تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade15

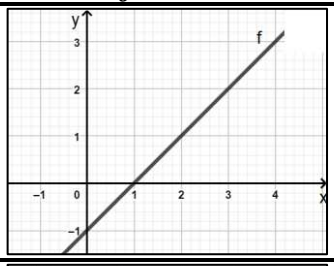
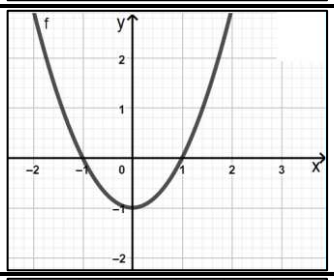
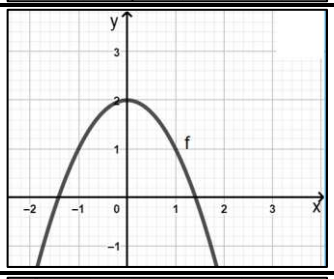
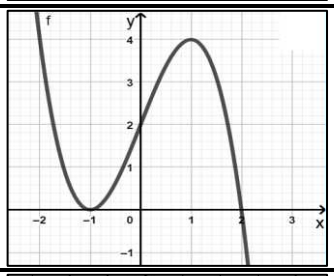
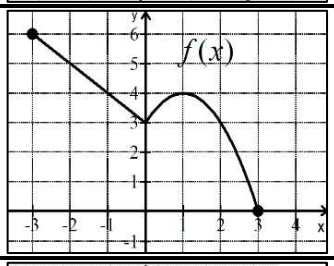
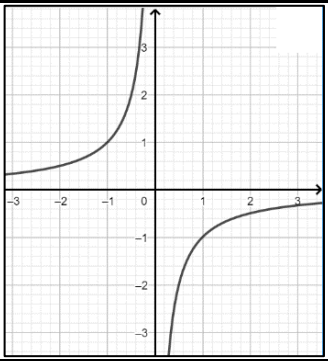
للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/almanahj_bot

الرياضيات – 12 متقدم - ف2

(5 - 4) التقعر واختبار المشتقة الثانية

استكشاف:

الدالة f	هل يوجد تقعر للأعلى؟	هل يوجد تقعر للأسفل؟	هل توجد نقطة انعطاف؟
	....	....	....
	....	....	....
	....	....	....
	....	....	....
	....	....	....
	....	....	....

الرياضيات ـ 12 متقدم ـ ف2

(5 ـ 4) التقعر واختبار المشتقة الثانية

أولًا: التقعر من الرسم البياني للدالة $f(x)$

∩	∪	شكل المنحنى
مقعرة للأسفل	مقعرة للأعلى	سلوك $f(x)$

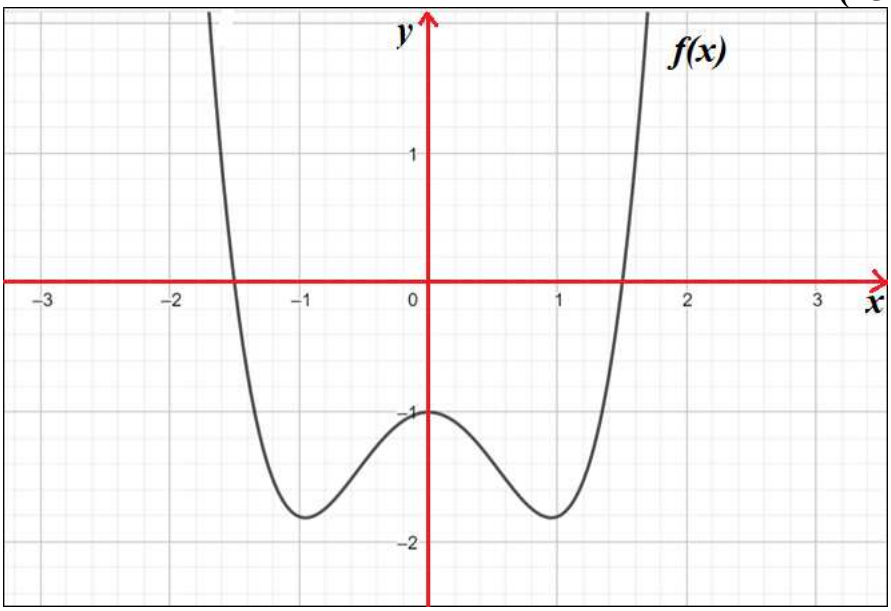
وبشرط أن تكون:
الدالة f قابلة للاشتقاق على طول فترة التقعر

ملاحظات هامة:

1) نقطة الانعطاف: هي النقطة التي يغير منحنى الدالة f تقعره على جانبيها. (وبشرط أن تكون الدالة متصلة عند تلك النقطة)
2) بعض الدوال لها فترات تقعر للأعلى والأسفل، وبعضها لها فترات تقعر للأعلى فقط، وبعضها لها فترات تقعر للأسفل فقط، وبعضها ليس لها أي تقعر.
3) جميع فترات التقعر للأعلى والأسفل تكتب دائماً مفتوحة ومن محور x.

تمارين ص 276: قدر فترات التزايد والتناقص، ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.

(45



فترات التزايد:
$(-1, 0) \cup (1, \infty)$ .....

فترات التناقص:
$(-\infty, 1) \cup (0, 1)$ .....

مواقع القيم العظمى المحلية:
$x = 0$ .....

مواقع القيم الصغرى المحلية:
$x = 1$ ..... $x = -1$ ..

فترات التقعر للأعلى:
$(0.5, \infty)$ ..... $(-\infty, -0.5)$.

فترات التقعر للأسفل:
$(-0.5, 0.5)$ .....

مواقع نقاط الانعطاف:
$x = 0.5$ ..... $x = -0.5$.

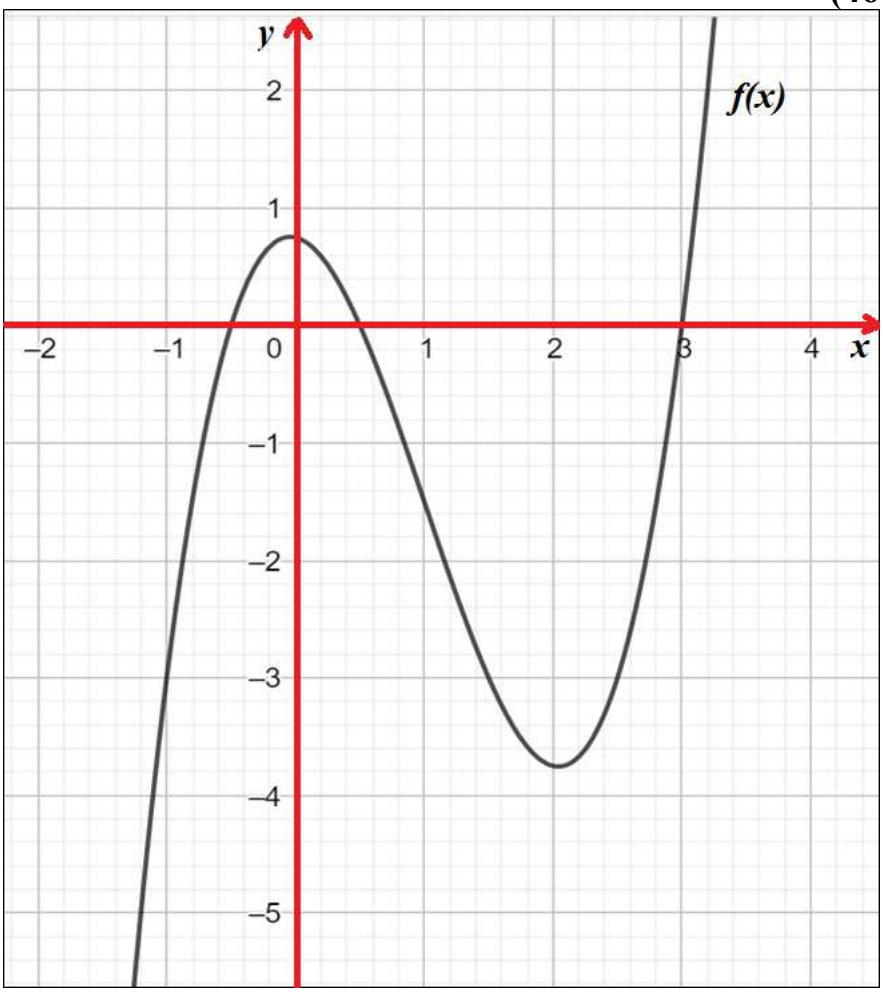
تذكر:
فترات التزايد والتناقص وكذلك فترات التقعر للأعلى والأسفل تُكتب بفترات مفتوحة من محور x

ملاحظة:
مُصطلح مواقع القيم .... أو مواقع نقاط ..... يُقصد به تحديد المطلوب من محور x

نصيحة دراسية:
قبل تحديد فترات التقعر للأعلى والأسفل عليك أولًا تحديد مواقع نقاط الانعطاف، ومن ثم فترات التقعر.

تمارين ص 276: قدر فترات التزايد والتناقص، ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.

(46



فترات التزايد:
..... $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ .....

فترات التناقص:
..... $(0, 2)$ .....

مواقع القيم العظمى المحلية:
..... $x = 0$ .....

مواقع القيم الصغرى المحلية:
..... $x = 2$ .....

فترات التقعر للأعلى:
..... $(1, \infty)$ .....

فترات التقعر للأسفل:
..... $(-\infty, 1)$ .....

مواقع نقاط الانعطاف:
..... $x = 1$ .....

مختبر الرياضيات:

1) مثل الدالة التالية بيانيًا باستخدام برنامج Geogebra

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

2) استخدم الأمر

Input: E=Extremum(<Polynomial>)

واكتب f بدلًا من <Polynomial>
ثم Enter لتنتج القيم القصوى المحلية

3) استخدم الأمر

Input: I=InflectionPoint(<Polynomial>)

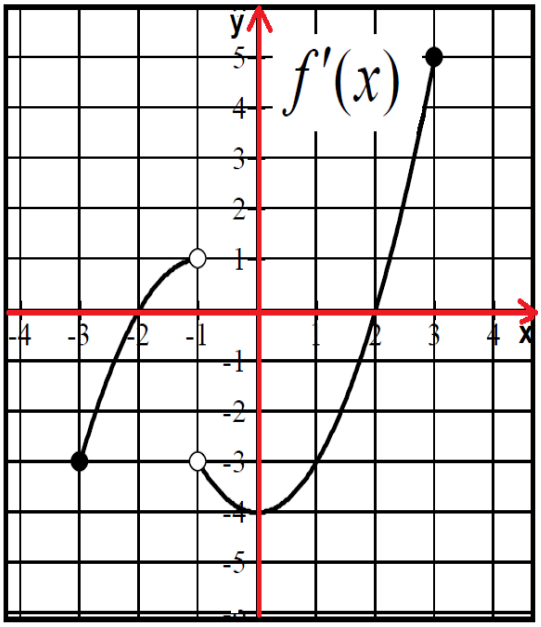
واكتب f بدلًا من <Polynomial>
ثم Enter لتنتج نقاط الانعطاف

ثانيًا: التقعر من الرسم البياني للمشتقة الأولى $f'(x)$

$f'(x)$	↗	↘
سلوك $f(x)$	∪	∩

إذا كانت: f' ثابتة فلا يوجد تقعر

تدريب: لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[-3,3]$ ، فيما يلي بيان $f'(x)$ ، استعن بالرسم في ايجاد



1) قيم x التي تكون للدالة $f(x)$ عندها نقاط حرجة ..... x = ... , x = ...

2) الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة هي .....

3) الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متناقصة هي .....

4) مواقع القيم الصغرى المحلية للدالة $f(x)$ هي .....

5) مواقع القيم العظمى المحلية للدالة $f(x)$ هي .....

6) فترات تقعر منحنى الدالة $f(x)$ للأسفل هي .....

7) فترات تقعر منحنى الدالة $f(x)$ للأعلى هي .....

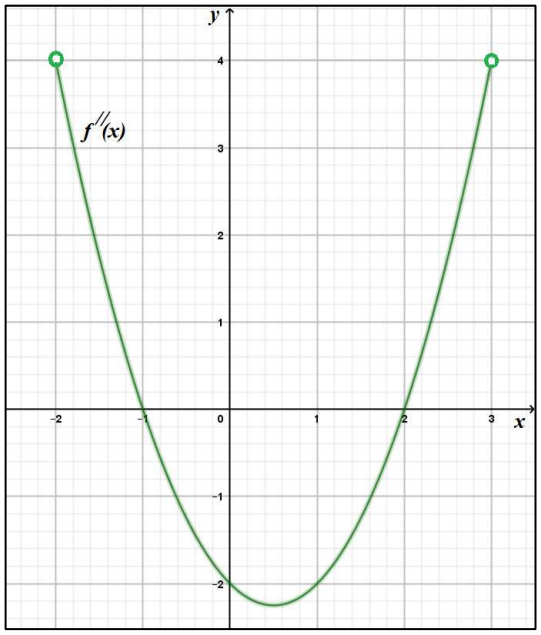
8) مواقع نقاط الانعطاف للدالة $f(x)$ هي .....

نظرية 5.1

ثالثًا: التقعر من الرسم البياني للمشتقة الثانية $f''(x)$

$f''(x)$	+	-
سلوك $f(x)$	∪	∩

إذا كانت: $f''=0$ أو غير موجودة
فلا يوجد تقعر



تدريب: لتكن $f(x)$ دالة متصلة على [-2,3]، فيما يلي بيان f''. أوجد:

1) فترات التقعر للأعلى: .....

2) فترات التقعر للأسفل: .....

3) مواقع نقاط الانعطاف: .....

تمارين ص 276: حدد فترات التقعر للأعلى والأسفل ونقاط الانعطاف

$2)\ f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

المجال: .... $R = (-\infty, \infty)$ ...

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = 4x^3 - 12x + 2$ .....

المشتقة الثانية: ..... $f``(x) = 12x^2 - 12$ .....

غير موجودة $f''(x)$ أو $f''(x) = 0$

..... $f``(x) = 12x^2 - 12 = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0$ .....

..... $x = -1 \ , \ x = 1$ .....

$x = -1$ $x = 1$

$f''(x)$	+	-	+
سلوك $f(x)$	∪	∩	∪

فترات التقعر للأعلى: ..... $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .....

فترات التقعر للأسفل: ..... $(-1, 1)$ .....

نقاط الانعطاف: ..... $x = -1 \ , \ x = 1$ .....

تمارين ص 276: حدد فترات التقعر للأعلى والأسفل ونقاط الانعطاف:

3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

المجال: ..... $R \,/\, \{0\}$ ....

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .....

المشتقة الثانية: ..... $f``(x) = \frac{1}{x^3}$ .....

غير موجودة $f''(x)$ | أو | $f''(x) = 0$

$f``(x) = \frac{1}{x^3}$ ..... | .....

$x^3 = 0 \rightarrow x = 0$ .. | .....

$x = 0$

$f''(x)$	+	−
سلوك $f(x)$	∪	∩

فترات التقعر للأعلى: ..... $(0, \infty)$ .....

فترات التقعر للأسفل: ..... $(-\infty, 0)$ .....

نقاط الانعطاف: ..... لا توجد .....

مختبر الرياضيات:

مثل الدالة بيانيًا باستخدام برنامج Geogebra

وتحقق من صحة اجابتك.

تمارين ص 276: حدد فترات التقعر للأعلى والأسفل ونقاط الانعطاف

7) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

المجال: ..... $R = (-\infty, \infty)$

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ .....

المشتقة الثانية: .....

..... $f``(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ ..... $\rightarrow$ ..... $f``(x) = \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}} - \frac{8}{9x^{\frac{5}{3}}}$ .....

..... $f``(x) = \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ .....

غير موجودة $f''(x)$ أو $f''(x) = 0$

..... $\frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}} \rightarrow x = 0$ ..... | ..... $1 - \frac{2}{x} = 0 \rightarrow x = 2$ .....

	$x = 0$		$x = 2$	
$f''(x)$	+		−	+
سلوك $f(x)$	∪		∩	∪

فترات التقعر للأعلى: ..... $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ .....

فترات التقعر للأسفل: ..... $(0, 2)$ .....

نقاط الانعطاف: ..... $x = 2$ ..... $x = 0$ .....

مختبر الرياضيات:

مثل الدالة بيانيًا باستخدام برنامج Geogebra

وتحقق من صحة اجابتك.

تمارين ص 276: ارسم تمثيلا بيانيا بالخصائص التالية:

38)

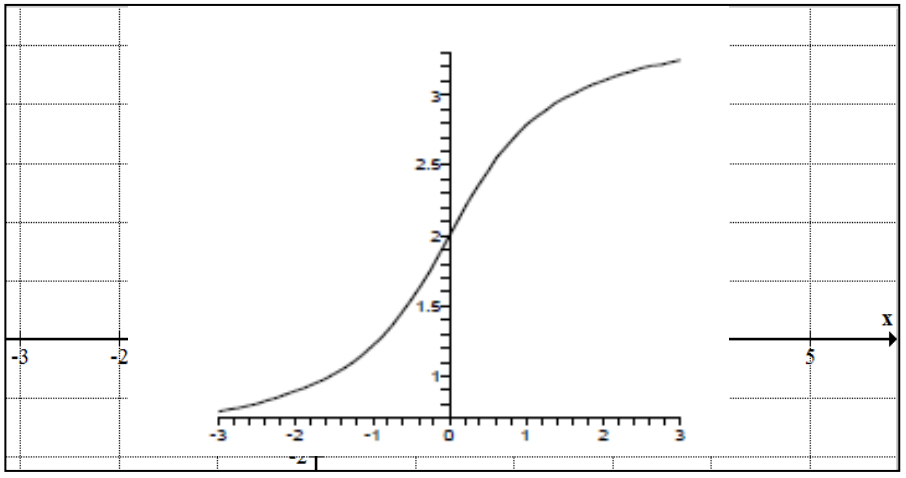
$f(0) = 2$

$f'(0) = 1$

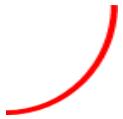
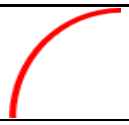
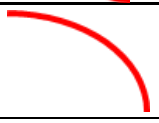
$f'(x) > 0$: لكل x

$f''(x) > 0 \ : \ x < 0$

$f''(x) < 0 \ : \ x > 0$



مادة اثرائية:

	متزايدة	متناقصة
مقعرة لأعلى		
مقعرة لأسفل		

تمارين ص 276: ارسم تمثيلا بيانيا بالخصائص التالية:

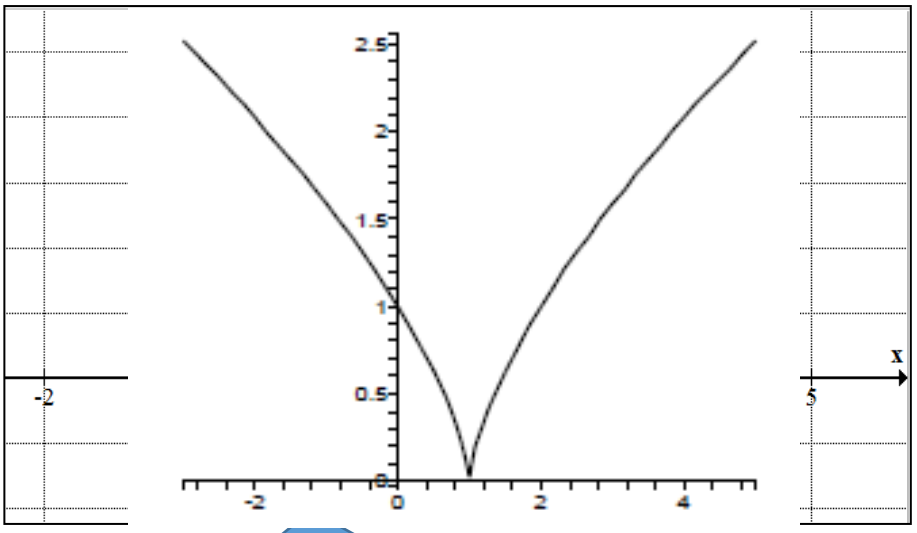
40)

$f(1) = 0$

$f'(x) < 0 : \ x < 1$

$f'(x) > 0 : \ x > 1$

$f''(x) < 0 \ : \ x < 1 \quad , x > 1$



تفكير ابداعي
هل يمكنك أن تكتب دالة جبريًا تحقق هذا التمثيل البياني؟

تمارين ص 276:

54. يرتبط عدد الوحدات Q التي أنتجها عامل في يوم بعدد الساعات t منذ بداية يوم العمل. على فرض أن $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 12t$.

1) اشرح لماذا يُعد $Q'(t)$ هو قياس كفاءة العامل في الزمن t.

$Q`(t)$ تمثل عدد الوحدات المُنتجة فى الساعة وكلما زادت قيمته كان العامل أكثر كفاءة

2) أوجد الزمن الذي تكون فيه كفاءة العامل عند القيمة العظمى.

$Q`(t) = -3t^2 + 12t + 12$

$Q``(t) = -6t + 12 \quad \rightarrow \quad Q``(t) = -6t + 12 = 0$

$t = 2$

3) اشرح لماذا يُعد منطقيًا أن يُطلق على نقطة الانعطاف " نقطة تناقص الكفاءة ".

لان عند $t = 2$ تمثل نقطة انعطاف وهى النقطة التى عندها يتغير أداء العامل من التزايد الى التناقص

نظرية 5.2 : اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

إذا كانت $f'(c) = 0$ و

$f''(c) < 0$ (.....)	$f''(c) > 0$ (.....)
فإن ..... $f(c)$ .. قيمة عظمى محلية	فإن ..... $f(c)$ .. قيمة صغرى محلية .....

تفكير ناقد: متى يفشل اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى المحلية؟

.....

تمارين ص 276: أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

12) $f(x) = e^{-x^2}$

المجال: .... $R = (-\infty, \infty)$

الأعداد الحرجة: ..... $f'(x) =$ ..... $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ .....

$f'(x) = 0$	أو	$f'(x)$ غير موجودة
..... $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$		.....
.....		.....

∴ الأعداد الحرجة للدالة عند ..... $x = 0$ .....

استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى المحلية:

$f''(x) =$ .... $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ .....

..... $f''(0) = -2 + 0 < 0$ .....

..... $x = 0$ ..... قيمة عظمى محلية .....

تمارين ص 276: أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

$9)\ f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

المجال: ... $R = (-\infty, \infty)$

الأعداد الحرجة: ..... $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 \rightarrow f'(x) = 4x^2(x+3)$ ..... $f'(x) =$

$f'(x)$ غير موجودة	أو	$f'(x) = 0$
		..... $f'(x) = 4x^2(x+3) = 0$ .....
		..... $x = 0 \ , \ x = -3$ .....

∴ الأعداد الحرجة للدالة عند ..... $x = 0 \ , \ x = -3$ .....

استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى المحلية:

$f''(x) =$ ..... $f''(x) = 12x^2 + 24x$ .....

..... $f''(0) = 12(0) + 24(0) = 0$ .....

..... $f''(-3) = 12(-3)^2 + 24(-3) = 36 > 0$ ..... قيمة صغرى محلية

مختبر الرياضيات:

مثل الدالة بيانيًا باستخدام برنامج Geogebra

وتحقق من صحة اجابتك.

تمارين ص 276: أوجد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

14) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

المجال: ..... $R / \{0\}$ .....

الأعداد الحرجة: ..... $f'(x) = \dfrac{(2x)(x) - (x^2 - 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ ..... $f'(x) =$ .....

$f'(x)$ غير موجودة	أو	$f'(x) = 0$
..... مجال الدالة $x = 0 \notin$ $\rightarrow$ $x^2 = 0$		
.....		

∴ الأعداد الحرجة للدالة عند .....**لا توجد**.....

استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى المحلية:

$f''(x) =$ .....**لا توجد أعداد حرجة تنتمي لمجال الدالة وبالتالي لا توجد قيم قصوى**.....

.....

.....

مختبر الرياضيات:

مثل الدالة بيانيًا باستخدام برنامج Geogebra

وتحقق من صحة اجابتك.