخدم MODE ثم 7

الآلة البيضاء fx – 991EX : استخدم MENU ثم 9

الخطوة الثانية: الدالة والبداية والنهاية

اكتب الدالة $f(x) = e^x + x$ ثم = واكتب البداية ولتكن -5

ثم = واكتب النهاية ولتكن 5 ثم = ثم = تنتج البيانات المجدولة

الخطوة الثالثة: تحديد التخمين الأولى x_o لصفر الدالة

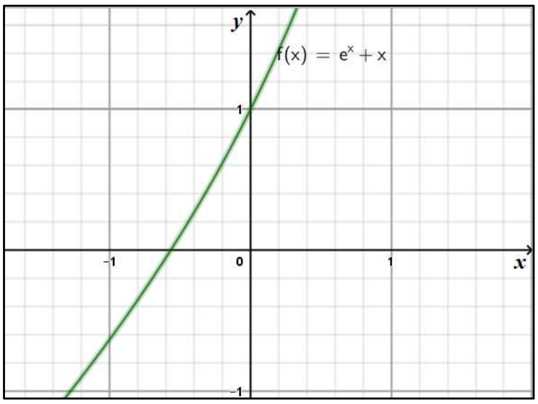
تأمل بيانات الجدول ... قيمة x_o التي نبحث عنها

تقع بين قيمتي x اللتان تقابلان قيمتين مختلفتين الإشارة ومتتاليتين من y

طريقة (2): برنامج Geogebra

ارسم الدالة $f(x) = e^x + x$ باستخدام برنامج Geogebra

واستكشف من الرسم التخمين الأولي x_o



ملخص المعلومات:

$f(x) =$ ... $e^x + x$.. ...

$f^{/}(x) =$.$e^x + 1$

$x_o = -0.5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{/}(x_0)} = -0.5 - \frac{e^{-0.5} - 0.5}{e^{-0.5} + 1} = -0.56631$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^{/}(x_1)} = \approx -0.56714 \quad ....$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^{/}(x_2)} = \approx -0.56714 \quad ....$$

تفكير ناقد (1)
لماذا توقفنا عند هذا الجذر؟

تفكير ناقد (2)
كيف تتحقق من صحة اجابتك؟

مختبر الرياضيات: يمكن أن تساعدك الآلة الحاسبة في سرعة انجاز تلك المهام (الأصفار المتتالية)

أولًا: اكتب في الآلة $x - \frac{e^x + x}{e^x + 1}$ ... لماذا؟ ثانيًا: اضغط CALC واكتب -0.5 وهي قيمة x_o ثم = تنتج x_1

ثالثًا: اضغط CALC ثم Ans ثم = تنتج x_2 ...... أكمل بنفس الطريقة في ثالثًا لتحصل على الأصفار المتتالية

المعلم: طه أبو الفتوح

التقريبات الخطية وطريقة نيوتن (4 - 1)

تمارين ص 236: استخدم طريقة نيوتن (اذكر الدالة التي تستخدمها) لتقدير العدد المطلوب.

27. $\sqrt[3]{11}$

ملخص المعلومات:

بفرض أن: $x = \sqrt[3]{11}$

$\therefore\ x^3 = 11$ ..

$\therefore\ ...\ x^3 - 11 ...\ = 0$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 11$ ...

$\therefore\ f'(x) = 3x^2$ ... ...

$x_o = .\ 2$ ..

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{(2)^3 - 11}{3(2)^2} = \frac{9}{4}\ \dots\dots$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = .= \frac{1081}{486}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = .\approx 2.22398\ \dots\dots\dots\dots$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = .\approx 2.22398\ \dots\dots\dots\dots$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = \approx 2.22398\ \dots\dots\dots\dots$$

تفكير ناقد

كيف تتحقق من صحة اجابتك؟

مختبر الرياضيات: استكشاف التخمين الأولي x_o

طريقة (1): الآلة الحاسبة

الخطوة الأولى: إعداد الآلة لنظام البيانات المجدولة

الآلة الحاسبة fx – 991ES PLUS : استخدم **MODE** ثم **7**

الآلة البيضاء fx – 991EX : استخدم **MENU** ثم **9**

الخطوة الثانية: الدالة والبداية والنهاية

اكتب الدالة $f(x) = x^3 - 11$ ثم **=** واكتب البداية ولتكن -5

ثم **=** واكتب النهاية ولتكن 5 ثم **=** ثم **=** تنتج البيانات المجدولة

الخطوة الثالثة: تحديد التخمين الأولي x_o لصفر الدالة

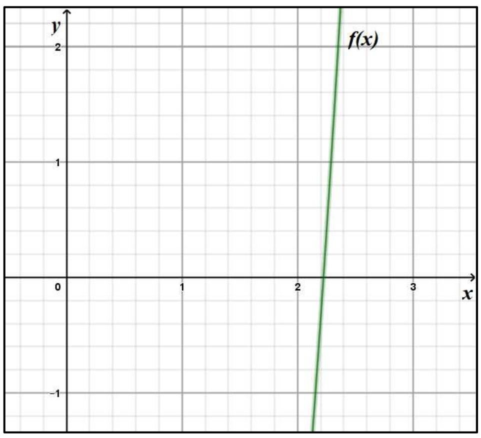
تأمل بيانات الجدول ... قيمة x_o التي نبحث عنها

تقع بين قيمتي x اللتان تقابلان قيمتين مختلفتين الإشارة ومتتاليتين من y

طريقة (2): برنامج Geogebra

ارسم الدالة $f(x) = x^3 - 11$ باستخدام برنامج Geogebra

واستكشف من الرسم التخمين الأولي x_o



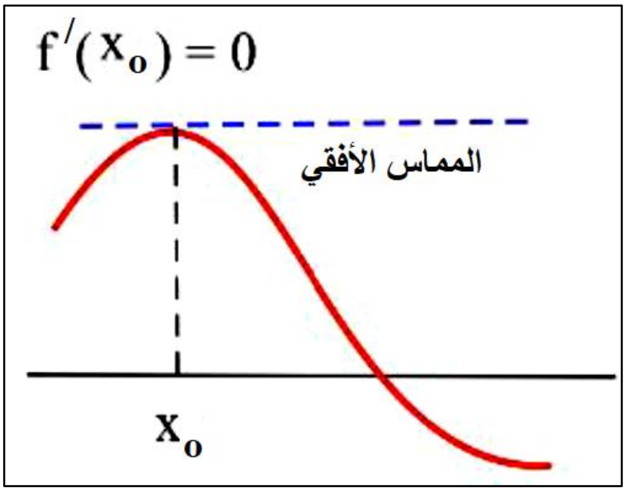
في طريقة نيوتن:

التخمين الأولي السيء لـ x_o يبطئ الوصول السريع لصفر الدالة وقد يُعطي نتائج غير جيدة له.

الحالات التي تفشل فيها طريقة نيوتن:

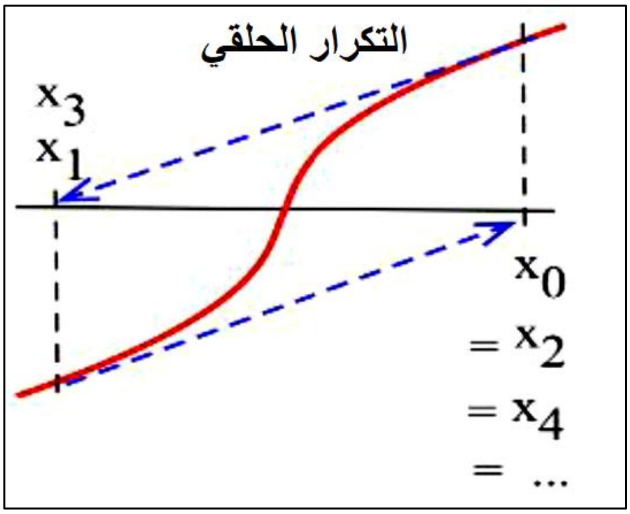
1) المماس الأفقي للدالة عند x_o:

هذا يُعني أن المماس عند x_o سيكون موازيًا لمحور x ولن يقطعه وبالتالي لا توجد مماسات تقترب من صفر الدالة.



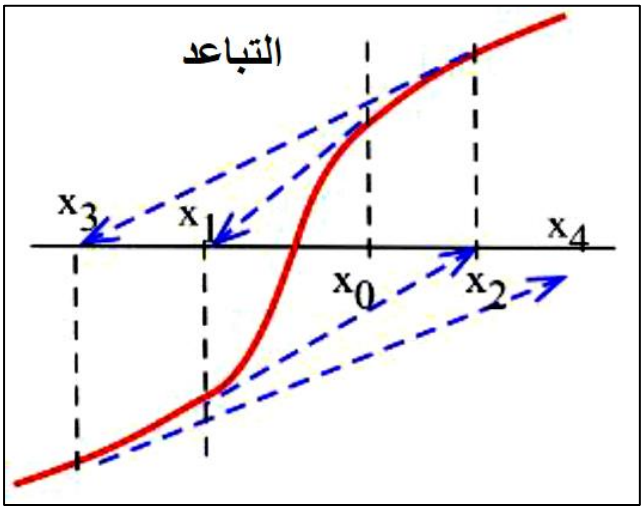
2) التكرار الحلقي للأصفار:

هذا يُعني أن المماسات ستكون متوازية ومنطبقة بشكل متكرر ولن تقترب من صفر الدالة.



3) تباعد المماسات:

هذا يُعني أن المماسات المتتالية تأخذنا بعيدًا عن صفر الدالة ولن نقترب منه.



الاختبارات المعيارية

1) أوجد التقريب الخطي $L(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ عند $x_0 = 1$

a) $L(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$

b) $L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

c) $L(x) = \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$

d) $L(x) = \frac{3}{4}x - \frac{4}{5}$

2) أوجد التقريب الخطي $L(x)$ للدالة $f(x) = tan^{-1}(x)$ عند $x_0 = 0$

a) $L(x) = x$

b) $L(x) = x + 1$

c) $L(x) = 1 - x$

d) $L(x) = x - 1$

3) يقيس مستشعر الموقع $f(t)$ لجسم بعد t ميكروثانية من تصادم كما هو معطى في الجدول التالي

قدر موقع الجسم عندما $t = 12$.

t	5	10	15
$f(t)$	8	14	8

a) 10.2

b) 20.2

c) 12.2

d) 16.4

4) أي مما يلي يستخدم لتقريب أصفار الدالة في طريقة نيوتن

a) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

b) $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

c) $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

d) $x_{n+1} = x_n + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

5) استخدم طريقة نيوتن مع $x_0 = 1.2$ لإيجاد التقريب x_2 لصفر الدالة
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

a) 0.8000

b) 0.9956

c) 0.9500

d) 0.9999