الصف : الثاني عشر
المادة : الرياضيات

المسار : المتقدم
عدد صفحات الأسئلة : (9)

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول
للعام الدراسي 2017 / 2018 م

40

السؤال الأول

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) حدد مجال الدالة $g(x)=\sqrt{2x-12}$.

$2x-12\geq 0$
$2x\geq 12$
$x\geq 6$
$6 \longrightarrow \infty$

a) $(-\infty,6]$ b) $[6,\infty)$
c) $[-6,\infty)$ d) $(-\infty,\infty)$

2) أوجد معادلة مستقيم عمودي على $y=\dfrac{1}{3}x-5$ ويمر بالنقطة $(0,2)$.

$m=\frac{1}{3} \xrightarrow[\text{العمودي}]{} m=-3$
$y-2=-3(x-0)$
$y=-3x+2$

a) $y=\dfrac{-1}{3}x-2$ b) $y=\dfrac{1}{3}x+2$
c) $y=-3x+2$ d) $y=-3x-2$

3) حدد الدالة التي يوجد لها دالة عكسية .

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ليست واحد لواحد b) $f(x)=x^2-4$ ليست واحد لواحد
c) $f(x)=-1$ ليست واحد لواحد d) $f(x)=x^3-2$

مثلاً $f(1)=-1$ ، $f(-1)=-3$ واحد لواحد

4) حدد الدورة للدالة $f(x)=3\cos(2x-\pi)$.

الدورة $=\dfrac{2\pi}{|b|}$
$=\dfrac{2\pi}{2}$
$=\pi$

a) 3 b) π
c) $\dfrac{2}{\pi}$ d) $\dfrac{\pi}{2}$

5) أوجد حل المعادلة الأسية $e^{2\ln x} = 4$.

$e^{\ln x^2} = 4$

a) ± 2 $\quad x^2 = 4$ $\quad$ b) 4

c) 2 $\quad x = \pm 2$ $\quad$ d) 16

$x = 2$

حيث $x > 0$

6) أوجد قيمة الدالة المعكوسة $\csc^{-1}(2)$.

$x = \csc^{-1}(2)$

a) $\frac{\pi}{6}$ $\quad \csc x = 2$ $\quad$ b) $\frac{\pi}{4}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\frac{\pi}{3}$ $\quad x = \frac{\pi}{6}$ $\quad$ d) $\frac{2\pi}{3}$

7) إذا كانت $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sec x$ ، أوجد $(f \circ g)(x)$

a) $\sec^2 x + 1$ $\quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\quad$ b) $\sec(x+1)^2$

c) $\sec(x^2+1)$ $\quad = f(\sec x)$ $\quad$ d) $\sec x^2 + 1$

$= \sec^2 x + 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

8) أوجد $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\cos^2 x - 1}$.

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

a) 1 $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos^2 x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{-\sin^2 x}$ $\quad$ b) ∞

c) 0 $\quad$ d) -1

$= -\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}\right)^2 = -1$

9) أوجد $\lim\limits_{x \to \infty} \sin(\tan^{-1} x)$.

$= \sin(\tan^{-1} \infty)$

a) ∞ $\quad = \sin\frac{\pi}{2}$ $\quad$ b) 1

c) 0 $\quad = 1$ $\quad$ d) $-\infty$

10) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-6}{3x^3+2x+1}$.

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x}$

$= 0$

a) 3 b) 2

c) 0 ✓ d) ∞

أو درجة البسط < درجة المقام

11) حدد الفترة التي تكون عندها الدالة $f(x)=\ln(3x-6)$ متصلة .

$3x-6>0$

$3x>6$

$x>2$

$2 \longrightarrow \infty$

a) $(-2,\infty)$ b) $[2,\infty)$

c) $(-\infty,2)$ d) $(2,\infty)$ ✓

12) حدد خطوط التقارب المائلة للدالة $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ x-2 & x^2 \qquad +1 \\ & -(x^2-2x) \\ \hline & 2x+1 \\ & -(2x-4) \\ \hline & 5 \end{array}$$

a) $y=-2$ b) $y=2$

c) $y=x+2$ ✓ d) $y=x-2$

13) أوجد السرعة المتجهة المتوسطة لدالة الموقع $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ بين $t=0$ و $t=1$

حيث s بالامتار و t بالثواني .

$V_{avg}=\dfrac{s(1)-s(0)}{1-0}$

$=\dfrac{3-0}{1}$

$=3\ m/s$

a) $\frac{5}{3}\ m/s$ b) $3\ m/s$ ✓

c) $0\ m/s$ d) $-3\ m/s$

14) إذا كانت $f(x)=2x-x^5+1$ ، أوجد $f''(-1)$.

$f'(x)=2-5x^4$

$f''(x)=-20x^3$

$f(-1)=-20(-1)^3$

$=20$

a) $f''(-1)=-20$ b) $f''(-1)=0$

c) $f''(-1)=20$ ✓ d) $f''(-1)=-3$

15) إذا كانت $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$ ، أوجد $f'(x)$.

a) $f'(x) = \dfrac{-3}{(2x+1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-6}{(2x+1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-3(2)}{(2x+1)^2}$

16) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = e^x \ln x$.

$f'(x) = e^x \cdot \dfrac{1}{x} + \ln x \cdot e^x$

a) $f'(x) = xe^x$

b) $f'(x) = \dfrac{e^x}{x} + e^x \ln x$

c) $f'(x) = \dfrac{e^x}{x} + \ln x$

d) $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

17) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 + 2x + 1$ في الفترة $[0,1]$.

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(c) = 2c + 2$

$\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{4 - 1}{1} = 3$

$2c + 2 = 3$

$2c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1)$

a) 1

b) 0

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{3}$

18) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \cosh^{-1} 3x$.

$f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(3x)^2 - 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

a) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x^2 - 1}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 8$
متصلة
$G'(2^-) = G'(2^+) = 4$ قابلة للاشتقاق

19) حدد الدالة القابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

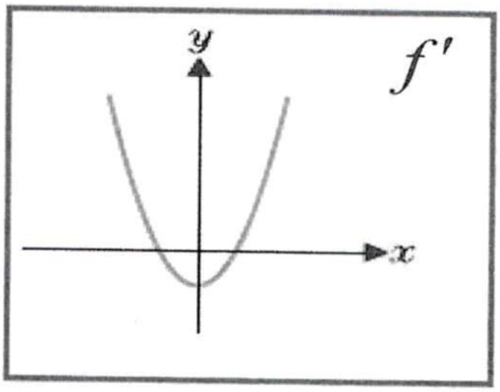
a) $f(x) = \begin{cases} 4x & , x < 2 \\ x^2 + 4 & , x \geq 2 \end{cases}$

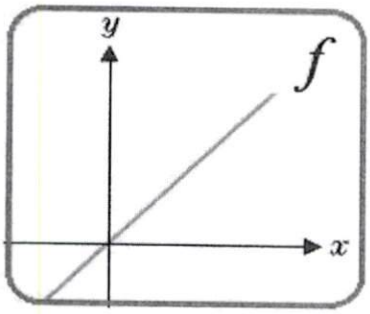
b) $g(x) = \begin{cases} 4 & , x < 2 \\ 2x & , x \geq 2 \end{cases}$

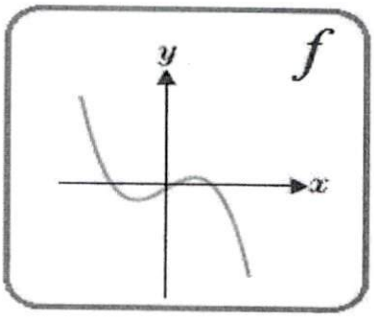
c) $p(x) = \begin{cases} 4 + 2x & , x < 2 \\ 2x & , x \geq 2 \end{cases}$

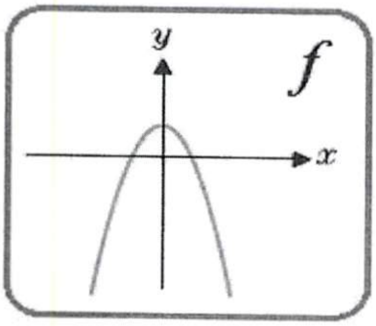
d) $h(x) = \begin{cases} 3x & , x < 2 \\ x + 4 & , x \geq 2 \end{cases}$

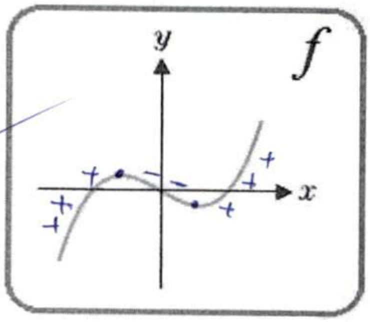
20) استخدم التمثيل البياني أدناه لتحديد التمثيل البياني المعقول للدالة المتصلة f .



a)


b)


c)


d)


60

السؤال الثاني

تكتب خطوات الحل التفصيلية لكافة المفردات الاختبارية من 21 إلى 28

21) أوجد $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{10-x}-3}$.

$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{10-x}-3} \cdot \frac{\sqrt{10-x}+3}{\sqrt{10-x}+3}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{10-x}+3)}{10-x-9}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)(\sqrt{10-x}+3)}{\cancel{1-x}}$

$= -1(1+1)(3+3) = -12$

22) حدد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة .

$$f(x)=\begin{cases} ae^x+1 & , x<0 \\ \sin^{-1}\frac{x}{2} & , 0\le x\le 2 \\ x^2-x+b & , x>2 \end{cases}$$

ae^x+1 0 $\sin^{-1}\frac{x}{2}$ 2 x^2-x+b

∴ الدالة متصلة

∴ الدالة متصلة عند $x=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim_{x\to 0^-} ae^x+1 = \lim_{x\to 0^+} \sin^{-1}\frac{x}{2}$

$ae^0+1 = \sin^{-1} 0$

$a = 0-1$

$\boxed{a=-1}$

∴ الدالة متصلة عند $x=2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\lim_{x\to 2^-} \sin^{-1}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 2^+} (x^2-x+b)$

$\sin^{-1}(1) = 2+b$

$\frac{\pi}{2} = 2+b$

$\boxed{b=\frac{\pi}{2}-2}$

23) استخدم تعريف النهاية لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 - 2x$ عند $x = 3$.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$f(3) = 3^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 \cancel{- 6} - 2h \cancel{- 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}}$$

$$= 4$$

24) إذا كانت $g(x)$ الدالة العكسية للدالة $f(x) = x^3 + 2x + 1$ ، أوجد $g'(-2)$.

$$x^3 + 2x + 1 = -2$$

$$x^3 + 2x + 3 = 0$$

باستخدام الآلة

$$x = -1$$

$$g(-2) = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2$$

$$= 5$$

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))}$$

$$= \frac{1}{f'(-1)}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$x = g(-2) = f^{-1}(-2) \longrightarrow f(x) = -2$$

25) أوجد مشتقة الدالة $f(x)=\sqrt{\tan(x^3+2x)}$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2)\sec^2(x^3+2x)}{2\sqrt{\tan(x^3+2x)}}$$

26) أوجد جميع النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى $x^2y^2=3y+1$ مماسًا أفقيًا . $m=0 \leftarrow$

$y'=0$

$x^2 \cdot 2y\,y' + y^2 \cdot 2x = 3y'$

$2x^2y\,y' - 3y' = -2xy^2$

$y'(2x^2y-3) = -2xy^2$

$y' = \dfrac{-2xy^2}{2x^2y-3}$

$y'=0 \longrightarrow -2xy^2=0 \longrightarrow x=0$ or $y=0$

$x=0 \longrightarrow 0(y^2)=3y+1$

$0=3y+1$

$3y=-1$

$y=-\frac{1}{3}$

$y=0 \longrightarrow 0=0+1$

مرفوض

عندها المماس أفقي .... النقطة $(0\ ,\ -\frac{1}{3})$

27) سعر بيع القطعة الواحدة من سلعة ما AED 12 وقد بيعت 10,000 قطعة منها.

تريد الشركة زيادة الكمية المبيعة بمقدار 1000 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار AED 15,000 في نفس العام . فما المعدل الذي يتعين به زيادة السعر لتحقيق هذين الهدفين ؟

$f(x) \leftarrow$ بيع القطع

$g(x) \leftarrow$ عدد القطع

$f(0) = 12 \qquad f'(0) = ??$

$g(0) = 10000 \qquad g'(0) = 1000$

$h(x) \leftarrow$ الإيراد

$h'(x) \leftarrow$ زيادة الإيراد

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

$15000 = 12 \cdot 1000 + 10000 \cdot f'(x)$

$15000 - 12000 = 10000 \cdot f'(x)$

$3000 = 10000 \, f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3000}{10000} = 0.3$$

معدل زيادة السعر هو 0.3 درهم لكل عام

28) إذا كانت f و g دالتين متصلتين في الفترة $[a,b]$ و قابلتين للإشتقاق في الفترة (a,b) حيث $f(a)=g(a)$ و $f(b)=g(b)$.

فأثبت أن f و g لهما مماسان متوازيان عند نقطة ما في الفترة (a,b).

f و g قابلتان للاشتقاق على (a,b)

$\therefore$ h قابلة للاشتقاق على (a,b) حيث $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(b) = f(b) - g(b) = 0 \qquad \because f(b) = g(b)$

$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \qquad \because f(a) = g(a)$

$\therefore h(b) = h(a) = 0$

وبتطبيق نظرية رول فإنه يوجد على الأقل عدد $c \in (a,b)$ حيث $h'(c) = 0$

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$

$h'(c) = f'(c) - g'(c)$

$0 = f'(c) - g'(c)$

$\therefore f'(c) = g'(c)$

$\therefore$ للدالتين f و g مماسين متوازيين عند النقطة c في الفترة (a,b)

انتهت الأسئلة

بالتوفيق والنجاح