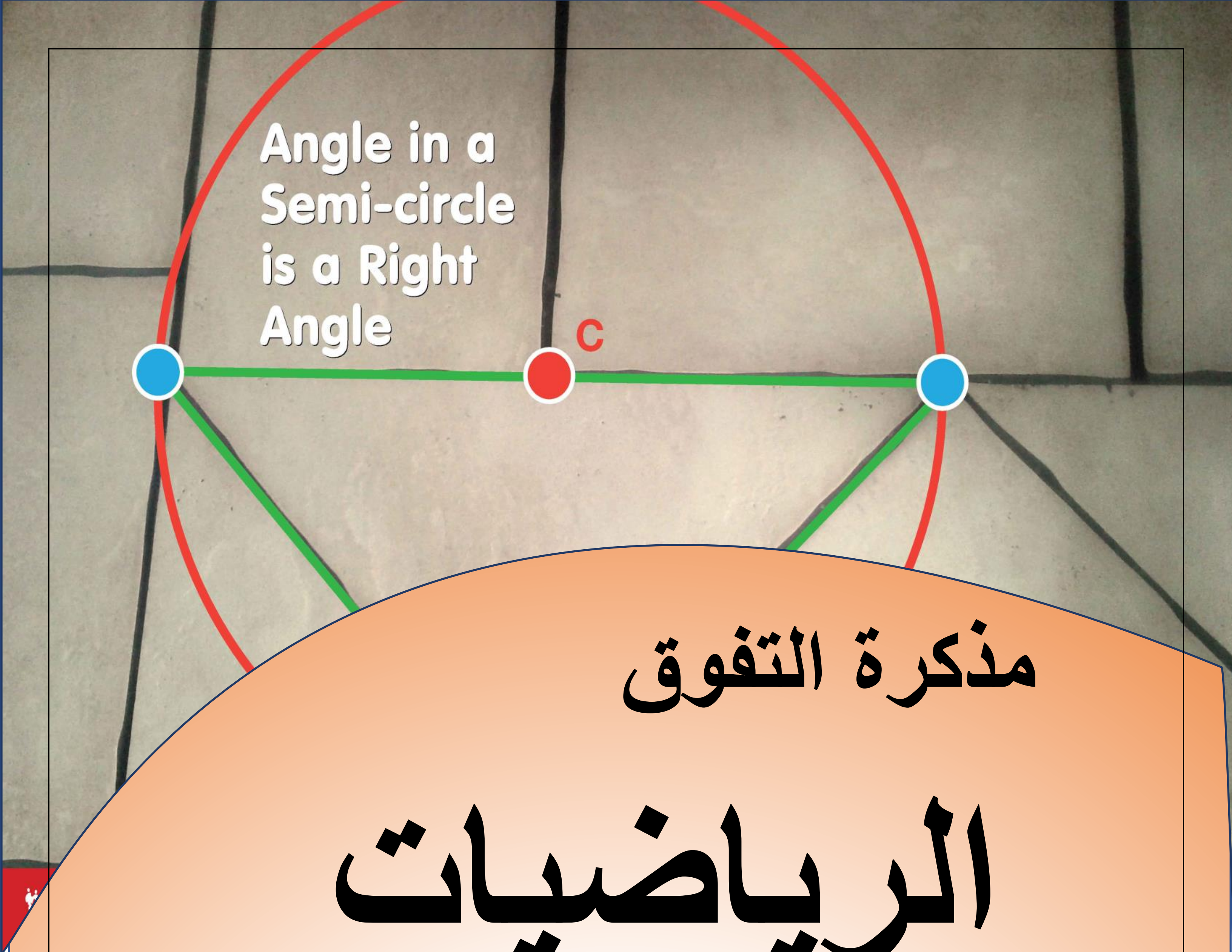
اجابات الوحدة الرابعة تطبيقات عملية للاشتقاق

موقع المناهج ⇐ المناهج الإماراتية ⇐ الصف الثاني عشر المتقدم ⇐ رياضيات ⇐ الفصل الثاني ⇐ الملف

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 19-01-2024 06:37:45



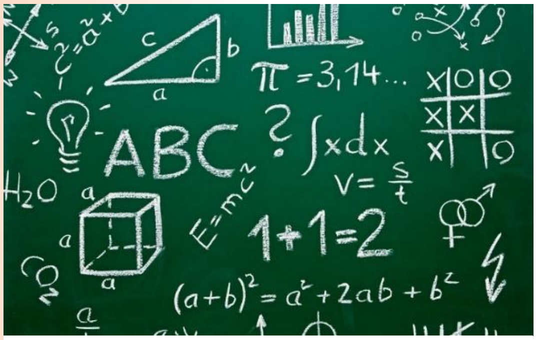
مذكرة التفوق

الرياضيات

للصف 12 متقدم

د. حيدر السعافين

050-5712489



قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

المشتقة	الدالة	الرقم	المشتقة	الدالة	الرقم
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	15	0	c	1
$\frac{f'}{f \times \ln a}$	$\log_a(f)$	16	nx^{n-1}	x^n	2
$\cos x$	$\sin x$	17	$f' \pm g'$	$f \pm g$	3
$-\sin x$	$\cos x$	18	$c \times f'$	$c \times f$	4
$\sec^2 x$	$\tan x$	19	$f \times g' + g \times f'$	$f \times g$	5
$-\csc^2 x$	$\cot x$	20	$\frac{g \times f' - f \times g'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$	6
$\sec x \tan x$	$\sec x$	21	$\frac{-c \times g'}{g^2}$	$\frac{c}{g}$	7
$-\csc x \cot x$	$\csc x$	22	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$	8
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$	23	$n(f)^{n-1} \times f'$	$(f)^n$	9
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	24	$f'(g(x)) \times g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	10
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$	25	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$	$y = f(u)$ $u = g(x)$	11
$\frac{-1}{1+x^2}$	$\cot^{-1} x$	26	$\frac{1}{f'(g(x))}$	$g = f^{-1}(x)$	12
$\frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1} x$	27	$a^f \times f' \times \ln a$	a^f	13
$\frac{-1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}}$	$\csc^{-1} x$	28	$e^f \times f'$	e^f	14

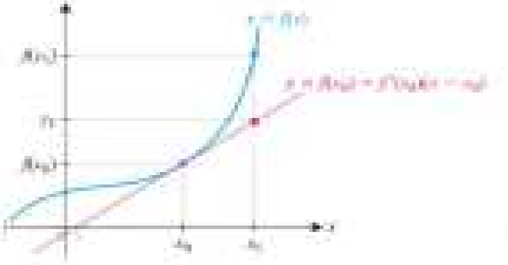
التقريبات الخطيه

من اهم تطبيقات التفاضل اننا نستطيع تقريب اي دالة قابلة للاشتقاق بدالة خطية عند نقطة معينة وهذا ما يسمى بالتقريب الخطي للدالة.

التقريب الخطي (المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$

هو الدالة

$$L(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sin 3x$ عند $x = 0$

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$L(x) = 0 + 3(x - 0) \quad \to L(x) = 3x$$

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sqrt{2x + 25}$ عند $x = 0$ ثم اوجد $\sqrt{27}$

$$f(x) = \sqrt{27}$$

$$\sqrt{2x + 25} = \sqrt{27}$$

$$2x + 25 = 27 \to x = 1$$

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$L(x) = 5 + \frac{1}{5}(x - 0) \quad \to L(x) = \frac{1}{5}x + 5$$

$$\sqrt{2} = f(1) = L(1) = 5 + \frac{1}{5}(1) = 5.2$$

$$f^{/}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 25}}$$

$$f^{/}(0) = \frac{1}{\sqrt{0 + 25}} = \frac{1}{5}$$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=1$

$\mathrm{L(x)} = f(1) + f^{/}(1)(\mathrm{x}-1)$

$\mathrm{L(x)} = 2 + -2(\mathrm{x}-1) \quad \rightarrow \mathrm{L(x)} = 2 - 2\mathrm{x} + 2 = -2\mathrm{x} + 4$

$f(1) = 2$

$f^{/}(x) = \frac{-2}{x^2}$

$f^{/}(2) = -2$

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=e^{2x}$ عند $x=0$ ثم اوجد $e^{0.02}$

$\mathrm{L(x)} = f(0) + f^{/}(0)(x-0)$

$\mathrm{L(x)} = f(0) + f^{/}(0)$

$e^{0.02} = f(0.01) = L(0.01) = 1 + 2(0.01) = 1.02$

$f(0) = 1$

$f^{/}(x) = 2\,e^{2x}$

$f^{/}(0) = 2$

$f(x) = e^{0.02}$ المقارنة

$e^{2x} = e^{0.02}$

$2x = 0.02 \quad \rightarrow x = 0.01$

(3) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\cos x$ عند $x=0$

$f(0) = \cos 0 = 1$

$f^{/}(x) = -sinx$

$f^{/}(0) = 0$

$\mathrm{L(x)} = f(0) + f^{/}(0)(x-0)$

$\mathrm{L(x)} = 1 + 0(x-0) = 1$

(4) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\tan^{-1}x$ عند $x=0$

$f(0) = tan^{-1}0 = 0$

$f^{/}(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$f^{/}(0) = 1$

$\mathrm{L(x)} \approx f(0) + f^{/}(0)(x-0)$

$\mathrm{L(x)} = 0 + 1(x-0) = \mathrm{x}$

وعلى فرض اننا نريد ايجاد تقريب للدالة $f(x)$ عند $x = x_1$ مع العلم اننا نعرف قيمة الدالة عند $x = x_0$ فاننا نستخدم التقريب الخطي .

$$\boxed{f(x_1) \approx y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x \quad , \quad \Delta x = x_1 - x_0}$$

(1) اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt[3]{28}$

$$\mathrm{L}(28) = f(27) + f^{/}(27)(28 - 27) \ \rightarrow \mathrm{L}(28) = 3 + 0.036 = 3.036$$

(2) اوجد التقريب الخطي للعدد $(2.1)^5$

$$L(2.1) = f(2) + f^{/}(x)(2.1 - 2)$$

$$L(2.1) = 32 + 80(0.1) = 40$$

$f(x) = x^5$

$f^{/}(x) = 5x^4$

$f^{/}(2) = 80$

(3) اوجد التقريب الخطي للعدد $\ln 1.1$

$f(x) = lnx \, , x_0 = 1$

$f(1) = 0$

$f^{/}(x) = \dfrac{1}{x}$

$f^{/}(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$$L(1) = f(1) + f^{/}(1)(x - 1)$$

$$L(1.1) = 0 + (1)(1.1 - 1) = 0.1$$

(1) اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin 29^{\circ}$

$$f(x) = sinx\,, x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$f^{/}(x)$=cosx

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f^{/}(\frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{6})$$

$$L(x) = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})$$

$$x_1 = 29^{\circ} = 29^{\circ}.\frac{\pi}{180^0} =$$

$$L(29^{\circ}) = L\left(\frac{29\pi}{180^0}\right)$$

$$L(x) = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6}) = 0.48$$

(2) اوجد التقريب الخطي للعدد COS 1

$$f(x) = cos\ x\,, x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$f^{/}(x)$=- sin x

$$f^{/}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f^{/}(\frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{3})$$

$$L(x) = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{-\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$$

$$x_1 = 1$$

$$L(1) = \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) = 0.54$$

(3) اوجد التقريب الخطي لطول ضلع مكعب حجمة 70 متر مكعب

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}\,, x_0 = 64$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$f^{/}(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f^{/}(64) = \frac{1}{48}$$

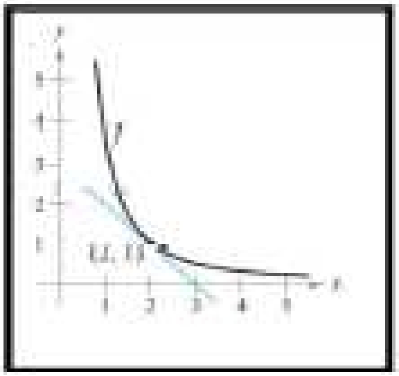
الحجم 70 فيكون طول ضلعه $\sqrt[3]{70}$

$$L(x) = f(64) + f^{/}(64)(x - 64)$$

$$L(x) = (4) + \frac{1}{48}(x - 64)$$

$$L(70) = (4) + \frac{1}{48}(70 - 64) = 4.125$$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ لتقدير $f(2.1)$



قاعدة الدالة غير معلومة لتكن $x_0 = 2$

$L(x) = f(2) + f^{/}(2)(x-2)$

$f(2) = 1$, $f^{/}(2) = 2 =$ ميل المماس

$= \frac{-3}{3} = -1$

$L(x) = 1 + (-1)(x-2)$

$L(x) = 1 - x + 2 = 3 - x$

$f(2.1) = L(2.1) = 3 - 2.1 = 0.9$

(2) قدرت شركة ، كمية مبيعاتها اليومية $f(x)$ من العصير حسب درجة حرارة الجو x (بالدرجة المئوية) حسب البيانات التالية. قدر كمية المبيعات عند درجة الحرارة 50° باستخدام التقريب الخطي

x	25	30	35
$f(x)$	800	1200	1700

قاعدة الدالة غير معلومة لتكن $x_0 = 35$

$f(35) = 1700$, $f^{/}(35) = m =$ ميل المماس

$= \frac{1700 - 1200}{35 - 30} = 100$

$L(x) = 1 + (-1)(x-2)$

$L(x) = 1 - x + 2 = 3 - x$

$f(2.1) = L(2.1) = 3 - 2.1 = 0.9$

$L(x) = f(x_0) + f^{/}(x - x_0)$

$L(x) = 1700 + 100(x - 35)$

$f(50) = L(50) = 1700 + 100(50 - 35)$

$f(50) = L(50) = 1700 + 100(15) = 3200$

طريقة نيوتن

تستخدم طريقة نيوتن لتقريب اصفار الدالة

يمكن استخدام القانون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

حيث x_0 هو التخمين الأول لصفر الدالة f و x_1 هو التقريب الأول لصفر الدالة وهكذا...

ملاحظة: تفشل طريقة نيوتن في تقريب صفر الدالة عندما يكون $f'(x_0)=0$ او $f'(x_1)=0$ ...

(1) اوجد التقريب الثاني لصفر الدالة $f(x)=x^4-3x^2+1$ باستخدام طريقة نيوتن معتبراً $x_0=1$

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x$$

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
&= 1 - \left(\frac{1^4 - 3\cdot 1^2 + 1}{4\cdot 1^3 - 6\cdot 1}\right) = \frac{1}{2} \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

(2) اوجد التقريب الأول لصفر الدالة $f(x)=\cos x - x$ باستخدام طريقة نيوتن معتبراً $x_0=0$

Use $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ with

$f(x) = \cos x - x$, and

$f'(x) = -\sin x - 1$

$f^{/}(0) = -1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{/}(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f^{/}(0)} = 0 - \frac{1}{-1} = 1$$

(1) اوجد التقريب الأول لصفر الدالة $f(x)=e^x+x$ باستخدام طريقة نيوتن معتبرا $x_0=0$

$$f(0)=1$$
$$f^{/}(x)=e^x+1$$
$$f^{/}(0)=2$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f^{/}(x_0)}=-\frac{1}{2}$$

(2) اوجد التقريب الأول لصفر الدالة $f(x)=x^5-x+1$ باستخدام طريقة نيوتن

لاحظ ان x_0 غير معلومة لذلك نبحث عن عددين متتالين صورهم مختلفة بالاشارة من الآلة الحاسبة

$$f(-2)=-29 \quad ,f(-1)=1$$

نلاحظ ان صورة -1 اقرب الى الصفر من -2

لذلك نختار التخمين $x_0=-1$

$$f(-1)=1$$
$$f^{/}(x)=5x^4-1$$
$$f^{/}(-1)=4$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f^{/}(x_0)}=-1-\frac{1}{4}=-1.25$$

(3) اوجد التقريب الأول لحل المعادلة $2x^5-x^2+1=0$ باستخدام طريقة نيوتن

نفرض الدالة $f(x)=2x^5-x^2+1$

$$f(0)=1\ ,f(-1)=-2$$

نختار $x_0=-1$ ولا يجوز

اختيار $x_0=0$ لأن $f^{/}(0)=$

$$f^{/}(x)=10x^4-2x$$
$$f^{/}(-1)=12$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f^{/}(x_0)}=-1-\frac{-2}{12}=-\frac{5}{6}$$

(1) استخدم طريقة نيوتن لتقريب العدد $\sqrt[5]{35}$

نفرض $x = \sqrt[5]{35}$

$x^5 = 35$

$x^5 - 35 = 0$

تكون الدالة $f(x) = x^5 - 35$

ويكون $x_0 = 2$

$f(2) = -3, \quad f^{/}(x) = 5x^4 \ , f^{/}(2 = 80)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{/}(x_0)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f^{/}(2)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{-3}{80} = 2.0375$$

(2) اكتب الحد العام لتقريب صفر الدالة $f(x) = x^2 - x - 1$ بطريقة نيوتن

$$f(x_n) = x_n^2 - x_n - 1$$

$$f^{/}(x) = 2x - 1$$

$$f^{/}(x_n) = 2x_n - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{/}(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n(2x_n - 1) - (x_n^2 - x_n - 1)}{2x_n - 1} =$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - x_n - x_n^2 + x_n + 1}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}$$

(3) بين باستخدام طريقة نيوتن ان تقريب العدد $\sqrt{c}$ حيث c عدد موجب هو $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{c}{x_n}\right]$

$$x = \sqrt{c}$$

$$x^2 - c = 0$$

$$f(x) = x^2 - c$$

$$f(x_n) = x_n{}^2 - c$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x_n) = 2x_n$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \left(\frac{x_n^2 - c}{2x_n}\right) \\ &= x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{c}{2x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{c}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \end{aligned}$$

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثاني: الصيغ غير المعرفة (قاعدة لوبيتال)

قاعدة لوبيتال

اذا كانت $g.f$ دوال قابلة للاشتقاق في جوار النقطة c حيث $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ أو $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

فان

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يوجد 5 كميات اخرى غير معرفة يمكن تحولها الى الكميات غير معرفة $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ واستخدام قاعدة لوبيتال وهي

$\infty-\infty$

$0\times\infty$

$0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $\frac{0}{0}$

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{10}-1}{x-1}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{10x^4}{1}=10(1)=10$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{sinx}{cosx}=\frac{0}{1}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x+2x-1}{\sin 2x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-sinx+2}{2cos2x}=\frac{2}{2}=1$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}.2}{cosx}=\frac{2}{1}=2$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-sinx}{2\ sinx\ cosx}=\frac{-1}{2cos\ x}=\frac{-1}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-3^x}{1-5^x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-3^x\ ln3}{-5^x\ ln5}=\frac{ln3}{ln5}=ln_5^3$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{-1}{\overline{2\sqrt{5-x}}}}{\dfrac{-1}{\overline{2\sqrt{10-x}}}}=\frac{\dfrac{-1}{2}}{\dfrac{-1}{3}}=\frac{3}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^x}=\frac{0}{1}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{cosx-1}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-sinx}{6x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-cosx}{6}=\frac{-1}{6}$$ نشتق مرتين

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2sin2x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2}{\ln\cos x}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{10x}{\dfrac{-sinx}{cosx}}=\frac{-10x}{tanx}=-10$$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{sec^2x-1}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{tan^2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{tanx}{3x}.\frac{tanx}{x}=\frac{1}{3}$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-4x}{1-2x^5}$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+4}{-10x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3}{-40x^3} = -\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

وجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

$$(1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$

$$\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-csc^2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-xcsc^2x}=\lim_{x\to\infty}-\frac{sin^2x}{x}=\lim_{x\to\infty}-\frac{sinx}{x}.sinx=(-1).0=0$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{160x^{-0.4}+90}{20x^{-0.4}+10}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{160}{x^{0.4}}+90\right)}{\left(\frac{20}{x^{0.4}}+10\right)}=\frac{\left(\frac{160}{\infty}+90\right)}{\left(\frac{160}{\infty}+10\right)}=\frac{0+90}{0+10}=9$$

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $0 \times \infty$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

$$(\infty.0)=\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-cos\frac{1}{x}\,.\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=cos0=1$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x$

$$(0.\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$

$$(\infty.0)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x(1-e^{\frac{1}{x}})$

$$(\infty.0)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{1/x}\,.\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(-e^{-1/x}\right)=-1$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$(\infty.0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{.\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/x}\right)=\frac{1}{1+0}=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln x$

$$(0.-\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\,x}{cotx}\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{xcsc^2x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-sin^2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-sinx}{x}.sinx\right)=(-1)(0)=0$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغ الأسية $0^0, \infty^0, 1^{\infty}$

(1) $\lim\limits_{x\to1^+}(x)^{\frac{1}{x-1}}$ (1^{∞})

$$lny = lnx^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}lnx = \frac{lnx}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^+} lny = \lim_{x\to1^+}\frac{lnx}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to1^+}\frac{ln^1/_x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to1^+} lny = 1 \to lim\, y = e^1 \to \lim_{x\to1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

ملاحظة

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$$

Let $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\Rightarrow \ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Then

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.\end{aligned}$$

Hence $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln y} = e.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x$ (1^{∞})

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{e^1}{e^{-1}} = e^2$$

اوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

ملاحظة

$$\lim_{x\to0^+}(1+bx)^{\frac{1}{x}}=e^{b}$$

(1) $\lim_{x\to0^+}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$

$$lny=ln(1+2x)^{\frac{3}{x}}\;=\frac{3}{x}\ln(1+2x)=\frac{3\ln(1+2x)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to0^+}lny=\lim_{x\to0^+}\frac{3\ln(1+2x)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{3\left(\frac{2}{1+2x}\right)}{1}=6$$

$$\lim\,\ln y=6\rightarrow lim\,y=e^{6}\rightarrow\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=e^{6}$$

(2) $\lim_{x\to0^+}(x)^{x}$ (0^0)

$$lny=lnx^{x}\;=xlnx=\frac{lnx}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}lny=\lim_{x\to0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{{}^{1}\!/_{x}}{-{}^{1}\!/_{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

$$lim\,lny=0\rightarrow lim\,y=e^{0}=1\rightarrow\lim_{x\to0^+}x^{x}=1$$

(3) $\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{x}$ (0^0)

$$lny=ln(sinx)^{x}\;=xln(sinx)=\frac{lnx}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}lny=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(sinx)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{-{}^{1}\!/_{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2cosx}{sinx}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{sinx}.xcosx=0$$

$$lim\,lny=0\rightarrow lim\,y=e^{0}=1\rightarrow\lim_{x\to0^+}(sinx)^{x}=1$$

أوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

(1) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x$ $(\infty)^0$

$$lny = ln\left(\frac{1}{x}\right)^x = xln\left(\frac{1}{x}\right) = xlnx^{-1} = -xlnx = \frac{-lnx}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+} lny = \lim_{x\to0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-1}{x}}{{-1}/{x^2}} = \lim_{x\to0^+} x = 0$$

$$lim\, lny = 0 \to lim\, y = e^0 = 1 \to \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

(2) $\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{2}{x}}$ $(\infty)^0$

$$lny = ln(x+1)^{\frac{2}{x}} = \frac{2}{x}ln(x+1) = \frac{2\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} lny = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x+1}}{1} = 0$$

$$lim\, lny = 0 \to lim\, y = e^0 = 1 \to \lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{2}{x}} = 1$$

أوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

الصيغة $\infty - \infty$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0
\end{aligned}
$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}\ -x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\left(\sqrt{x^3+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x - \frac{1}{x}$ $\qquad(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{cosx}{sinx}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{xcosx-sinx}{xsinx}\right)\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{(1)cosx+x(-sinx)-cosx}{(1)sinx+xcosx}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-xsinx}{sinx+xcosx}\right)\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-(sinx+xcosx}{cosx+cosx-xsinx}\right)=\frac{0}{1}=0$$

أوجد قيمة النهايات التالية (ان وجدت)

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\infty-\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-ln(x+1)}{x\,ln(x+1)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{x-1}}{(1)\ln(x+1)+x.\frac{1}{x+1}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{(1)(x+1)-x(1)}{(x+1)^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}(\ln x-x)$$

$$\boxed{\infty-\infty}$$

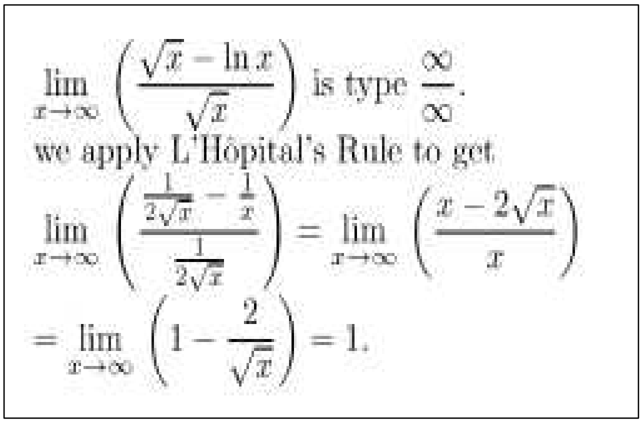
نضع $x = lne^x$

$$=\lim_{x\to\infty}(lnx-lne^x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(ln\frac{x}{e^x}\right)=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\ln(0^+)=-\infty$$

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\frac{0}{-\infty}}$$



$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}}\right) \text{ is type } \frac{\infty}{\infty}.$$

we apply L'Hôpital's Rule to get

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=1.$$

اي من النهايات التالية يمكن استخدام قاعدة لوبتال مباشرة في ايجادها وايها لا وايها تحتاج الى تحويل

(1) $\lim_{x\to\infty}(\ln x + x)$

$= \infty + \infty$

لا تحتاج لوبيتال (صيغة معرفة)

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\tan^{-1}x}$

لا تحتاج لوبيتال(صيغة معرفة) $\frac{\infty}{\pi/2}$

(3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-2}}{\ln x}$

تحتاج لوبيتال (صيغة غير معرفة)

$$\lim_{\text{ء}\to 0^+}\frac{1/x^2}{lnx} = \frac{\infty}{-\infty}$$

(4) $\lim_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x})$

صيغة غير معرفة $(\infty.0)$

تحتاج إلى تحويل إلى شكل القمة ثم لوبيتال

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{1-x^3}$

صيغة غير معرفة $\frac{\infty}{\infty}$

لوبيتال مباشر

(6) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

صيغة غير معرفة 1^∞

تحتاج إلى تحويل إلى ثم لوبيتال

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{e^{\frac{x}{3}}}$

صيغة غير معرفة $\frac{\infty}{\infty}$

لوبيتال مباشر

(8) $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^x$

صيغة معرفة $\infty^\infty = \infty$

لا تحتاج إلى لوبيتال

الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة f بانها النقطة c في مجال الدالة f والتي تكون عندها

اما: $f'=0$ او f' غير موجودة

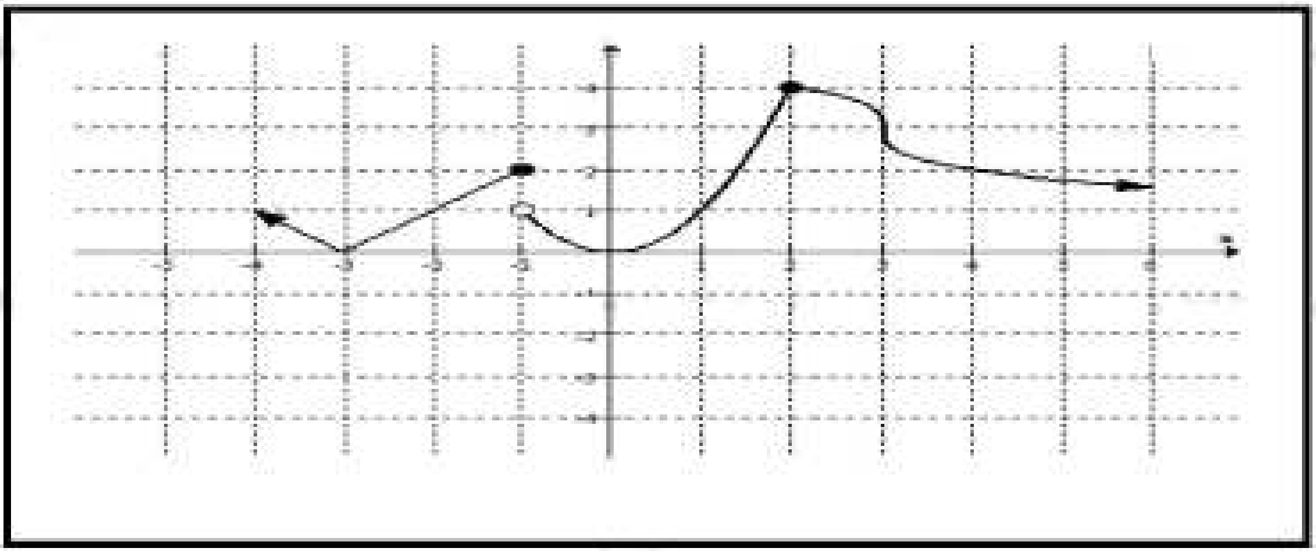
ملاحظة (ممكن ان تكون احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة)

ملاحظة: في بيان الدالة f تكون الاعداد الحرجة هي نقاط التي عندها

(1) المشتقة تساوي صفر (مماسات افقية)

(2) المشتقة غير موجودة وهي (أ) نقاط عدم اتصال (ب) مماسات رأسية (ج) رؤوس مدببة (ركن ، ناب)

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f لإكمال الجدول التالي:

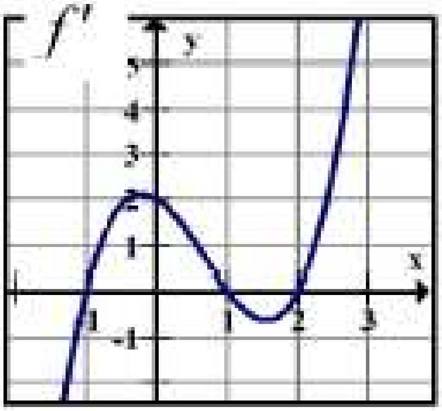


الأعداد الحرجة	$x=3$	$x=2$	$x=0$	$x=-1$	$x=-3$
المسبب	المشتقة غير موجودة (المماس رأسي)	المشتقة غير موجودة (ناب)	المماس = صفر مماس أفقي	المشتقة غير موجودة (عدم اتصال)	غير موجودة (رأس مدبب)

ملاحظة: في بيان الدالة f' تكون الاعداد الحرجة هي نقاط التقاطع مع محور السينات او قيم x التي عندها الدالة f' غير معرفة.

(1) اذا كانت الدالة f معرفة على العدد R ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'

اوجد الاعداد الحرجة:

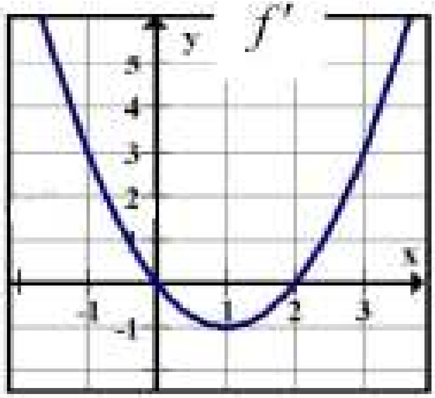


نقاط التقاطع مع محور x هي

-1 , 1 , 2

(2) اذا كانت الدالة f معرفه على الفترة R ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'

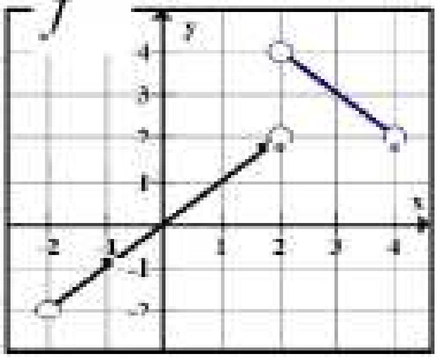
اوجد الاعداد الحرجة



0 , 2

(3) اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $\left[-2,4\right)$ ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'

اوجد الاعداد الحرجة:



-2 , 0

4- ليس عدد حرج لأنه خارج المجال

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^3-3x$ على الفترة $[-2,3]$.

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$ نضع $\to 3x^2-3=0$

$x=\pm1 \in [-2,3]$ الأعداد الحرجة

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+1$ على الفترة $[-1,3]$

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x$

$f'(x)=0$ نضع $\to =0 \to 4x^3-12x^2-16x$

$4x(x^2-3x-4)=0 \to 4x(x-4)(x+1)=0$

$x=0, x=-1 \in [-1,3]$ الأعداد الحرجة

$x=4$ لا ينتمي للمجال

$x=4$ ليس عدد حرج

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$

D = R : المجال

$f(x)=(x^2-4)^{1/3}$

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-4)^{-2/3}(2x)$

$f'(x)=\frac{2x}{3(x^2-4)^{2/3}}$

$f'(x)=0$

البسط = صفر

$2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ غ.م

المقام = صفر

$x^2-4=0 \to x=\pm2$

الأعداد الحرجة هي : 2 , −2 , 0

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{x}$

$D: [0,\infty[$ المجال

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x=0$ غير موجودة f'

النقطة الحرجة هي : 0

لا يوجد حل $f'(x)=0$

(5) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=e^{-x^2}$

$D: R$ المجال

$f'(x)=-2x\, e^{-x^2}=\frac{-2x}{e^{x^2}}$

$f'(x)=0$

$x=0$

غير موجودة$f'(x)$

$e^{x^2}=0$ لا يوجد حل

الأعداد الحرجة هي : 0

(1) أوجد الأعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x+8)$

$$f^{/}(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+8)+x^{1/3}(1)$$

$$f^{/}(x)=\frac{(x+8)}{3x^{2/3}}+x^{1/3}$$

$$f^{/}(x)=\frac{(x+8)+3x}{3x^{2/3}}=\frac{4x+8}{3x^{2/3}}$$

$f^{/}(x)$ غير موجودة $\rightarrow\ \ x=0$

$f^{/}(x)=0\rightarrow\ \ x=0$

الأعداد الحرجة هي : 0, -2

(2) أوجد الأعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\dfrac{x^2+12}{x+2}$

$D: R/\{-2\}$

$$f^{/}(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2+12)(1)}{(x+2)^2}$$

$$f^{/}(x)=\frac{2x^2+4x-x^2-12}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$$

$f^{/}(x)$ غير موجودة $\rightarrow\ \ x=-2$

$f^{/}(x)=0\rightarrow\ \ x=-6\ ,2$

الأعداد الحرجة هي : 6 , 2

-2 ليس من المجال فهو ليس عدد حرج

(3) أوجد الأعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

أولا

أوجد مجال الدالة

$D: 4-x^2\geq 0\rightarrow\ x^2\leq 4$

$x^2\leq 4\ \rightarrow\ |x|\leq 2$

$-2-2\leq x\leq 2$

$[-2,2]$

$$f^{/}(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f^{/}(x)$ غير موجودة $\rightarrow\ \ x=\pm 2$

$f^{/}(x)=0\rightarrow\ \ x=$

الأعداد الحرجة هي : 2 ,0, -2

(4) أوجد الأعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

$: 4-x^2\geq 0\rightarrow\ x^2\leq 4$

$x^2\leq 4\ \rightarrow\ |x|\leq 2$

$-2-2\leq x\leq 2$

$[-2,2]$

$$f^{/}(x)=(1)\sqrt{4-x^2}+x.\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$f^{/}(x)=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f^{/}(x)$ غير موجودة $\rightarrow\ \ x=\pm 2$

$f^{/}(x)=0\rightarrow\ \ x=\pm\sqrt{2}$

الأعداد الحرجة هي : $\pm\sqrt{2},\pm 2$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x - 2\cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$

$f^{/}(x) = 1 + 2sinx$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow\ sinx = \frac{-1}{2}$

$x = sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) \in Q_3\ orQ_4$

الأعداد الحرجة هي : $x = {}^{7\pi}/_{6}\ ,{}^{11\pi}/_{6}$

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x - \sin 2x$ على الفترة $[0, \pi]$

$f^{/}(x) = 1 - 2cosx$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow\ cosx = \frac{1}{2}$

$2x = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \in Q_1\ orQ_4$

الأعداد $2x = {}^{\pi}/_{3}$

$2x = {}^{5\pi}/_{3}\ \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

الأعداد الحرجة هي $= \frac{5\pi}{6}\ ,\ {}^{\pi}/_{6}$

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = \sin x + \cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$.

$f^{/}(x) = cosx - sinx$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow\ cosx - sinx = 0$

$cosx = sinx\ \rightarrow \frac{cosx}{cosx} = \frac{sinx}{cosx}\ \rightarrow tanx = 1 \in Q_1\ orQ_3$

الأعداد الحرجة هي : $x = {}^{\pi}/_{4}\ ,{}^{5\pi}/_{4}$

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = \sin x \cos x$ على الفترة $[0, 2\pi]$.

$f^{/}(x) = cosx.cosx - sinx.sinx$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow\ cos^2x = sin^2x$

$cos^2x = sin^2x\ \ \rightarrow \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{sin^2x}{cos^2x}\ \rightarrow tan^2x = 1$

$tanx = \pm 1 \rightarrow \in Q_1\ orQ_2\ orQ_3\ orQ_4$

الأعداد الحرجة هي : $x = {}^{\pi}/_{4}\ ,{}^{3\pi}/_{4},{}^{5\pi}/_{4},{}^{7\pi}/_{4}$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = \cosh(x^2 - 2x)$

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

$f^{/}(x) = 2x\,e^{x} + (x^2 - 3)\,e^{x} = e^{x}(2x + x^2 - 3)$

$f^{/}(x) = 0 \to e^{2}(x^2 + 2x - 3) = 0$

$e^{2} = 0$ مرفوض or $(x^2 + 2x - 3) = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

الأعداد الحرجة هي : $x = -3 , x = 1$

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = \begin{cases} 7 - 2x^2 & x \le 1 \\ x^3 - 12x & x > 1 \end{cases}$

$f^{/}(x) = \begin{cases} -4x & , x \le 1 \\ 3x^2 - 12 & , x > 1 \end{cases}$

$f^{/}(x) = 0 \to -4x = 0 \to x = 0$

$f^{/}(x)$ غ.م , $\begin{cases} x = 1 & (\text{عدم اتصال}) \\ 3x^2 - 12 = 0 & , 3x^2 = 12 \end{cases}$

$x^2 = 4 \to x = 2 \in$ المجال , $x = -2$ لا ينتمي إلى المجال الفرعي

الأعداد الحرجة هي : 0 , 1 , 2

(4) اذا كانت للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ اعداد حرجة عند $x = -1, x = 2$ فاوجد قيمة a, b

$f^{/}(x) = 3x^2 + 2ax + b$

لان للدالة أعداد حرجة عند $x = -1 , x = 2$ يكون

$f^{/}(2) = f^{/}(-1) = 0 \to 3x^2 + 2ax + b = 0$

$f^{/}(2) = 3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \to 12 + 4a + b = 0$

$4a + b = -12 \dots\dots(1)$

$f^{/}(-1) = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \to 3 - 2a + b = 0$

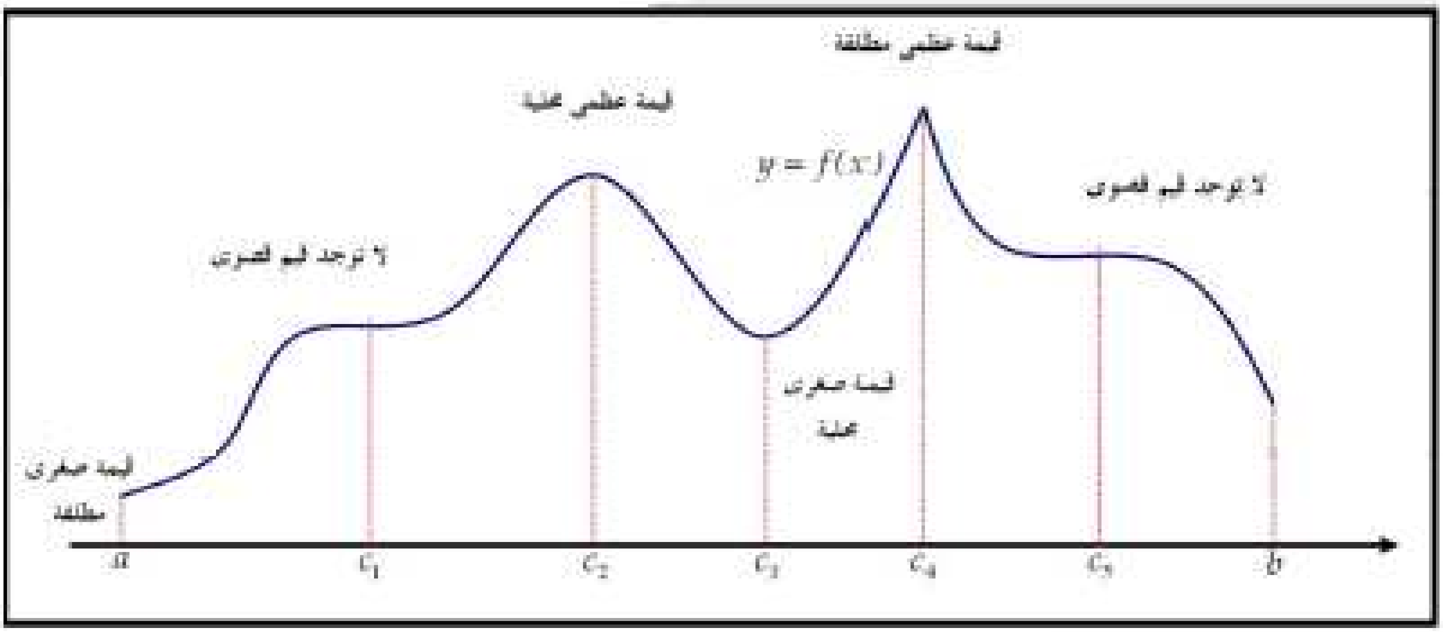
$2a - b = 3 \dots\dots(2)$

$4a + b = -12 \dots\dots(1)$

بالطرح يكون $6a = -9$

$a = {}^{-3}/_{2}$, $b = -6$

القيم القصوى (المطلقة) والقيم القصوى (المحلية)



القيم القصوى (المطلقة)

اذا كانت f دالة مجالها الفترة S، $c \in S$ فان $f(c)$ تكون:

1. قيمة عظمى مطلقة للدالة f على S اذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$.
2. قيمة صغرى مطلقة للدالة f على S اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

ملاحظة :القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى المطلقة او القيم القصوى.

القيم القصوى (المحلية)

اذا كانت c نقطة في مجال الدالة f ، فان $f(c)$ تكون:

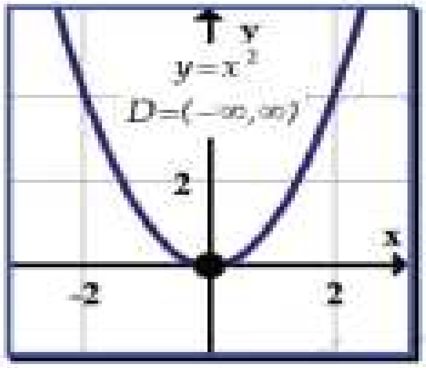
1. قيمة عظمى محلية اذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .
2. قيمة صغرى محلية اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .

نظرية فيرمات

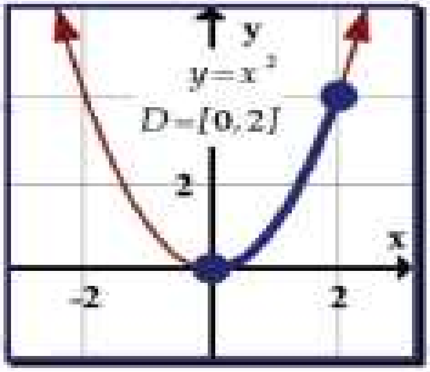
اذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية فان c نقطة (عدد) حرج للدالة f

الجدول التالي والرسومات البيانية التالية تمثل اشكال مختلفة لقيم قصوى مطلقة.

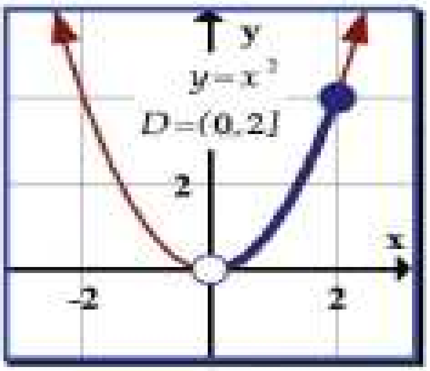
(أ) قيمة صغرى فقط



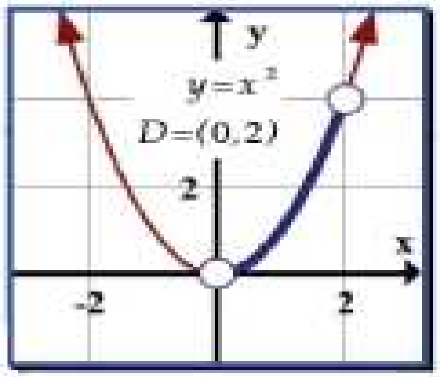
(ب) قيمة عظمى وقيمة صغرى



(ج) قيمة عظمى فقط



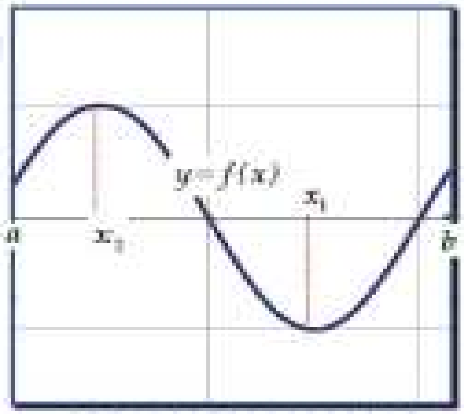
(د) لا توجد قيمة عظمى ولا صغرى



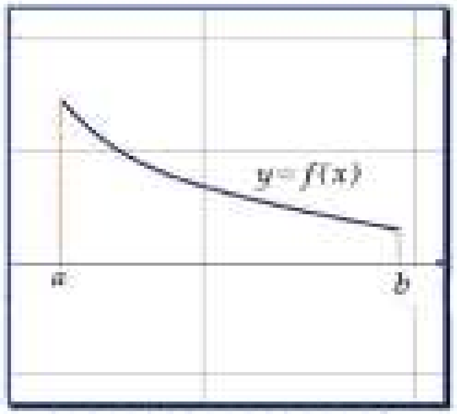
قاعدة الدالة	مجال D	القيم القصوى المطلقة فوق D
(أ) $y=x^2$	$(-\infty,\infty)$	لا يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ب) $y=x^2$	$[0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ج) $y=x^2$	$(0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ لا يوجد قيمة صغرى مطلقة
(د) $y=x^2$	$(0,2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة

نظرية القيمة القصوى

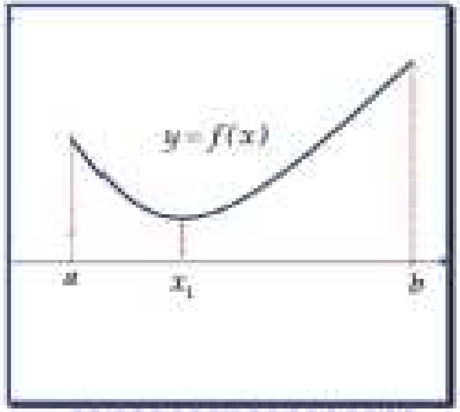
اذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فان الدالة f تكون لها قيمة عظمى (مطلقة) وقيمة صغرى(مطلقة) على هذة الفترة.



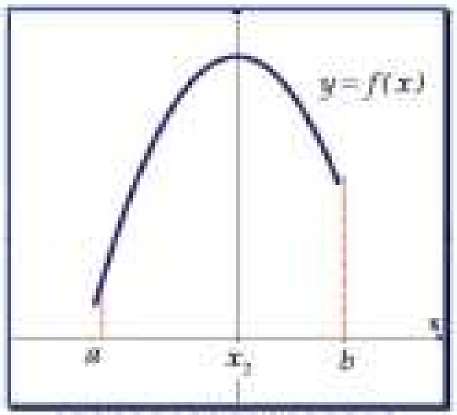
قيمة عظمى وقيمة صغرى
فقط عند نقاط داخلية



قيمة عظمى وقيمة صغرى
عند النقاط الطرفية



قيمة صغرى عند نقطة داخلية
وقيمة عظمى عند نقطة طرفية



قيمة عظمى عند نقطة داخلية
وقيمة صغرى عند نقطة طرفية

ملاحظات:

(1) اذا كانت f لا تحقق الشروط على الفترة المغلقة $[a,b]$ فانه ليس من الضروري ان يكون للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) وقيمة صغرى (مطلقة) على هذة الفترة .

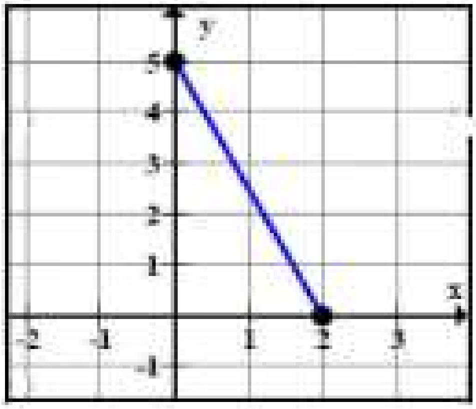
(2) اذا كانت مجال الدالة f الفترة المفتوحة (a,b) فانه لا يوجد للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) وقيمة صغرى (مطلقة) عند الاطراف.

إيجاد القيم القصوى المطلقة والمحلية (بيانياً)

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

اوجد في كل حالة مما يأتي - القيم القصوى (العظمى المطلقة ، الصغرى المطلقة)

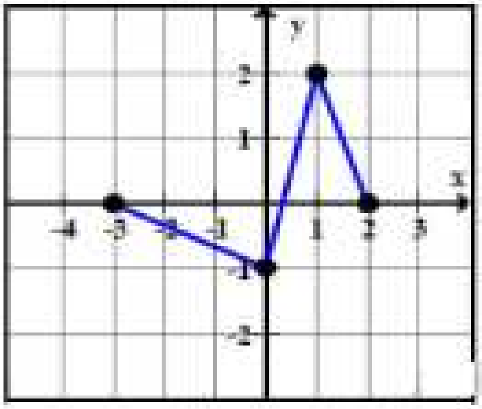
(1)



القيمة العظمى المطلقة 2 عند $x = 1$

القيمة الصغرى المطلقة -1 عند $x = 0$

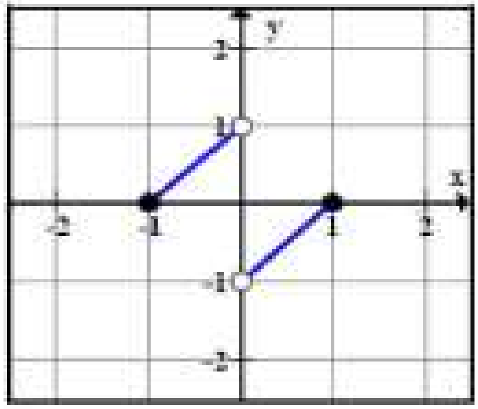
(2)



القيمة العظمى المطلقة 5 عند $x = 0$

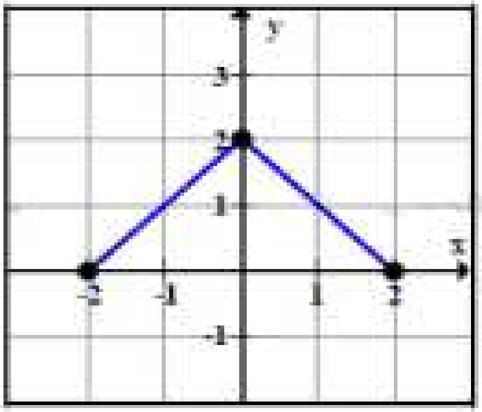
القيمة الصغرى المطلقة 0عند $x = 2$

(3)



لا يوجد قيم قصوى مطلقة

(4)



القيمة العظمى المطلقة 2 عند $x = 0$

القيمة الصغرى المطلقة 0عند $x = 2 , -2$

خطوات إيجاد القيم القصوى (المطلقة) تحليلياً

(1) ايجاد جميع النقاط الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة (النقاط الداخلية).

(2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.

(3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

اختبار القيم

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة ؛ $f(x) = x^3 - 3x + 1$ على الفتر [0,3] ،

$f^{/}(x) = 3x^2 - 3$

$f^{/}(x) = 0$

$3x^2 - 3 \rightarrow 3x^2 = 3$

$x = 1 \quad , x = -1$ مرفوض

$f(1) = -1$

$f(0) = 1$

$f(3) = 19$

القيمة العظمى المطلقة 19

القيمة الصغرى المطلقة -1

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x + \frac{1}{x}$ على الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

$f^{/}(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$f^{/}(x) = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x = 1 \quad , x = -1$ مرفوض

$f^{/}(x)$ غ.م

$x^2 = 0$

$x = 0$ لا ينتمي إلى المجال

النقاط الحرجة هي $x = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$

$f(2) = 2.5$

$f(1) = 2$

القيمة العظمى المطلقة 2.5

القيمة الصغرى المطلقة 2

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ على الفترة $[-3, 2]$.

$f^{/}(x) = \frac{(1)(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f^{/}(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f^{/}(x) = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$,$f^{/}(x)$ غ.م

$x^2 + 1 = 0$ ليس لها حل ,$f^{/}(x)$ غ.م ,

الأعداد الحرجة هي ± 1

$f(-3) = -0.3$

$f(-1) = -0.5$

$f(1) = 0.5$

$f(2) = 0.4$

القيمة الصغرى المطلقة -0.5

القيمة العظمى المطلقة 0.5

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^2 + e^x$ على الفترة $[0,1]$.

$f^{/}(x) = 2x + e^x$

$f^{/}(x) = 0$

$2x + e^x = 0$

لا يوجد حل

لا يوجد أعداد حرجة

$f(0) = 1$ صغرى مطلقة

$f(1) = 1 + e$ عظمى مطلقة

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ على $[0,1]$.

$$f^{/}(x) = \frac{2x}{1 + (x^2)^2}$$

$$f^{/}(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$f^{/}(x)$ غ.م $\rightarrow 1 + x^4 = 0$ لا يوجد حل

الأعداد حرجة

X=0

$f(0) = tan^{-1}0 = 0$ صغرى مطلقة

$f(1) = tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$ عظمى مطلقة

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ على الفترة $[-1,1]$.

$$f^{/}(x) = (4 - x^2)^{-3/2}$$

$$f^{/}(x) = \frac{-1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$f^{/}(x) = \frac{x}{(4 - x^2)^{3/2}}$$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$f^{/}(x)$ غ.م $\rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

الأعداد الحرجة هي $x = 0$

$f(0) = \frac{1}{2}$ صغرى مطلقة

$f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ عظمى مطلقة

$f(-1) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

(4) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x\sqrt{3 - x}$ على الفترة $[-1,3]$.

$$f^{/}(x) = \sqrt{3 - x} + x.\frac{-1}{2\sqrt{3 - x}}$$

$$f^{/}(x) = \frac{2(3 - x) - x}{2\sqrt{3 - x}} = \frac{6 - 2x - x}{2\sqrt{3 - x}}$$

$$f^{/}(x) = \frac{6 - 3x}{2\sqrt{3 - x}}$$

$f^{/}(x) = 0 \rightarrow 6 - 3x = 0$

$x = 2$

$f^{/}(x)$ غ.م $\rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3$

الأعداد الحرجة هي $x = 2,3$

$f(-1) = -2$ صغرى مطلقة

$f(2) = 2$ عظمى مطلقة

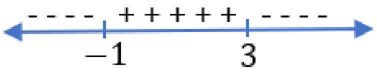
$f(3) = 0$

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ على مجالها.

اولاً

اوجد مجال الدالة

$$3+2x-x^2 \geq 0$$



$$D: [-1,3]$$

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2-2x = 0 \rightarrow x = 1$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow 3+2x-x^2 = 0$

الأعداد الحرجة هي $x = -1,1,3$

$f(1) = 2$ عظمى مطلقة

$f(-1) = 0$ صغرى مطلقة

$f(3) = 0$ صغرى مطلقة

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2e^{-x}$ على $[0,4]$.

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{(2x-x^2)}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow e^x = 0$ ليس لها حل

الأعداد الحرجة هي 0 ,2

$f(0) = 0$ صغرى مطلقة

$$f(2) = \frac{4}{e^2}$$

$f(4) = \frac{16}{e^4}$ عظمى مطلقة

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sin^{-1}(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ لا يوجد حل

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow 1-x^2 = 0$

$x = \pm 1$

الأعداد الحرجة هي ± 1

$f(1) = sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ عظمى مطلقة

$f(-1) = sin^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{2}$ صغرى مطلقة

(4) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sin x+\cos x$ على $[0,2\pi]$.

$f'(x) = cosx - sinx$

$f'(x) = 0 \rightarrow cosx - sinx = 0$

$\frac{sinx}{cosx} = \frac{cosx}{cosx}$: بالقسمة على $\cos x$

$tanx = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ عظمى مطلقة

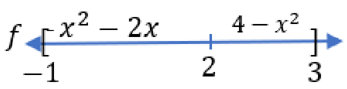
$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ صغرى مطلقة

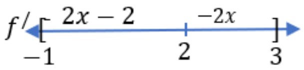
$f(2\pi) = \sin 0 + \cos 0 = 1$

1) اوجد القيم القصوى للدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & -1\le x<2 \\ 4-x^2 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

D:[-1 , 3]





$f^/(x)=0$

$2x-2=0 \to x=1$ ضمن المجال

$-2x=0 \to x=0$ خارج المجال

$f^/(2)$ غ.م

لأن المشتقة اليمنى لا تساوي المشتقة اليسرى عند $x=2$

الأعداد الحرجة هي :

1 , 2

$f(-1)=3$ عظمى مطلقة

$f(1)=-1$

$f(2)=0$

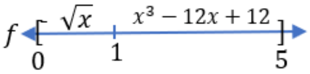
$f(3)=-5$ صغرى مطلقة

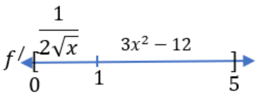
2) اوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x<1 \\ x^3-12x+12 & 1\le x\le 5 \end{cases}$$

اولا"
اوجد مجال الدالة

D:[0 , 5]





$f^/(x)$ غ.م

a) $x=0$ أصفار المقام

b) $x=1$ نقطة تفرع

$f^/(x)=0$

$3x^2-12=0$

$x=2\,, x=-2$ خارج المجال الفرعي

الأعداد الحرجة هي

0 ,1 ,2

$f(0)=0$

$f(1)=1$

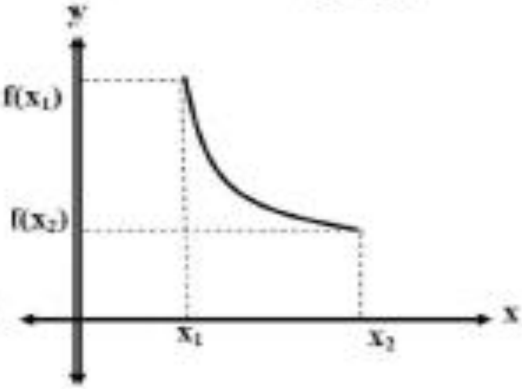
$f(2)=-4$ صغرى مطلقة

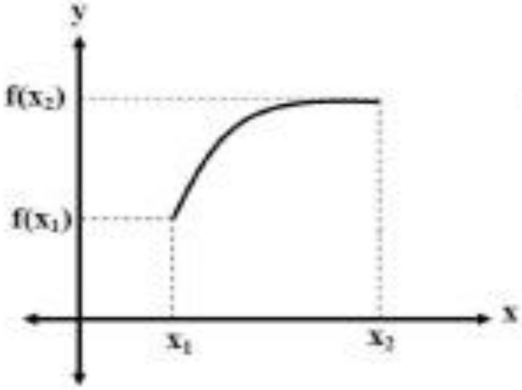
$f(5)=77$ عظمى مطلقة

ملاحظة سيتم مناقشة القيم القصوى المحلية في الدرس الرابع مع التزايد والتناقص

الدوال المتزايدة والمتناقصة

تعريف الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة





دالة متناقصة	دالة متزايدة
$x_1 < x_2$	$x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$	$f(x_1) < f(x_2)$

العلاقة بين سلوك الدالة (التزايد والتناقص) واشارة مشتقة الدالة (f')

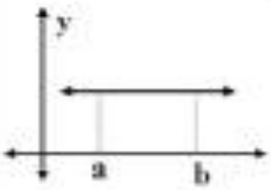
إذا كان

$f'(x) = 0$

$\forall\ x \in (a, b)$

$y = f(x)$ تكون

ثابتة على I

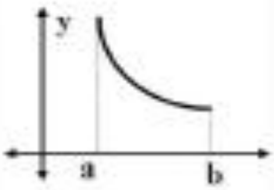


$f'(x) < 0$

$\forall\ x \in (a, b)$

$y = f(x)$ تكون

متناقصة على I

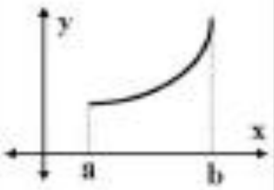


$f'(x) > 0$

$\forall\ x \in (a, b)$

$y = f(x)$ تكون

متزايدة على I



فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (جبرياً)

مباشر

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ ، اوجد

(1) النقاط الحرجة للدالة (2) فترات التزايد والتناقص للدالة (3) القيم القصوى المحلية والمطلقة.

الاعداد الحرجة للدالة هي -1 , 1

فترات التزايد هي $(-\infty,-1),(1,\infty)$

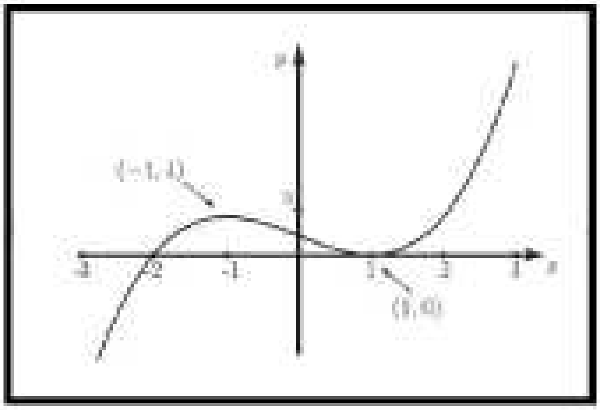
فترات التناقص هي (-1,1)

القيمة العظمى المطلقة لا يوجد

القيمة الصغرى المطلقة لا يوجد

القيمة العظمى المحلية 1

القيمة الصغرى المحلية --1



الاعداد الحرجة للدالة هي -2 , 2

فترات التزايد هي $(-\infty,-2),(2,\infty)$

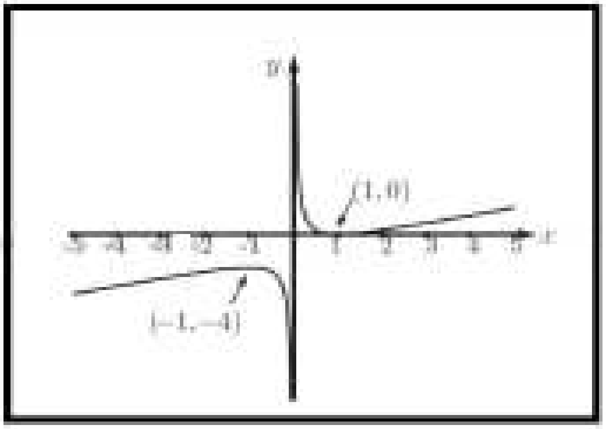
فترات التناقص هي $(-2,0),(0,2)$

القيمة العظمى المطلقة لا يوجد

القيمة الصغرى المطلقة لا يوجد

القيمة العظمى المحلية +2

القيمة الصغرى المحلية -2



الاعداد الحرجة للدالة هي 0 ,1

فترات التزايد هي $(0,\infty)$

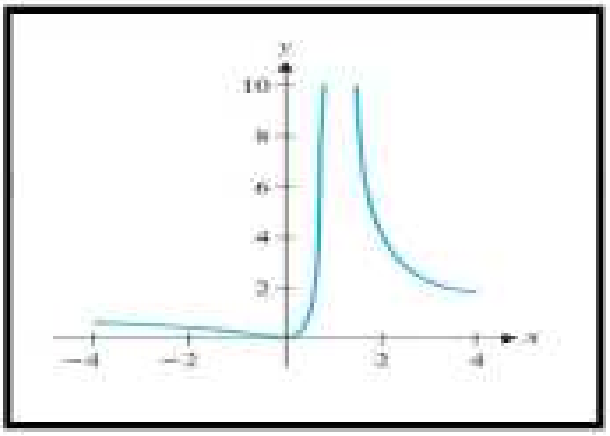
فترات التناقص هي $(-\infty,0),(1,-\infty)$

القيمة العظمى المطلقة لا يوجد

القيمة الصغرى المطلقة لا يوجد

القيمة العظمى المحلية لا يوجد

القيمة الصغرى المحلية 0



فترات التزايد و فترات التناقص للدالة (تحليلياً)

(1) إيجاد جميع النقاط الحرجة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة دالة المشتقة f'.

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f'.

أ) اذا كانت اشارة الدالة f' موجبة (+++) على فترة فان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f' سالبة (- - -)على فترة فان الدالة f تكون متناقصة على هذه

(1) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ المجال : D: R

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0 \,, x = 2$$

الاعداد الحرجة $0 \,, 2$

إشارة $f'(x)$ + + + | − − − − − − − | + + +

0 2

فترات التزايد $(-\infty, 0), (2, \infty)$

فترات التناقص $(0,2)$

(2) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f(\ ) = x - \sqrt{x-1}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2\sqrt{x-1} - 1 = 0$$

$$2\sqrt{x-1} = 1$$

$$x - 1 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$f'(x)$ غ.م

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

الاعداد الحرجة $1, \frac{5}{4}$

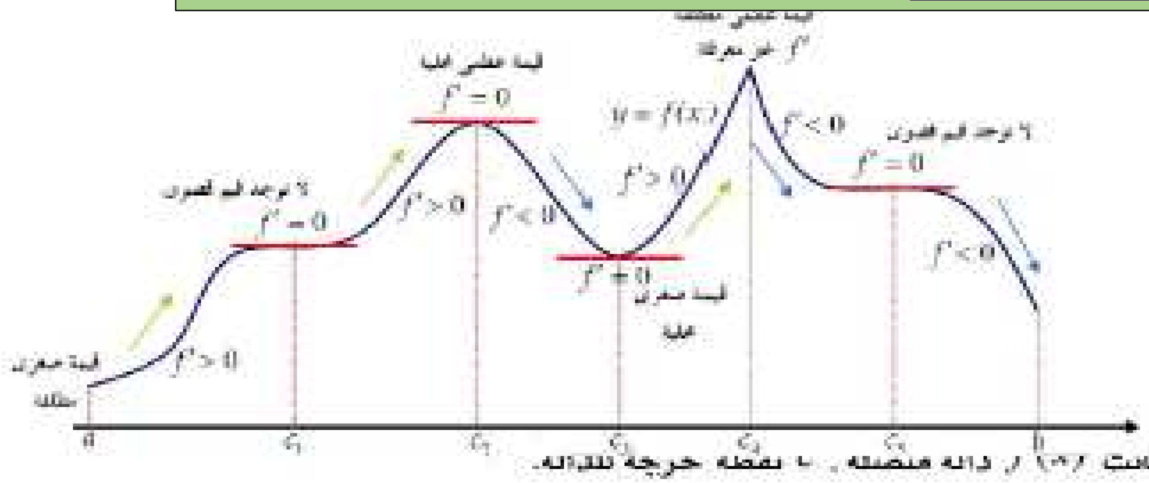
إشارة $f'(x)$ [− − − | + + + +

1 $\frac{5}{4}$

فترات التناقص $\left(1, \frac{5}{4}\right)$

فترات التزايد $\left(\frac{5}{4}, \infty\right)$

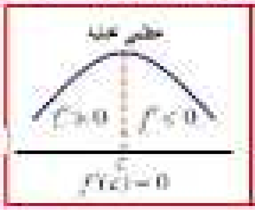
القيم القصوى المحلية اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية



أ) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، c نقطة حرجة للدالة.

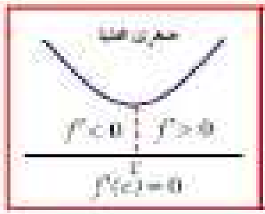
1) فان الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من موجب (+) الى سالب (-)

النقطة الحرجة	c	
	$x < c$	$x > c$
إشارة f'	+	−
سلوك الدالة f	الدالة تزايدية	الدالة تناقصية
	للدالة عند c قيمة عظمى محلية	



2) فان الدالة f يكون لها قيمة صغرى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من سالب (-) الى موجب(+)

النقطة الحرجة	c	
	$x < c$	$x > c$
إشارة f'	−	+
سلوك الدالة f	الدالة تناقصية	الدالة تزايدية
	للدالة عند c قيمة صغرى محلية	



ب) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، a نقطة طرفية يسارية.

(بداية فترة التناقص)

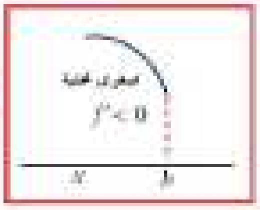
هذا التعريف من خارج الكتاب للفقرة ب

(بداية فترة التزايد)

ج) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، b نقطة طرفية يمينية.

(نهاية فترة التزايد)

هذا التعريف من خارج الكتاب للفقرة ج



(نهاية فترة التناقص)

(1) لتكن : $f(x) = x^4 - 18x^2 + 9$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة   (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة   (ج) القيم القصوى المحلية.

$D = R$

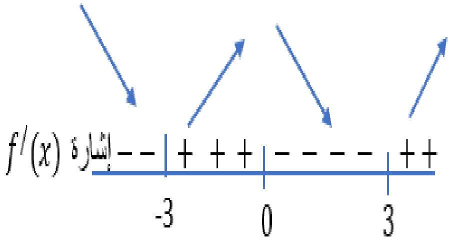
$f'(x) = 0$

$4x^3 - 36x = 0$

$4x(x^2 - 9) = 0$

$x = 0, x = \pm 3$

الأعداد الحرجة : 3- ,3, 0



فترات التناقص $(-\infty,-3),(0,3)$

فترات التزايد $(-3,0),(3,\infty)$

صغرى محلية 72 – عند $x = -3,3$

عظمى محلية 9 عند $x = 0$

(2) لتكن : $f(x) = x\sqrt{4-x}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة   (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة   (ج) القيم القصوى المحلية.

$D: (-\infty, 4]$

$$f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$f'(x) = \frac{2(4-x) - x}{2\sqrt{4-x}}$$

$f'(x) = 0$

$2(4-x) - x = 0$

$8 - 2x - x = 0$

$3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$

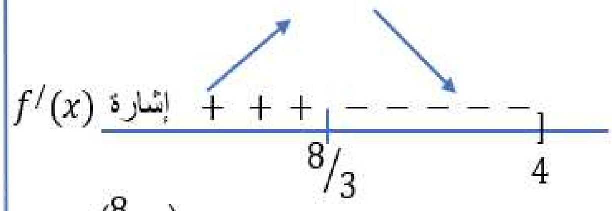
$f'(x)$ ع.م

$4 - x = 0$

$x = 4$

الاعداد الحرجة

$\frac{8}{3}, 4$



فترات التناقص $(0,3)$, $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$

فترات التزايد $(-\infty, 3)$

عظمى محلية $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ عند $x = \frac{8}{3}$

صغرى محلية 0 عند $x = 4$

(1) لتكن : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D: R$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$

$1-x^2=0 \ \rightarrow x=\pm 1$

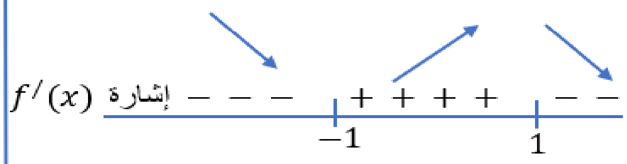
ع.م $f'(x)$

$x^2+1=0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة

$x=\pm 1$



فترات التناقص $(-\infty\,,-1), (1,\infty)$

فترات التزايد $(-1{,}1)$

عظمى محلية $\dfrac{1}{2}$ عند $x=1$

صغرى محلية $\dfrac{-1}{2}$ عند $x=-1$

(2) لتكن : $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D: R$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+(x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$$

$D: (-\infty, 4]$

$f'(x)=0$

$2x=0 \ \rightarrow x=0$

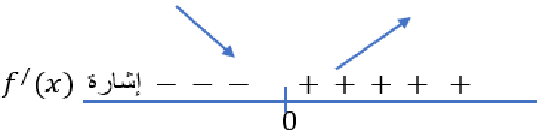
ع.م $f'(x)$

$1+x^4=0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة

$x=0$



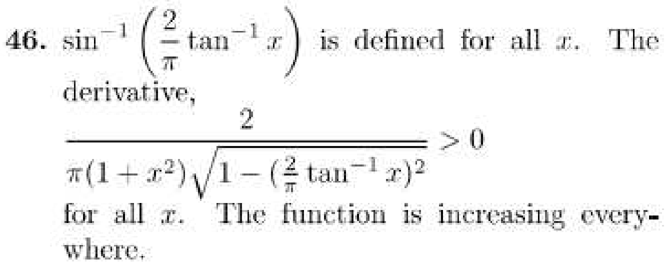
فترات التناقص $(-\infty\,,0)$

فترات التزايد $(0,\infty)$

عظمى محلية : لا يوجد

صغرى محلية 0 عند $x=0$

(3) بين ان الدالة $f(x)=\sin^{-1}(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x)$ متزايدة على مجالها (R)



46. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)$ is defined for all x. The derivative,

$$\frac{2}{\pi(1+x^2)\sqrt{1-(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x)^2}}>0$$

for all x. The function is increasing everywhere.

(1) لتكن : $f(x)=x^2e^{-x}$ اوجد.

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D:R$

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})$

$f'(x)=e^{-x}(2x-x^2)$

$f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$

$f'(x)=0$

$2x-x^2=0 \to x=0,2$

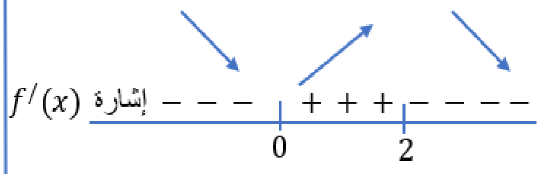
$f'(x)$ غ.م

$e^x=0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة

$x=0\ ,2$



فترات التناقص $(-\infty,0)\ ,(2,\infty)$

فترات التزايد $(0,2)$

عظمى محلية: $\frac{4}{e^2}$ عند $x=2$

صغرى محلية 0 عند $x=0$

(2) لتكن : $f(x)=\sin x+\cos x$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

$D:R$

$f'(x)=cosx-sinx$

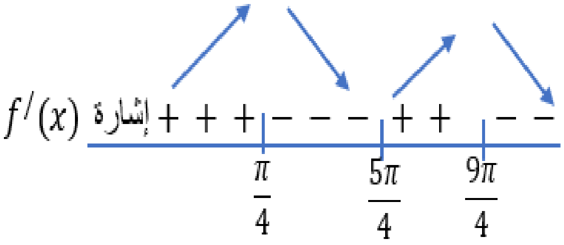
$f'(x)=0$

$sinx-cosx=0$

$sinx=cosx \to tanx=1$

$x=tan^{-1}1 \to x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{4}$ الاعداد الحرجة $n\in Z$



فترات التناقص $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)+n\pi$

فترات التزايد $\left(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right)+n\pi$

نظرية القيمة القصوى المحلية الوحيدة

اذا كانت الدالة f متصلة على فترة مفتوحة وللدالة قيمة قصوى محلية وحيدة فانها تكون مطلقة

تستخدم هذه النظرية في مسائل القيم المثلى

1) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x) = xe^{-x}$

$D: R$

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x})$$

$$f'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$1 - x = 0 \rightarrow x = 1$$

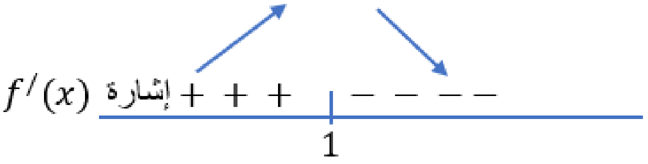
$f'(x)$ ع.م

$e^x = 0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة

$x = 1$



فترات التناقص $(1, \infty)$

فترات التزايد $(-\infty, 1)$

الدالة متصلة ولها قيمة عظمى محلية وحيدة و هي مطلقة

وهي $\frac{1}{e}$ عند $x = 1$

2) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$D: (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{x.\frac{1}{x} - (1).lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$1 - lnx = 0$$

$$lnx = 1 \rightarrow x = e$$

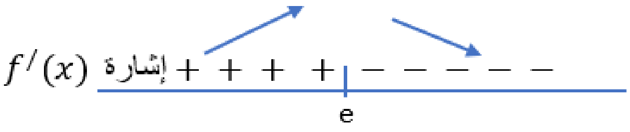
$f'(x)$ ع.م

$x^2 = 0$

$x = 0$ خارج المجال

الاعداد الحرجة

$x = e$



الدالة متصلة على مجالها

فترات التناقص $(0, e) + n\pi$

فترات التزايد (e, ∞)

قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

وهي $\frac{1}{e}$ عند $x = e$

فترات التزايد و التناقص بيانياً من الدالة $f^{/}$

الخطوات

ايجاد جميع النقاط الحرجة وتعينها على خط الاعداد.

أ) اذا كان بيان الدالة f' فوق محور السينات فان اشارة f' موجبة (++) اي ان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

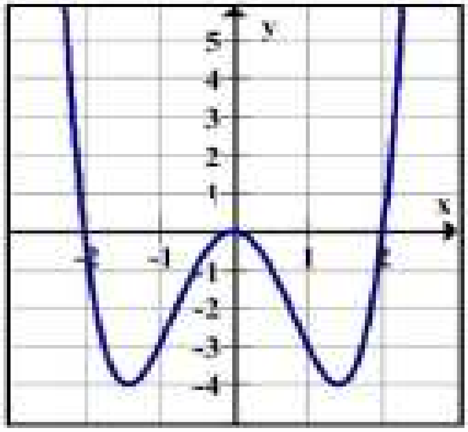
ب) اذا كان بيان الدالة f' تحت محور السينات فان اشارة f' سالبة (- -)اي ان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة

يفضل تحويل الرسم الى خط اعداد (اشارة المشتقة)

تطابق مع الرسم

فوق ← موجب

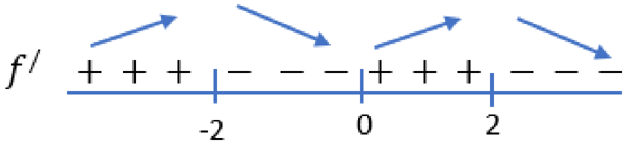
تحت ← سالب



اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في ايجاد

1) فترات التزيد والتناقص للدالة $f(x)$

2) قيم x التي عندها القيم القصوى المحلية للدالة ثم حدد نوعها.

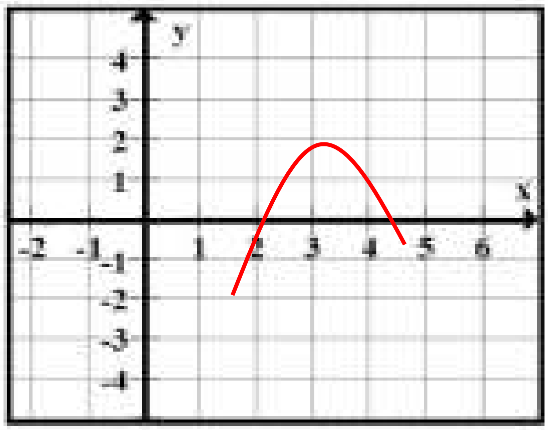


فترات التناقص : $(-2,0), (2, \infty)$

فترات التزايد : $(-\infty, -2), (2, \infty)$

عظمى محلية عند $x = -2$ وصغرى محلية عند $x = 2$

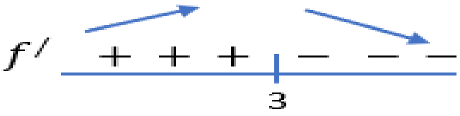
1) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان الدالة $f(x)$



$f(3)=2 \quad , \quad f'(3)=0$

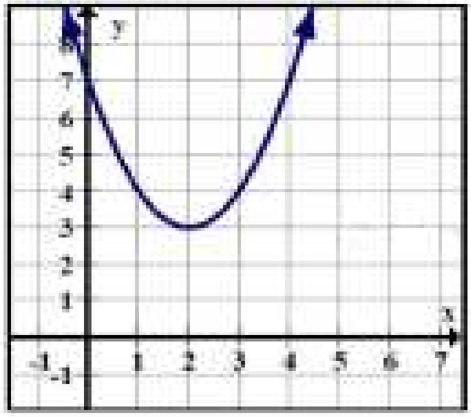
$f'(x)>0 \quad , \quad x<3$

$f'(x)<0 \quad , \quad x>3$

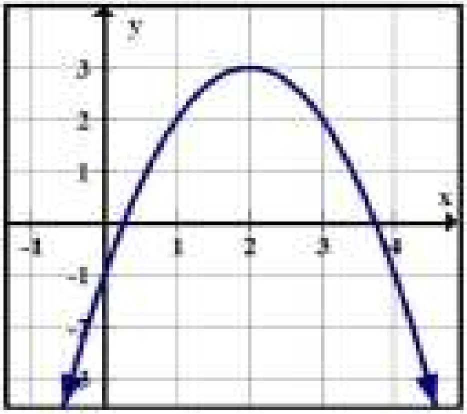


2) استخدم المعطيات : $f'(2)=0$ و $f(2)=3$ في رسم المنحنى في كل من الحالات التالية :

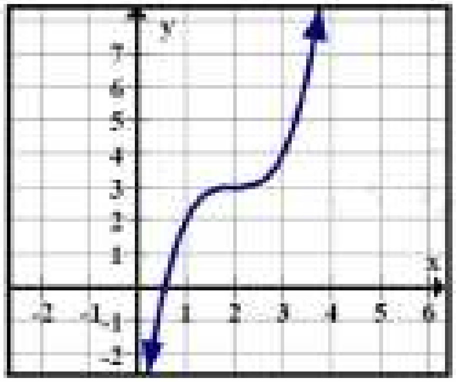
$f'(x)<0 \ , x<2 \ , f'(x)>0 \ , x>2$



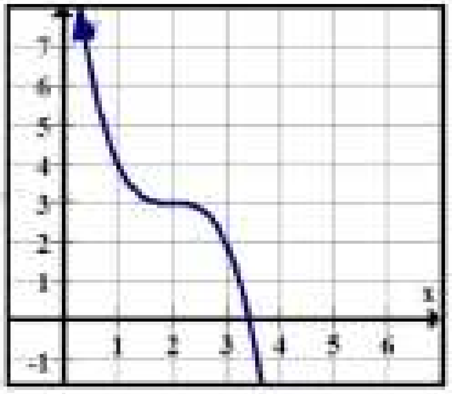
$f'(x)>0 \ , x<2 \ , f'(x)<0 \ , x>2$



$f'(x)>0 \ , \ x \neq 2$



$f'(x)<0 \ , \ x \neq 2$



(1) اذا كانت f دالة متزايدة لها معكوس f^{-1} ، فاثبت ان الدالة f^{-1} متزايدة

$$\therefore\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big((f^{-1})'(x)\big)} > 0\ \therefore\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big((f^{-1})'(x)\big)} > 0$$

الإثبات : بما إن f متزايدة فإن $f'(x) > 0$ لكل قيم x

$\therefore$ الدالة f^{-1} دالة متزايدة.

(2) اذا كانت f و g دوال متزايدة، فاثبت ان الدالة $f(g(x))$ دالة متزايدة

الإثبات : بما أن f, g متزايدة فإن $g' > 0 , f' > 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'\big(g(x)\big)}_{\text{موجب}}.\underbrace{g'(x)}_{\text{موجب}}$$

$\therefore$ الدالة $f\big(g(x)\big)$ دالة متزايدة

(3) اذا كانت $f'(x) > g'(x)$ لكل $x > a$ ، فاثبت ان $f(x) > g(x)$ حيث $f(a) = g(a)$

الإثبات :لتكن $h(x) = f(x). -g(x)$

$h'(x) = f'(x). -g'(x) > 0$

$\therefore$ الدالة h متزايدة لكل $x > a$

$h(x) > h(a)\ \therefore$

$f(x) - g(x) > f(a) - g(a)$

$f(x) - g(x) > 0$

$f(x) > g(x)$

(4) استخدم السؤال السابق في اثبات ان $x - 1 > \ln x$ لكل $x > 1$

الإثبات :لتكن $f(x). = x - 1$

$f'(x). = 1$

$g(x) = lnx$

$g'(x). = \frac{1}{x}$

لكل $x > 1$ فإن $\frac{1}{x} < 1$

$g'(x) > f'(x)$

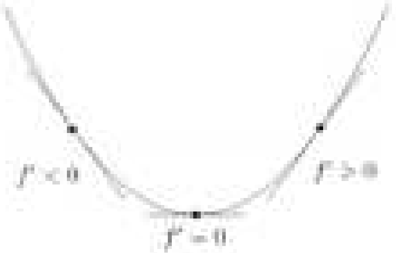
$g(x) < f(x)$

$f(x) > g(x)$

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الخامس : التقعر واختبار المشتقة

التقعر:

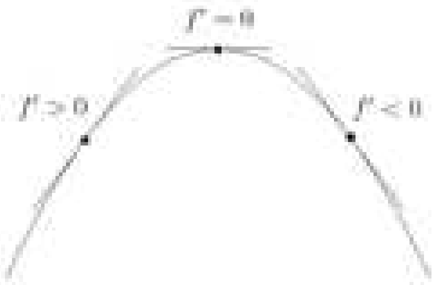
الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ يكون مقعراً للاعلى على فترة مفتوحة I اذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسته.



او $y'=f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة I.

او $\underline{f''(x)>0}$ على الفترة المفتوحة I.

الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ يكون مقعراً للاسفل على فترة مفتوحة I اذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسته



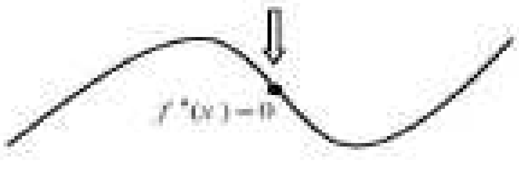
او $y'=f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة I .

او $\underline{f''(x)<0}$ على الفترة المفتوحة I.

نقطة الانعطاف

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) والتمثيل البياني يغير اتجاه التقعر عند النقطة $c\in(a,b)$ فان النقطة $(c,f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

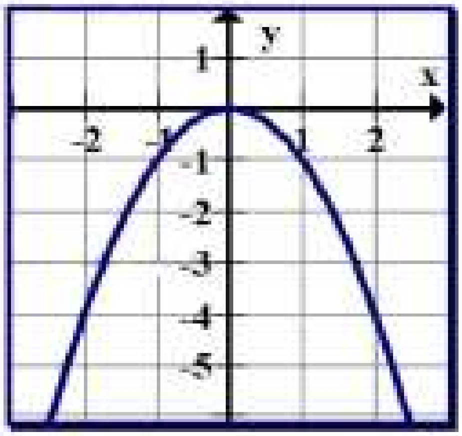
ملاحظة: اذا كانت الدالة غير متصلة عند $x=c$ فانها لا تعتبر نقطة انقلاب



فترات التقعر (بيانياً)

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، اوجد في كل حالة مما ياتي .

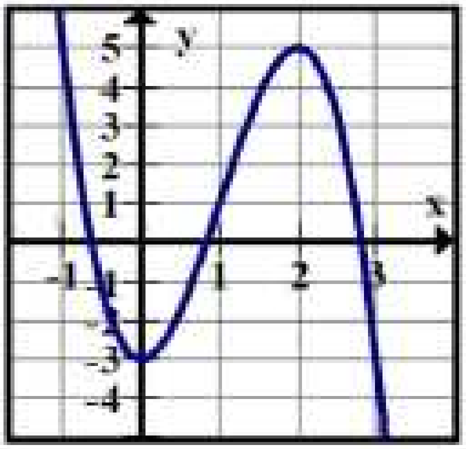
(1) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (2) نقاط الانعطاف.



فترات التقعر لأسفل

$(-\infty,\infty)$

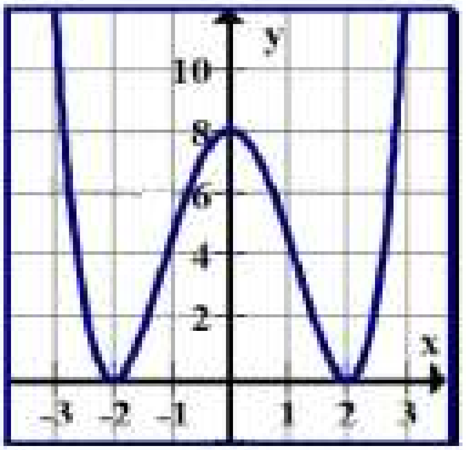
لا يوجد نقاط انقلاب



فترات التقعر لأعلى $(-\infty,1)$

فترات التقعر لأسفل $(1,\infty)$

نقاط الانقلاب $(1,1)$

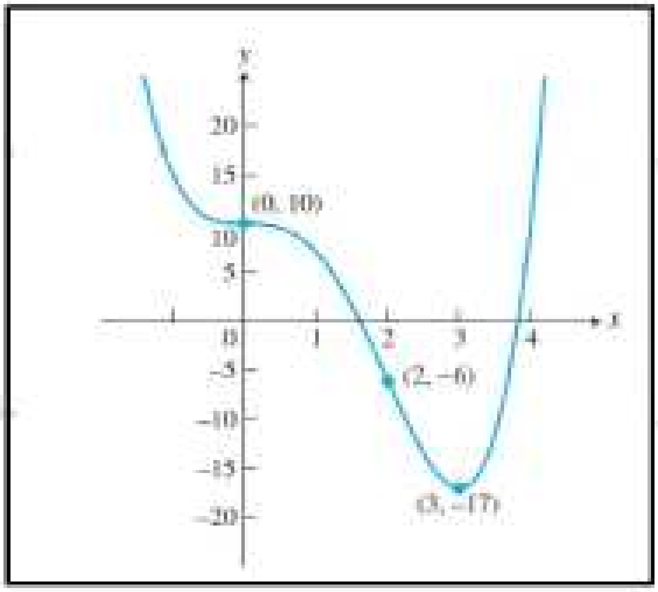


فترات التقعر لأعلى $(-\infty,-1),(1,\infty)$

فترات التقعر لأسفل $(-1,1)$

نقاط الانقلاب $(1,4),(-1,4)$

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة

0,3

(2) اوجد فترات التناقص للدالة.

$(-\infty, 3)$

(3) اوجد فترات التزايد للدالة.

$(3, \infty)$

(4) اوجد القيم القصوى المطلقة وبين نوعها.

(0,2)

(5) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل.

$(-\infty, 0), (2, \infty)$

(6) اوجد نقاط الانعطاف للدالة.

$(2, -6), (0,10)$

(7) اوجد قيم x التي يكون عندها اشارة الدالة f' والدالة f'' سالبتين

$(0,2)$

فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1)**إيجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفراً أو غير موجودة ونعينها على خط الأعداد**

2) دراسة إشارة دالة المشتقة الثانية $f^{//}$

3) تحديد سلوك الدالة f من خلال إشارة الدالة $f^{//}$

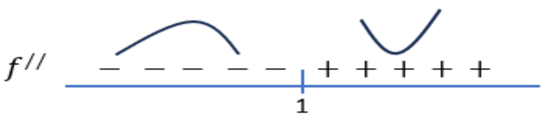
4) إذا كانت إشارة الدللة $f^{//}$ موجبة $(++)$ على فترة فإن الدالةf تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة

5) إذا كانت إشارة الدللة $f^{//}$ سالبة$(--)$ على فترة فإن الدالةf تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة

(1) لتكن : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

أوجد (أ)فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل (ب) نقاط الانعطاف

$$f^{/}(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f^{//}(x) = 6x - 6$$
$$f^{//}(x) = 0$$
$$6x - 6 = 0$$
$$x = 1$$



للأسفل : $(-\infty, 1)$

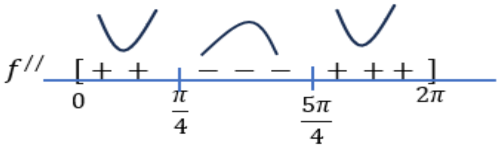
للأعلى :$(1, \infty)$

نقاط الانعطاف $(1, -1)$

(2)لتكن : $f(x) = sinx - cosx$ على $[0,2\pi]$

أوجد (أ)فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل (ب) نقاط الانعطاف

$$f^{/}(x) = cosx + sinx$$
$$f^{//}(x) = -sinx + cosx$$
$$f^{//}(x) = 0$$
$$-sinx + cosx = 0$$
$$sinx = cosx$$
$$\frac{sinx}{cosx} = \frac{cosx}{cosx} \rightarrow tanx = 1$$
$$x\,\epsilon Q_1 \;\rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$
$$x\,\epsilon Q_3 \;\rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$



للأسفل : $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

للأعلى: $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

نقاط الانعطاف $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right),$

(1) لتكن: $f(x) = (x+2)^{\frac{1}{5}} + 4$

أوجد (أ)فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = \frac{1}{5}(x+2)^{\frac{-4}{5}}$

$f''(x) = \frac{-4}{25}(x+2)^{\frac{-9}{5}}$

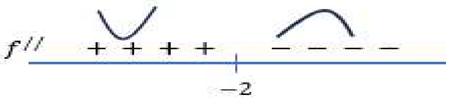
$f''(x) = \frac{-4}{25(x+2)^{\frac{9}{5}}}$

$f''(x) = 0$ لا يوجد حل

$f''(x)$ غ . م

$x + 2 = 0$

$x = -2$ نقطة شك



للأسفل : $(-2, \infty)$

للأعلى: $(-\infty, -2)$

نقاط الانعطاف $(-2,4)$

(2)لتكن : $f(x) = x^2 + 4sinx$ على $[0,2\pi]$

أوجد (أ)فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل (ب) نقاط الانعطاف

$f'(x) = 2x + 4cosx$

$f''(x) = 2 - 4sinx$

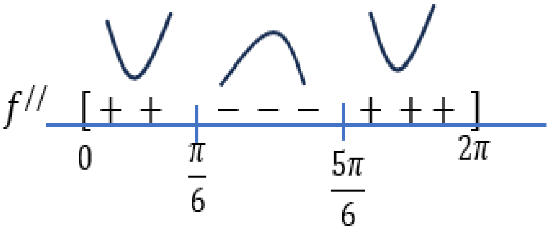
$f''(x) = 0$

$2 - 4sinx = 0$

$sinx = \frac{1}{2}$

$x \in Q_1 \to x = \frac{\pi}{6}$

$x \in Q_2 \to x = \frac{5\pi}{6}$



للأسفل : $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

للأعلى: $\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$

نقاط الانعطاف $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi^2}{36} + 2\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{25\pi^2}{36} + 2\right),$

السؤال الشامل

أكمل الخريطة التالية :

$f(x) = x^3 - 6x^2$

$f^{/}(x) = 3x^2 - 12x$

مجموعة قيم X التي تكون للدالة

قيمة حرجة

x =0

X=4

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0,4)$	$(4, \infty)$
اشارة$f^{/}(x)$	+ + +	- -	+ + +
سلوك$f(x)$	تزايد	تناقص	تزايد

يوجد قيمة عظمى محلية عند X تساوي 0

يوجد قيمة صغرى محلية عد X تساوي 4

$f^{//}(x)$=6x-12

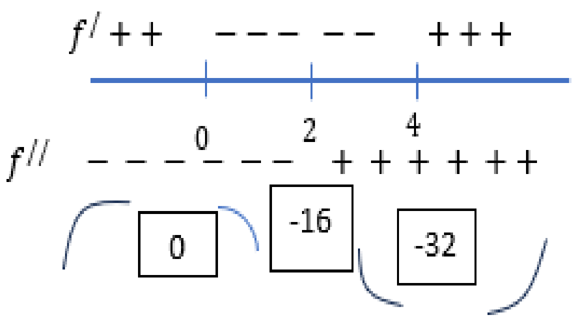
اصفار المشتقة الثانية

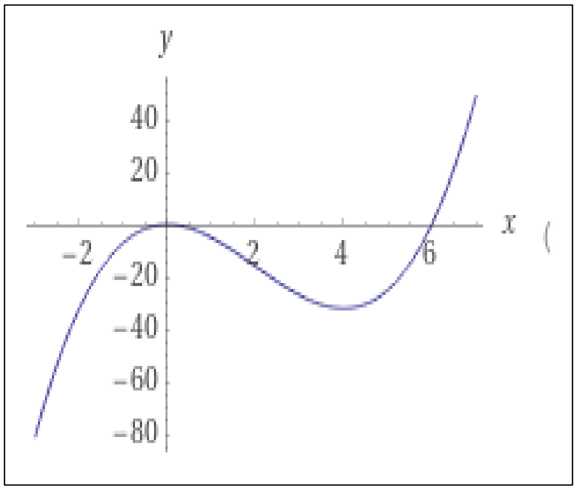
X=2

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة$f^{//}(x)$	- -	+ + + +
سلوك$f(x)$	للأسفل	للأعلى

يوجد نقطة انقلاب للدالة عند X تساوي 2

استفد من المخطط السابق في رسم بيان الدالة$f(x)$

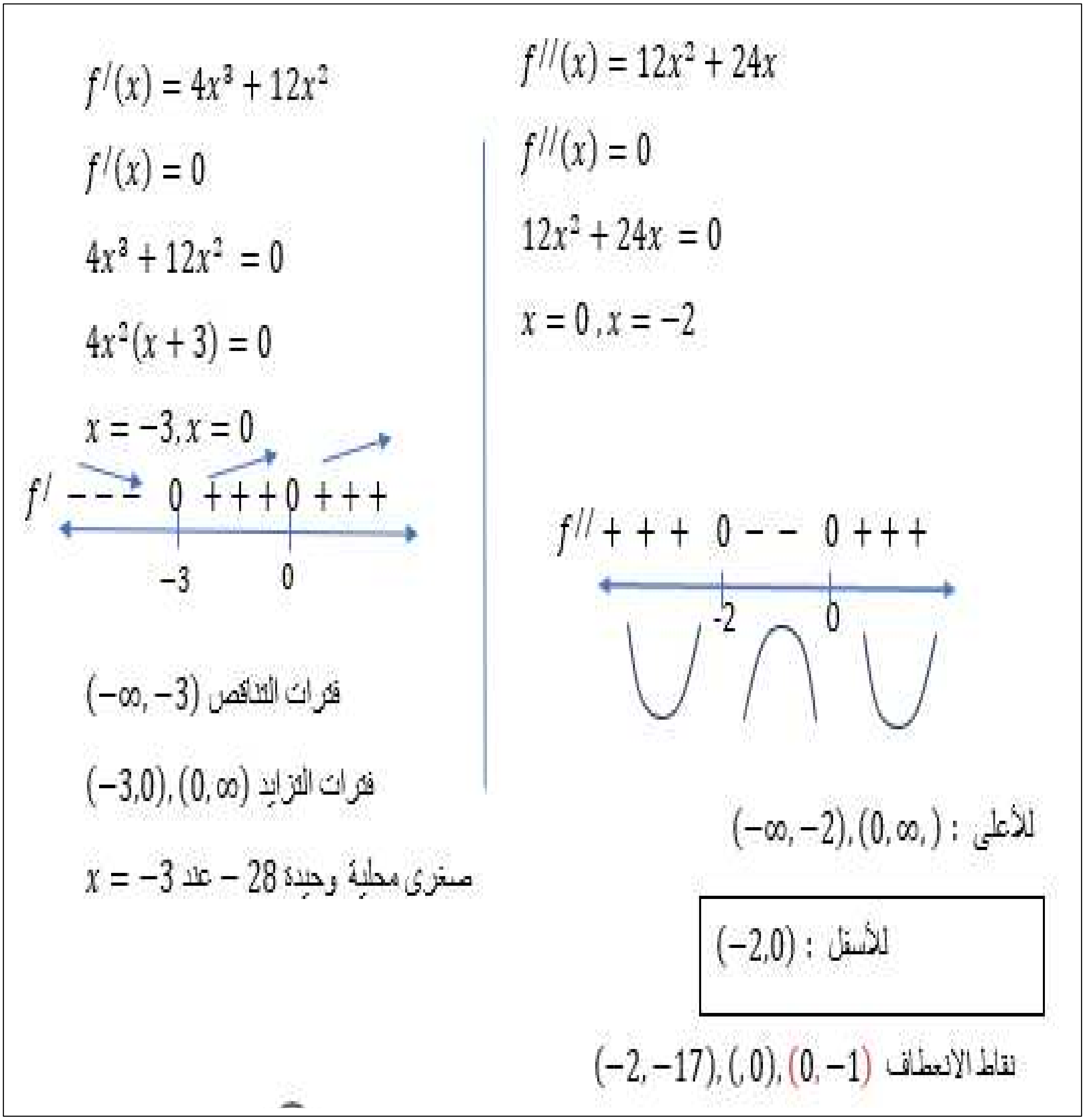




(1) لتكن: $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

أوجد (أ)فترات التزايد والتناقص للدالة (ب)القيم القصوى المحلية وبين نوعها

(ج)فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل (د) نقاط الانعطاف (هـ)ارسم الدالة



$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0$

$4x^3 + 12x^2 = 0$

$4x^2(x+3) = 0$

$x = -3, x = 0$

فترات التناقص $(-\infty, -3)$

فترات التزايد $(-3,0), (0, \infty)$

صغرى محلية وحيدة -28 عند $x = -3$

$f''(x) = 12x^2 + 24x$

$f''(x) = 0$

$12x^2 + 24x = 0$

$x = 0, x = -2$

للأعلى : $(-\infty, -2), (0, \infty,)$

للأسفل : $(-2,0)$

نقاط الانعطاف $(-2, -17), (,0), (0, -1)$

(1) لتكن : $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ حيث $f^{/}(x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}}$ و $f^{//}(x) = (x^2-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$

أوجد (أ)فترات التزايد والتناقص للدالة (ب)القيم القصوى المحلية وبين نوعها

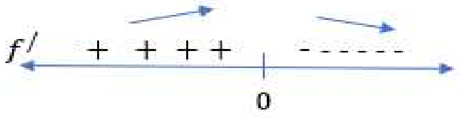
(ج)فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل (د) نقاط الانعطاف

$f^{/}(x) = \frac{-2x}{e^{x^2/_2}}$

$f^{/}(x) = 0$

$x = 0$

$f^{/}(x)$ غ.م $\rightarrow e^{x^2/2}$ ليس لها حل



الأعداد الحرجة هي $x = 0$

فترات التزايد $(-\infty, 0)$

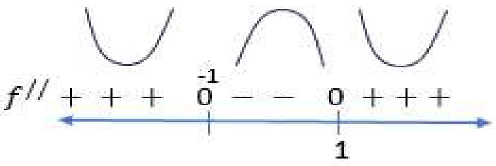
فترات التناقص $(0, \infty)$

عظمى محلية وحيدة عند $x = 0$ 1

$f^{//}(x) = \frac{x^2-1}{e^{x^2/_2}}$

$(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$f^{//}(x) = 0 \rightarrow e^{x^2/2}$ ليس لها حل

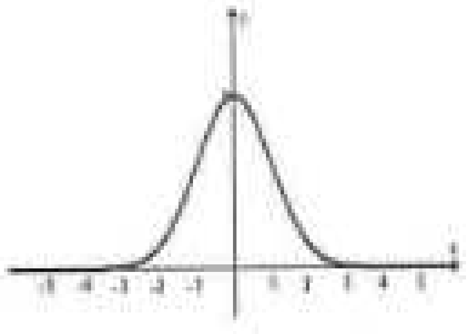


للأعلى : $(-\infty, -1), (1, \infty)$

للأسفل : $(-1,1)$

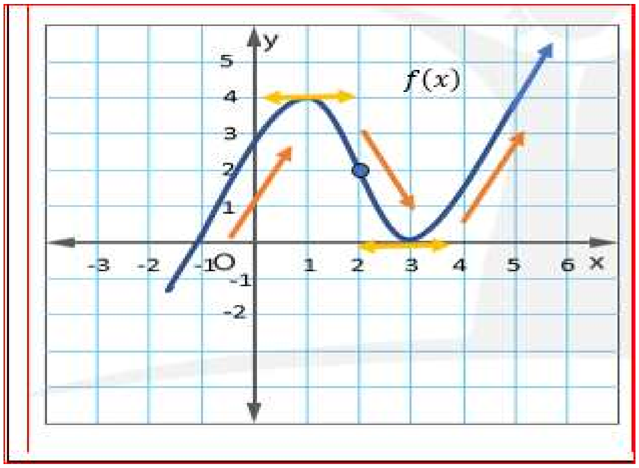
نقاط الانعطاف $\left(-1, e^{\frac{-1}{2}}\right), \left(1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$

خط تقارب أفقي $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$



$f(x) = e^{-x^2/2}$

الربط بين منحنى الدالة ومنحنى المشتقة الأولى ومنحنى المشتقة الثانية



سلوك الدالة $f(x)$ من بيان الدالة $f(x)$

فترات التزايد للدالة f $(3,\infty)$, $(-\infty,1)$

فترات التناقص للدالة f $(1,3)$

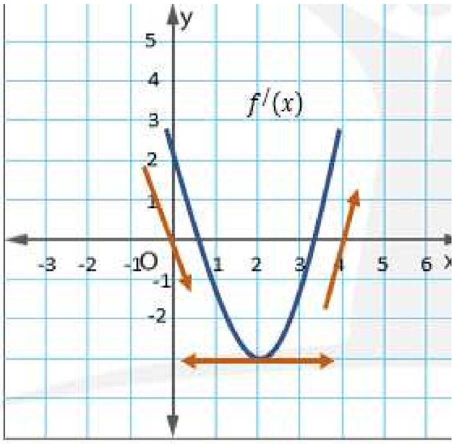
فترات التقعر لاعلى للدالة f $(2,\infty)$

فترات التقعر لاسفل للدالة f $(-\infty,2)$

نقطة الانقلاب$(2,2) = (2,f(2))$

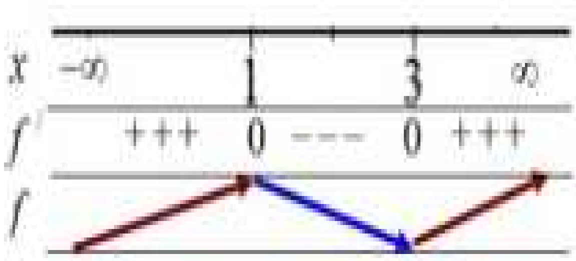
$f^{/}(1) = 0 , f^{/}(3) = 0$

سلوك الدالة $f(x)$ من بيان الدالة $f^{/}(x)$

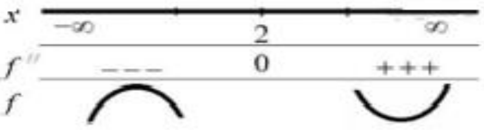


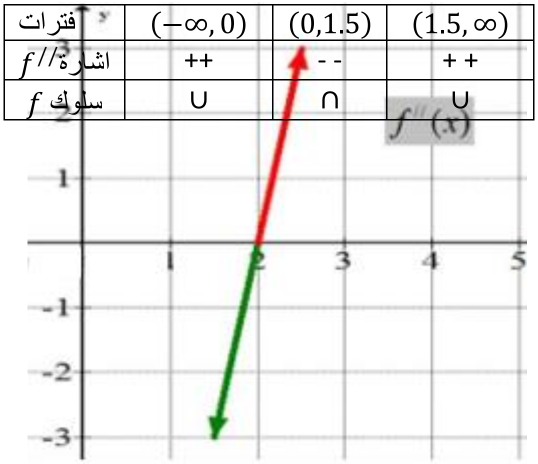
(1) إذا كان$f^{/}(x)$ فوق محور السينات فإن إشارة $f^{/}(x)$ موجبة

(2) إذا كان$f^{/}(x)$ تحت محور السينات فإن إشارة $f^{/}(x)$ سالبة



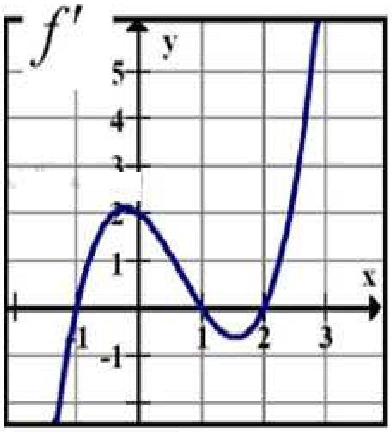
سلوك الدالة $f(x)$....من بيان الدالة $f''(x)$





فترات	$(-\infty,0)$	$(0,1.5)$	$(1.5,\infty)$
اشارة$f^{//}$	++	- -	+ +
سلوك f	∪	∩	∪

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في ايجاد



1) النقاط الحرجة.

-1, 1 , 2

2) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة.

$(2,\infty)$	$(1,2)$	$(-1,1)$	$(-\infty,-1)$	فترات
+ +	- -	+ +	- -	اشارة f'
تزايد ↗	تناقص ↘	تزايد ↗	تناقص ↘	سلوك f

فترات التناقص $(-\infty,-1),(1,2)$

فترات التزايد $(-1,1),(2,\infty)$

3) اوجد قيم x التي عندهاالقيم القصوى المحلية وبين نوعها.

قيم صغرى محلية $(-1,f(-1)),(2,f(2))$

قيمة عظمى محلية $(1,f(1))$

4) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل.

$(1.5,\infty)$	$(0,1.5)$	$(-\infty,0)$	فترات
+ +	- -	++	اشارة f''
∪	∩	∪	سلوك f

التقعر لأعلى $(-\infty,0),(1.5,\infty)$

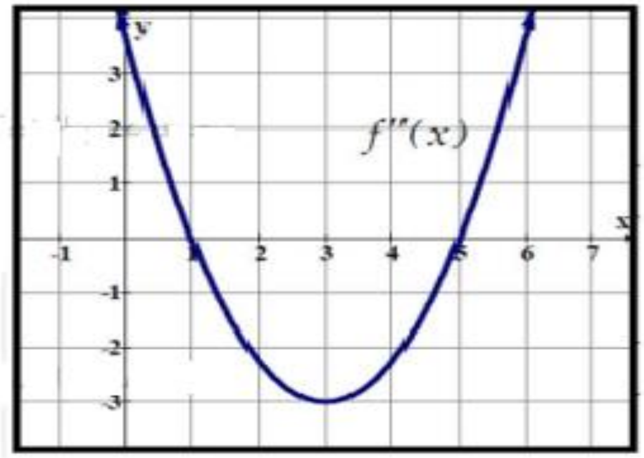
التقعر لأسفل $(0,1.5)$

5) اوجد قيم x التي عندها نقاط الانعطاف للدالة.

عند $x = 0 , x = 1.5$

(1)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f^{//}(x)$ للدالة المتصلة $f^{/}(x)$ في إيجاد

أ)فترات التقعر للاعلى والاسفل



$(5,\infty)$	$(1,5)$	$(-\infty,1)$	الفترات
+ +	-	+ +	إشارة $f^{//}$
∪	∩	∪	سلوك f

التقعر لأعلى $(-\infty,1),(5,\infty)$

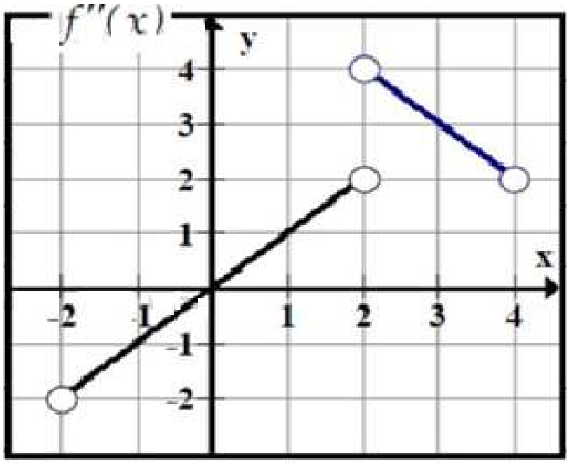
التقعر لأسفل $(1,5)$

ب)قيم x التي عندها نقاط الانقلاب

عند X = 1 ,x =5

(2)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f^{//}(x)$ للدالة المتصلة $f^{/}(x)$ في إيجاد

أ)فترات التقعر للاعلى والاسفل



للأسفل (-2,0)

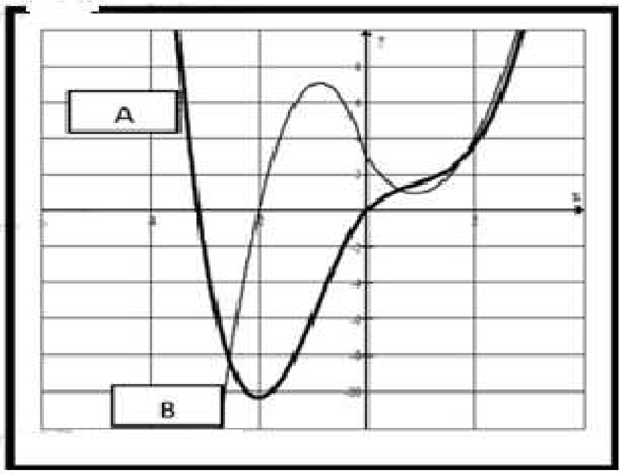
للأعلى (0,4)

ب)قيم x التي عندها نقاط الانقلاب

عند X =0

$(2,4)$	$(0,2)$	$(-2,0)$	الفترات
-	+ +	- -	إشارة $f^{//}$
∩	∪	∩	سلوك f

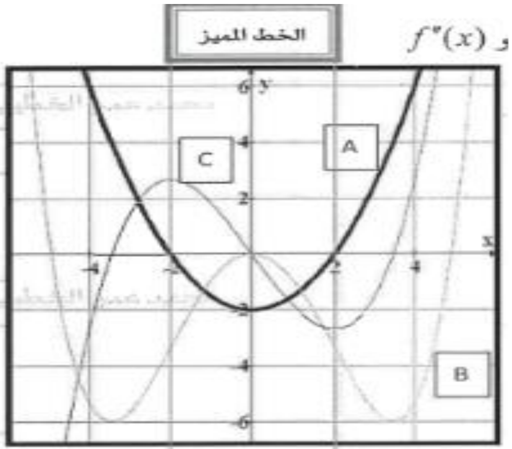
(أ)حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f^{/}(x)$



$A \rightarrow f$

$B \rightarrow f^{/}$

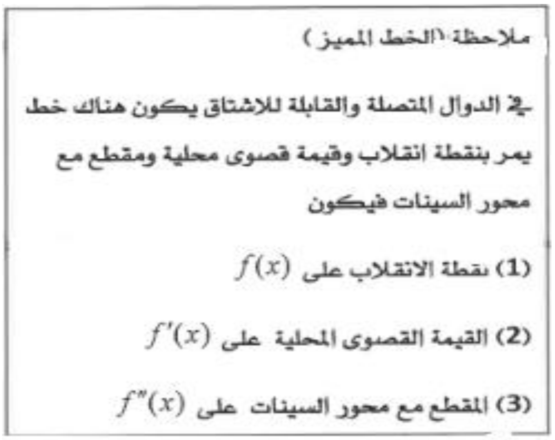
(ب)حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f^{/}(x)$ و $f^{//}(x)$



$B \rightarrow f$

$C \rightarrow f^{/}$

$A \rightarrow f^{//}$



ملاحظة :الخط المميز)

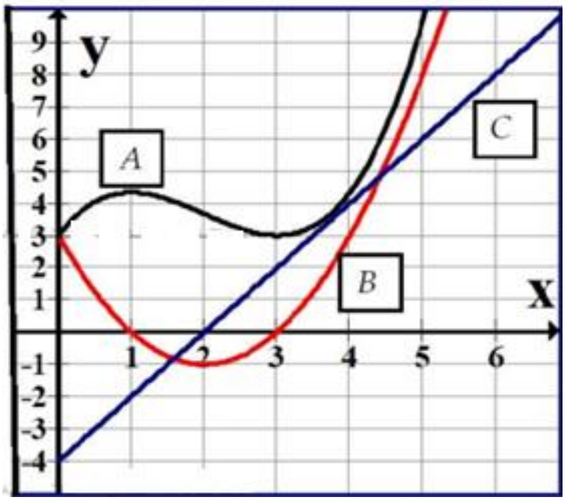
في الدوال المتصلة والقابلة للاشتقاق يكون هناك خط يمر بنقطة انقلاب وقيمة قصوى محلية ومقطع مع محور السينات فيكون

(1) نقطة الانقلاب على $f(x)$

(2) القيمة القصوى المحلية على $f'(x)$

(3) المقطع مع محور السينات على $f''(x)$

(ج)حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f^{/}(x)$ و $f^{//}(x)$



$A \rightarrow f$

$B \rightarrow f^{/}$

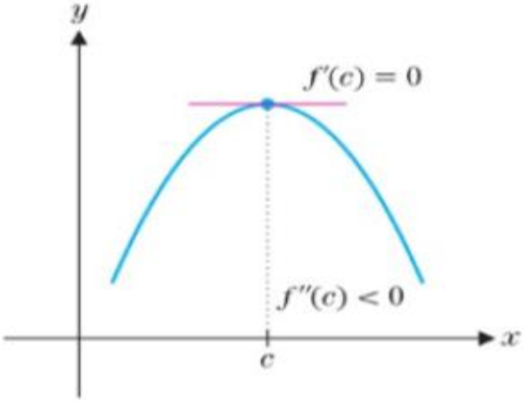
$C \rightarrow f^{//}$

النظرية 5.2 (اختبار المشتقة الثانية)

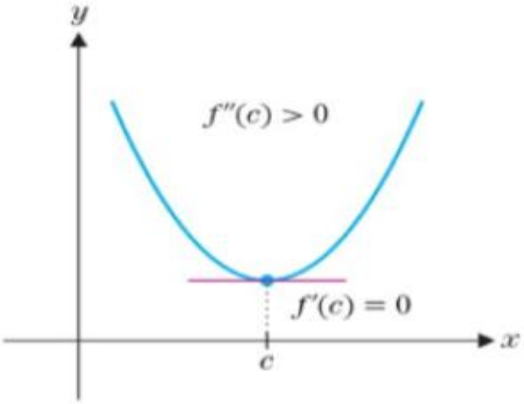
على فرض أن f'' متصلة في الفترة (a, b) و$f'(c) = 0$. لكل $c \in (a, b)$.

(i) إذا كانت $f''(c) < 0$. فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.

(ii) إذا كانت $f''(c) > 0$. فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.



قيمة عظمى محلية



قيمة صغرى محلية

ملاحظة :لا يجوز استخدام اختبار المشتقة الثانية إذا كانت$\boldsymbol{f^{/}(x)}$غير موجودة

ملاحظة :ا يفشل اختبار المشتقة الثانية إذا كانت$\boldsymbol{f^{/}(x)}$ ويجب الرجوع لاختبار المشتقة الاولى

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية الدالة $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x}$

$f^{/}(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$f^{/}(x) = 0$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$(3x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 3$, ء $= \frac{1}{3}$

$f^{//}(x) = 6x - 10$

$f^{//}(3) = 6(3) - 10 = 8 > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند X = 3 هي 9-

$$f^{//}\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 10 = -8 < 0$$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{1}{3}$ هي $\frac{13}{29}$

(2) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية الدالة $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 12x - 5}$

$f^{/}(x) = 3x^2 - 12$

$f^{/}(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$f^{//}(x) = 6x$

$f^{//}(-2) = 6(-2) = -12 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند X = - 2

هي 11

$f^{//}(2) = 6(2) = 12 > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند X = 2

هي 21 -

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية الدالة $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 4x^3 - 1}$

$f^{/}(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f^{/}(x) = 0$

$4x^3 + 12x^2 = 0 \rightarrow 4x^2(x+3) = 0$

$x = 0, x = -3$

$f^{//}(x) = 12x^2 + 24x$=12x(x+2)

$f^{//}(0) = 0$ يفشل الاختبار

$f^{//}(-3) = 12(-3)(-1) = 36 > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند X = -3

هي 28 -

(2) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية الدالة: $\boldsymbol{f(x) = xe^{-x}}$

$D: R$

$$f^{/}(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

$f^{/}(x) = 0$

$1 - x = 0 \ \rightarrow x = 0$

$f^{/}(x) =$ غ.م

$e^x = 0$ لا يوجد حل

$x = 1$ الأعداد الحرجة

$$f^{//}(1) = e^{-1}(1-1) = \frac{1}{e} < 0$$

للدالة قيمة عظمى محلية هي $\frac{1}{e}$ عند $x = 1$

(3) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية الدالة $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}}$ إن أمكن

$D: R/\{0\}$

$$f^{/}(x) = \frac{x(2x) - 1(\boldsymbol{x^2 - 1})}{x^2}$$

$$f^{/}(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

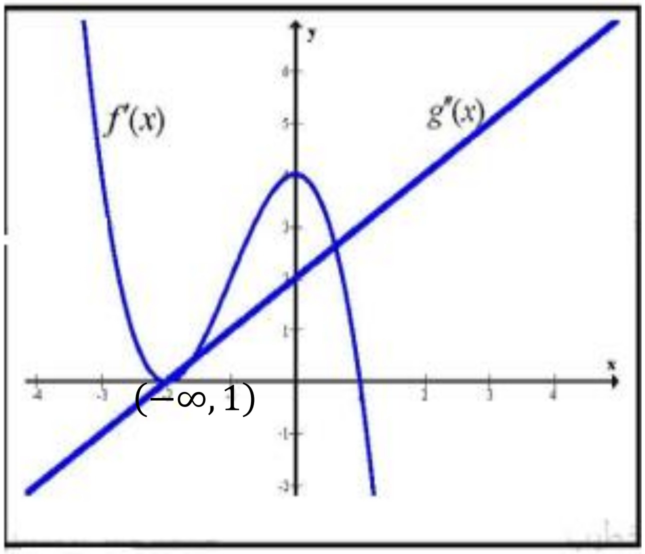
$f^{/}(x) = 0$ لا يوجد حل

$f^{/}(x)$ غ.م $\rightarrow x = 0$

لا يوجد أعداد حرجة

لا يوجد قيم قصوى محلية

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالتين $g^{//}(x), f^{//}(x)$ لإكمال الفراغات التالية :



(أ)النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي -2 ,1 ....

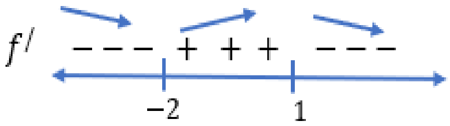
(ب)فترات التزايد للدالة $f(x)$ هي $(-\infty, 1)$ ....

(ج) للدالة $f(x)$ قيم عظمى محلية عند X=1 ....

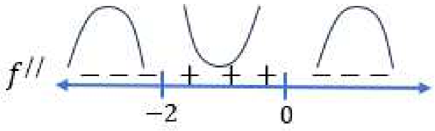
(د) فترات التقعر لاعلى للدالة $f(x)$ هي $(-2,0)$ ....

(هـ) فترات التقعر للاسفل للدالة $g(x)$ $(-\infty,-2)$ ....

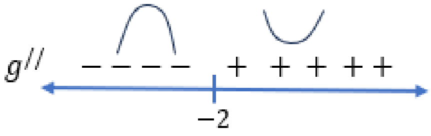
(و) عدد نقاط الانقلاب للدالة $f(x)$ تساوي ....2........



(ز) قيمة x التي عندها للدالتين $f(x), g(x)$ نقطة انقلاب هي . ... X= - 2



(ح) ايهما اكبر $f(3)$ أم $f(2)$ مع ذكر السبب . ... $f(2)$ لأن الدالة f متناقصة



(ط) إذا كان للدالة $g(x)$ نقاط حرجة عند $-3, -1$ فبين نوع القيم القصوى المحلية

عند هذه القيم الحرجة

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = -1$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -3$

من اختبار المشتقة الثانية

$g^{//}(-1) > 0$

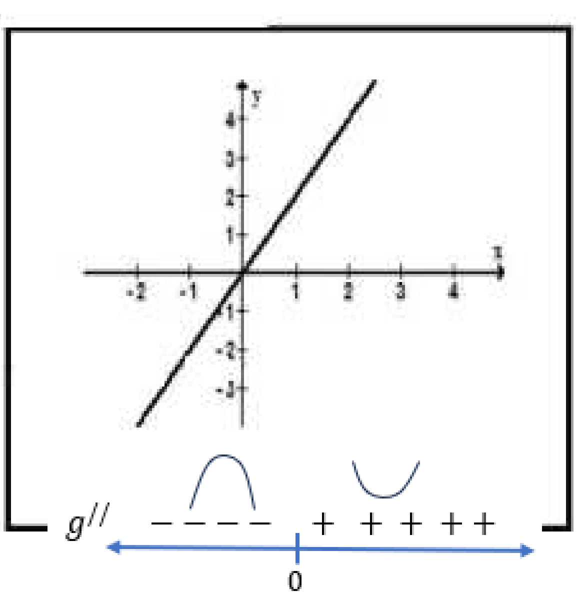
$g^{//}(-3) < 0$

(1)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة($g^{//}(x)$)

حيث $g^{/}(-2) = g^{/}(2) = 0$

لإكمال الفراغات التالية:

علما بأن g(x) كثيرة حدود



(أ) فترة التقعر لأعلى للدالة g(x) هي $(0 , \infty)$ ....

(ب) نقاط الانقلاب للدالة g(x)وهي X=0 ....

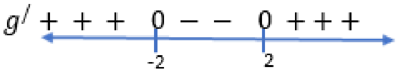
(ج) النقاط الحرجة للدالة g(x)وهي 2 ,-2 ....

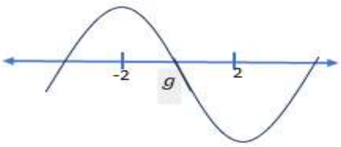
(د) للدالة g(x) قيم عظمى محلية عند X = -2 ....

(هـ) للدالة g(x) قيم صغرى محلية عند X = 2 ....

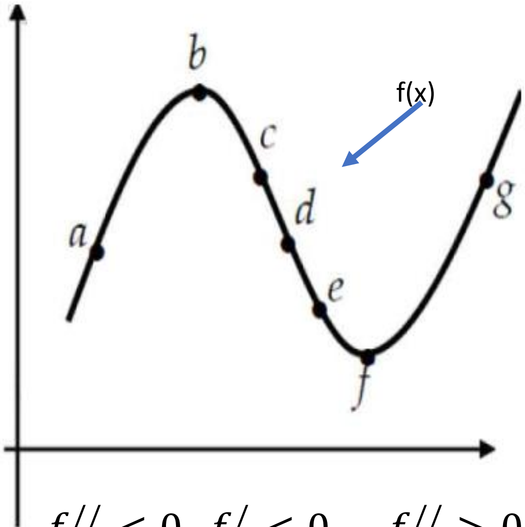
(و) فترات التزايد للدالة g(x)وهي $(-\infty, -2), (2, \infty)$ ....

(ز) فترات التناقص للدالة g(x)وهي $(-2,2)$ ....





(2)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة($f(x)$) **لاكمال الجدول التالي**



الشرط	الرمز
$f' = 0, f'' > 0$	f
$f' = 0, f'' < 0$	b
$f'' = 0$	d
$f' \times f'' = 0$	b , d ,f
$f' \times f'' > 0$	g , c
$f' \times f'' < 0$	a , e

أو $f^{//} > 0 , f^{/} > 0$ $\quad$ $f^{//} < 0 , f^{/} < 0$

أو $f^{//} < 0 , f^{/} > 0$ $\quad$ $f^{//} > 0 , f^{/} < 0$

(1) اذا كانت الدالة $f(x)=ax^3-12x^2$ لها نقطة انعطاف عند $x=1$ فما قيمة a .

الشروط: $f^{//}(1)=0$

$$f^{/}(x)=3ax^2-24x$$

$$f^{//}(1)=6ax-24$$

$$f^{//}(1)=0$$

$$6a(1)-24=0$$

$$6a=24$$

$$a=4$$

(2) اذا كان للدالة $f(x)=ax^4+bx^2+1$ نقطة انعطاف عند النقطة $(1,6)$ فاوجد قيمة الثوابت a,b ؟

الشروط: $f(1)=6\ ,f^{//}(1)=0$

$$f^{/}(x)=4ax^3+2bx$$

$$f^{//}(1)=12ax^2+2b$$

$$f(1)=6$$

$$a+b+1=6$$

$$a+b=5\ldots(1)$$

$$f^{//}(1)=0\rightarrow 6a+b=0$$

$$a=-1, b=6$$

(3) اذا كان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ قيمة صغرى محلية عند $x=4$ ونقطة انقلاب عند $x=1$ فاوجد قيمة الثوابت a,b ؟

الشروط: $f^{/}(4)=0\ ,f^{//}(1)=0$

$$f^{/}(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f^{//}(1)=6x+2a$$

$$f^{//}(1)=0\ \rightarrow 6(1)+2a=0\ \rightarrow a=-3$$

$$f^{/}(4)=0\rightarrow 3(4)^2+2(-3)(4)+b=0$$

$$48-24+b=0$$

$$b=-24$$

(4) اذا كان منحنى الدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ يمر بالنقطة $(1,2)$ وله قيمة عظمى محلية عند النقطة $(0,3)$ فاوجد قيمة الثوابت a,b,c ؟

الشروط: $f(1)=2\ ,,f(0)=3, f^{/}(0)=0$

$$f^{/}(x)=2ax+b$$

$$f^{/}(0)=0\ \rightarrow b=0$$

$$f(1)=2\rightarrow a(1)^2+b(1)+c=2$$

$$a+c=2$$

$$f(0)=3\rightarrow a(0)^2+c=3$$

$$c=3$$

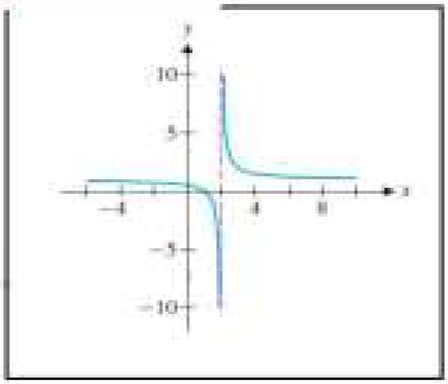
$$a+3=2\quad ,\quad a=-1$$

خطوط التقارب للدوال النسبية

ملاحظات:

(1) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام .

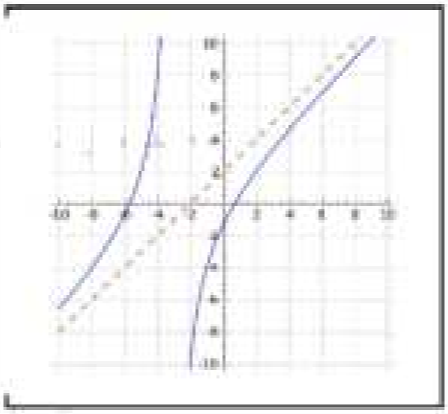
وتكون معادلة $x = a$



(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلتة $y = a$

(3) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام . وتكون معادلتة $y = a x + b$

ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة



(4) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x - a$ فان للدالة فجوة عند $x = a$ وليس خط تقارب رأسي

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

أوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية والمائلة لكل من الدوال التالية:

$$1)f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x - 1}{x + 1} = 3$$

خط تقارب رأسي $x = -1$

خط تقارب أفقي $x = 3$

$$2)f(x) = 4 - \frac{x}{x + 2}$$

$$\lim_{x\to\infty} 4 - \frac{x}{x + 2} = 4$$

خط تقارب رأسي $x = -2$

خط تقارب أفقي $x = 4$

$$3)f(x) = x + \frac{1}{x - 2}$$

خط تقارب رأسي $x = 2$

خط تقارب مائل $y = x$

$$4)f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ \hline x + 1 & x^2 \ldots\ldots - 2 \\ - & x^2 + x \\ \hline - & -x + 2 \\ & -x - 1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

خط تقارب رأسي $x = -1$

خط تقارب مائل $y = x - 1$

أوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية والمائلة لكل من الدوال التالية:

$$1)f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

فجوة $x=1$

خط تقارب رأسي $x=-1$

خط تقارب مائل $y=x$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \hline x+1 & \quad x^2+x+1 \\ & -\;x^2+x \\ \hline & \qquad\quad 1 \end{array}$$

$$2)f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

خطوط تقارب أفقية $y=\pm$

3) اكتب دالة يوجد في تمثيلها البياني خطوط التقارب التالية $y=3$, $x=-1$, $x=2$

$$y=\frac{3x^2}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x^2}{x^2-x-2}$$

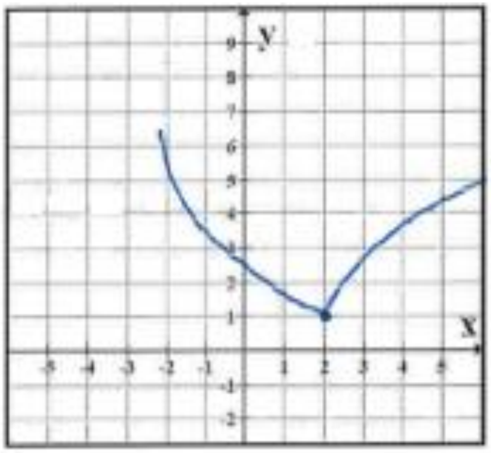
خطوط التقارب
الأفقية أصفار المقام

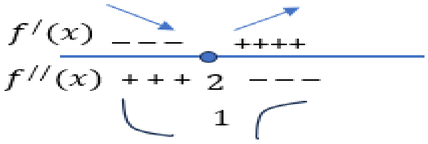
(3) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R **و التي تحقق الشروط التالية :**

$f(2) = 1$

$f^{/}(x) < 0, f^{//}(x) > 0, x < 2$

$f^{/}(x) > 0, f^{//}(x) < 0, x > 2$





(2)ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R**و التي تحقق الشروط التالية :**

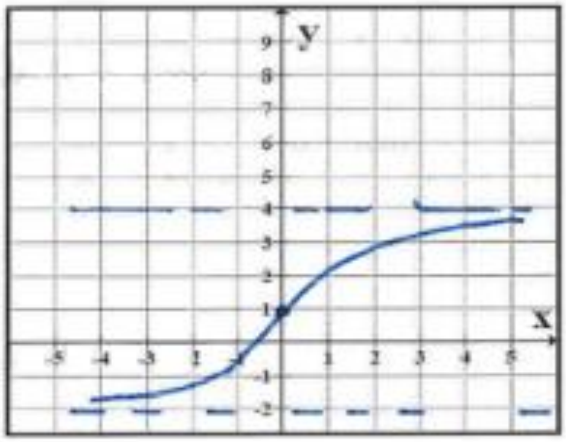
$f(0) = 1$

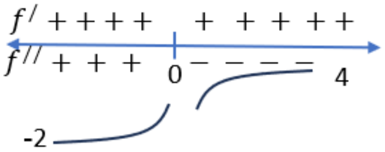
$f^{/}(x) >$ لكل $x \neq 0$

$f^{//}(x) > 0, x < 0$

$f^{//}(x) < 0, x > 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$





(3)ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R**و التي تحقق الشروط التالية :**

$f(-2) = 8 , f(0) = 4 , f(2) = 0$

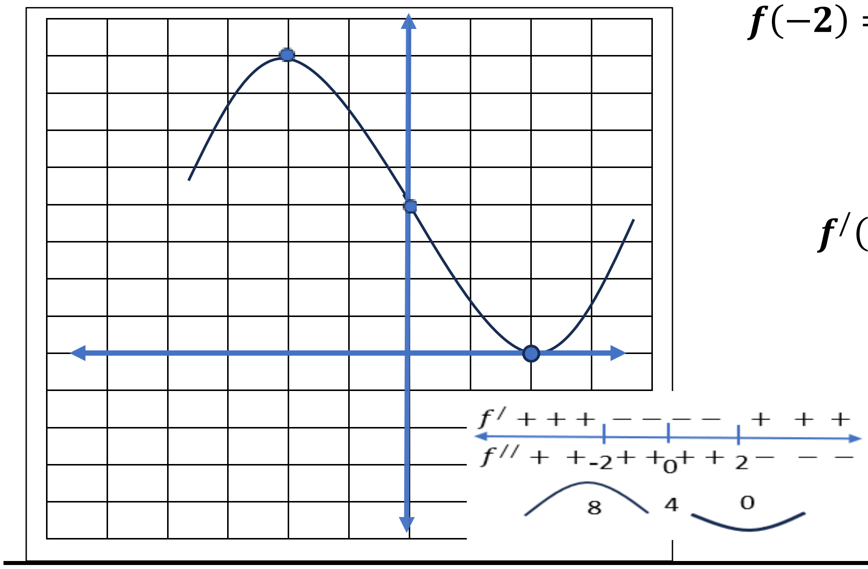
$f^{/}(-2) = f^{/}(2) = 0$

$f^{/}(x) < 0 , -2 < x < 2$

$f^{/}(x) > 0, x < -2 <, x > 2$

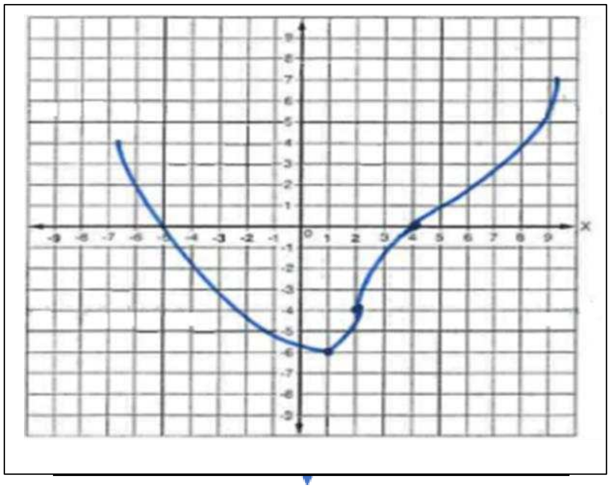
$f^{//}(x) < 0, x < 0$

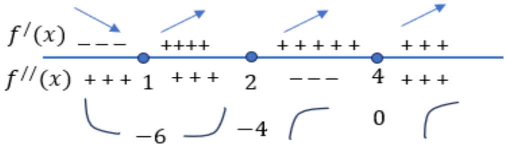
$f^{//}(x) > 0, x > 0$



(1) ارسم تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على Rو التي تحقق الشروط التالية :

$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	القيمة و الفترات
+	-		$-\infty < x < -1$
+	0	-6	X=1
+	+		1 < x <2
0	+	-4	X=2
-	+		2 < x <4
0	0	0	X = 4
+	+		4 < x <∞

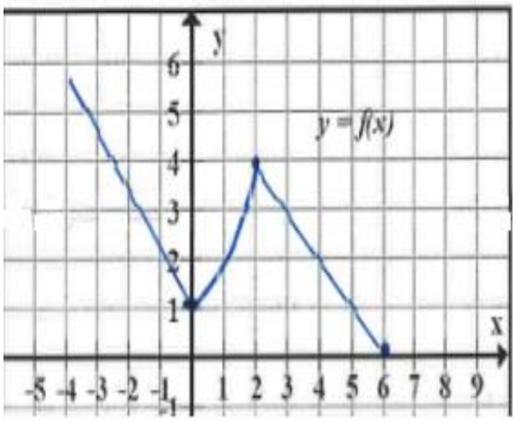


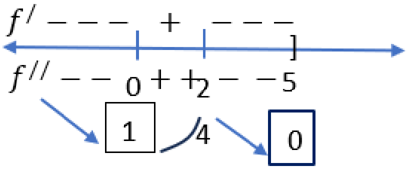


(1) ارسم تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على Rو التي تحقق الشروط التالية :

2 x < 6	0 < x <2	0 > x	الفترات
-	+	-	f'(x)
0	+	0	$f''(x)$

6	2	0	الفترات
0	4	1	f'(x)
-1	غير موجودة	غير موجودة	$f''(x)$





(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

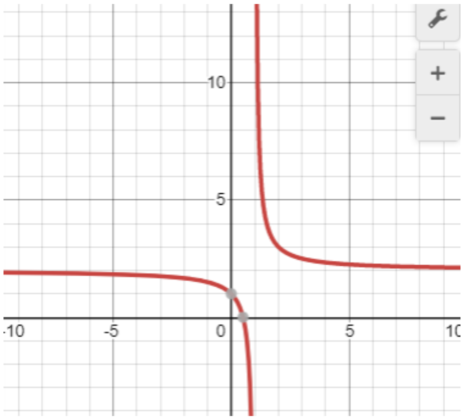
مع تحديد جميع المميزات المهمة.

خط تقارب رأسي X = 1

خط تقارب أفقي y = 2

عند وجود خطوط تقارب رأسية

يجب دراسة إشارة الدالة



<u>المميزات المهمة</u>

خطوط التقارب

اشارة الدالة(في وجود خطوط تقارب رأسية)

القيم القصوى المحلية والمطلقة

فترات التزيد والتناقص

فترات التقعر والانقلاب

نقاط التقاطع مع المحاور

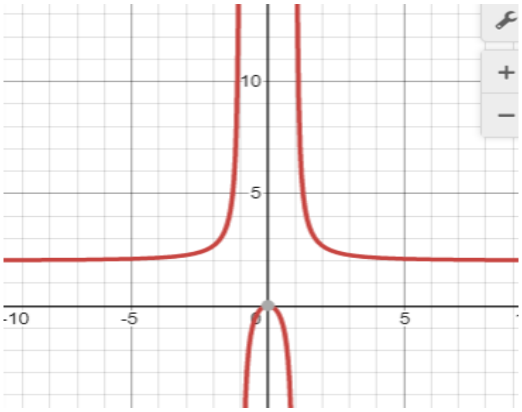
حسب السؤال

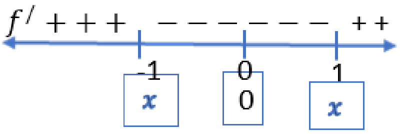
(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة.

خطوط تقارب رأسية $x=\pm 1$

خط تقارب أفقي y = 2



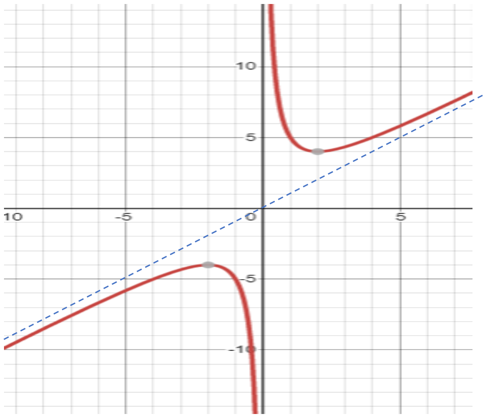


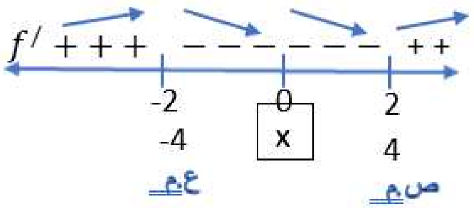
(1) ارسم منحنى الدالة $f(x) = x + \frac{4}{x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة.

خط تقارب رأسي $x = 0$

خط تقارب مائل $y = x$

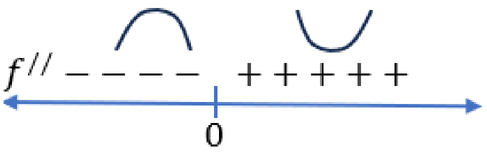




$$f^{/}(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \to f^{/}(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f^{/}(x) = 0 \to x^2 - 4 \to x = \pm 2$$

$f^{/}(x) \to$ غ.م $\to x = 0$



$$f^{//}(x) = \frac{8}{x^3}$$

$f^{//}(x) = 0 \to$ لا يوجد حل

$f^{//}(x)$ غ.م $\to x = 0$

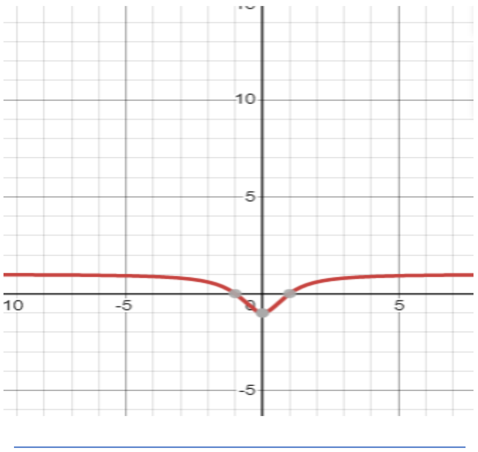
(1) ارسم منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

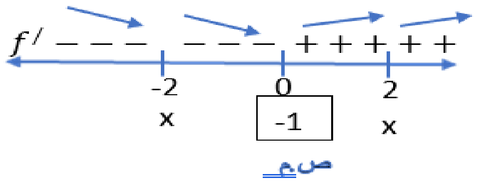
مع تحديد جميع المميزات المهمة. حيث:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{4-16x^2}{(x^2+1)^3}$$

لا يوجد خطوط تقارب رأسية

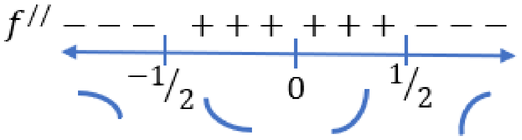
خط التقارب الأفقي y = 1





$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x^2 + 1 = 0$ لا يوجد حل



$f''(x) = 0 \rightarrow 4 - 16x^2 = 0 \rightarrow x = \pm {}^1/_2$

$f''(x)$ غ.م $\rightarrow x^2 + 1 = 0$ لا يوجد حل

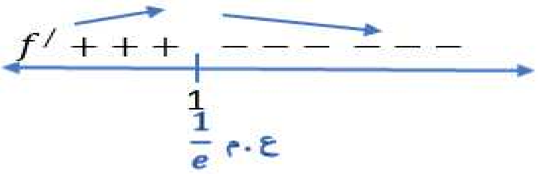
(2) ارسم منحنى الدالة $f(x) = xe^{-x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة.

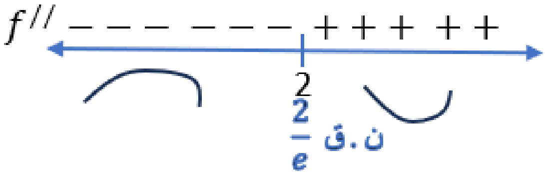
حيث

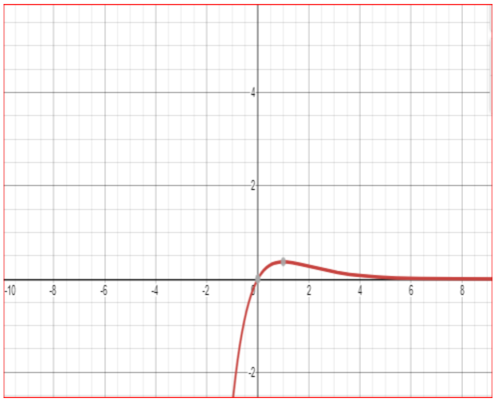
$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}, \quad f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$



$f''(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 2$





خط تقارب أفقي $y = 0$

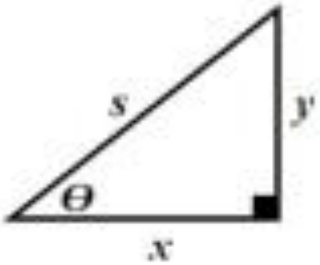
لأن:

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} =$$

قوانين المساحات والحجوم

1- المثلث القائم الزاوية



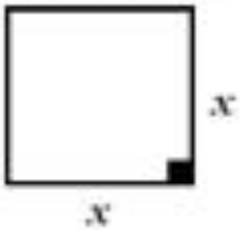
$S^2 = x^2 + y^2$ " نظرية فيثاغورث "

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2} x\, y$

= نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة

محيط المثلث = $s + x + y$ " مجموع اطوال اضلاعه "

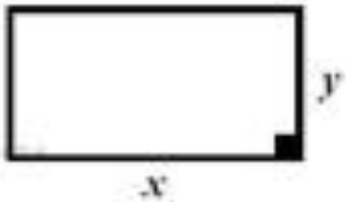
2- المربع :



مساحة المربع = $A = x^2$ " مربع طول ضلعه "

محيط المربع = $4x$ " طول الضلع × 4 "

3- المستطيل :



مساحة المستطيل = $A = x \,.\, y$ " الطول × العرض "

محيط المستطيل = $2\,(x + y)$ " 2 (الطول + العرض) "

4- الدائرة :

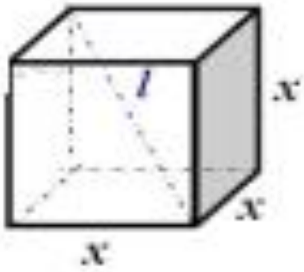
مساحة الدائرة = πr^2

محيط الدائرة = $2\pi r$

5- المكعب :

حجم المكعب= طوله × عرضه × ارتفاعه

حجم المكعب = x^3 " مكعب طول ضلعه "



المساحة الجانبية = 4 × (مربع طول الحرف)

المساحة الجانبية = $4x^2$

المساحة الكلية = 6 × (مربع طول الحرف)

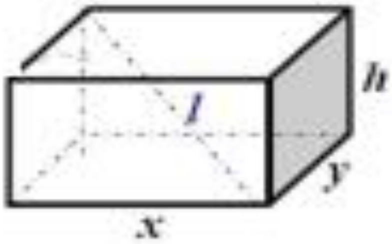
المساحة الكلية = $6x^2$

طول قطر المكعب = $l = \sqrt{3}\ x$

6- شبه المكعب "متوازي مستطيلات ":

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

حجم شبه المكعب = $x\,y\,h$



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

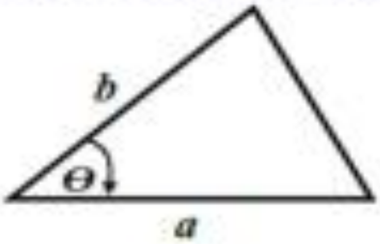
المساحة الجانبية = $2(x+y)h$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

المساحة الكلية = $2(x+y)h+2xy$

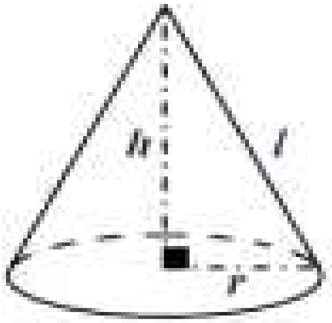
طول قطر شبه المكعب = $l = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$

11- المثلث :



مساحة المثلث = $\frac{1}{2} a\,b \sin\theta$

7- المخــــروط الدائري القائــــم



حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

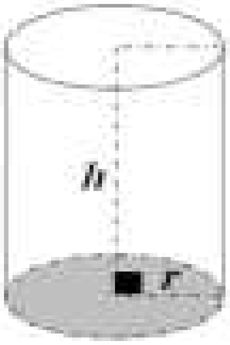
المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = نصف محيط القاعدة × طول راسمه

= $\pi r l$ حيث l طول راسم المخروط

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة للمخروط الدائري القائم

= $\pi r l + \pi r^2$

8- الاسطوانة الدائرية القائمة



حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = $\pi r^2 h$

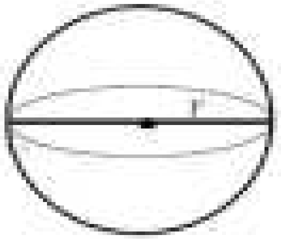
المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = $2\pi r h$

المساحة الكلية للاسطوانة = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

المساحة الكلية = $2\pi r h + 2\pi r^2$

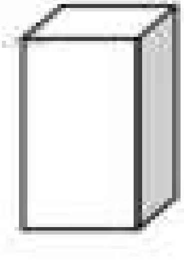
9- الكـــــــــرة



حجم الكـــــــرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$

المساحـــــــــة = $4\pi r^2$

10- المنشور القائم :



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + (2 × مساحة القاعدة) (حسب القاعدة)

خطوات حل مسائل القيم المثلى

(1) اقرأ المسألة ، وارسم شكلاً توضيحياً ، وحدد المتغيرات ورمّزها

(2) حدد المتغير المطلوب ايجاد قيمته القصوى،واكتب العلاقة التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الاخرى (المعادلة الاساسية) ويمكن الاستدلال عليها من كلمة اكبر ما يمكن ، اصغر ما يمكن ....

(3) اكتب المتغير المطلوب ايجاد قيمته القصوى كدالة في متغير واحد ، وممكن تحتاج الى (معادلة مساعدة) للتخلص من المتغيرات الاخرى

(4) حدد مجال الدالة الناتجة ان امكن

(5) اشتق المعادلة ثم جد النقاط الحرجة

(6) اختبر القيمة القصوى المطلقة (عظمى او صغرى حسب السؤال) ونستخدم

(أ) اختبار القيم القصوى اذا كان مجال المسألة مغلق

(ب) اختبار المشتقة الأولى او اختبار المشتقة الثانية اذا كان مجال المسألة مفتوح

(تذكر القيمة القصوى المحلية الوحيدة ـــ هي مطلقة)

عددين غير سالبين مجموعهما 30 ، اوجد العددين اذا كان حاصل ضرب أحدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن.

العدد الاول x

العدد الثاني y

$x + y = 30$

$x = 30 - y$

$0 \leq y \leq 30$

$A = x\, y^2$

$A = (30 - y)y^2$

$A = 30y^2 - y^3$

$A^{/} = 60y - 30y^2$

$A^{/} = 0$

$y = 0 \rightarrow x = 30$

$y = 20 \;\; , x = 10$

$A(0) = 0$

$A(30) = 0$

$A(20) = 4000$

العددان هما 10,20

أو: $A^{//}(y) = 60 - 60y$

$A^{//}(20) = 60 - 1200$

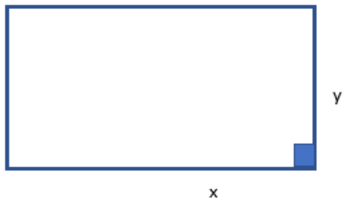
$A^{//}(20) = 1140 < 0$

التقعر لأسفل

وبالتالي هناك قيمة عظمي

أي الضرب اكبر ما يمكن

(1)أوجد أبعاد مستطيل محيطه 24 متراً لتكون مساحته اكبر ما يمكن



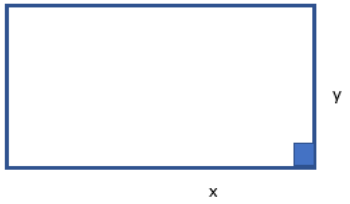
$$2x + 2y = 24$$
$$x + y = 12$$
$$x = 12 - y$$
$$0 \le y \le 12$$

$$A = x\,y$$
$$A = (12 - y)y$$
$$A = 12y - y^2$$
$$A^{/} = 12 - 2y$$
$$A^{/} = 0$$
$$y = 6$$

$$A(0) = 0$$
$$A(12) = 0$$
$$A(6) = 36$$

الأبعاد هي 6,6

(2) بين أن اكبر مساحة مستطيل محيطه $\boldsymbol{p}$ متر يكون مربع طول ضلعه $\boldsymbol{\frac{p}{4}}$



الطول x

العرض y

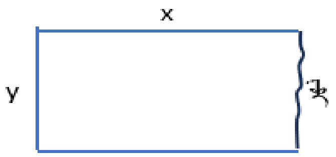
$$2x + 2y = p$$
$$x + y = {}^{p}/_{2}$$
$$x = {}^{p}/_{2} - y$$

$$A = x\,y$$
$$A = ({}^{p}/_{2} - y)y$$
$$A = {}^{p}/_{2}\,y - y^2$$
$$A^{/} = {}^{p}/_{2} - 2y$$
$$A^{/} = 0$$
$${}^{p}/_{2} - 2y = 0$$
$$2y = {}^{p}/_{2} \rightarrow y = \frac{p}{4}$$

$$A^{//}(y) = -2 < 0$$

التقعر لأسفل فيكون هناك قيمة عظمى محلية وبالتالي يكون طول الضلع $\frac{p}{4}$

(3)مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج طوله 800 متر على الجوانب الثلاثة الأخرى .ما أكبر مساحة يمكن احاطتها .



$$A = xy = 1600$$
$$y = \frac{1600}{x}$$
X > 0

2x + y =800

y = 800 – 2x

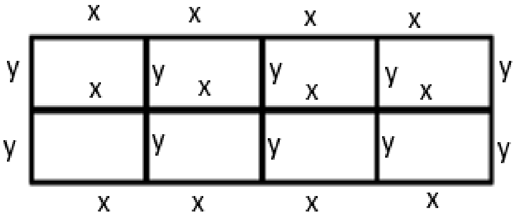
$0 \le x \le 400$

$$A = x\,y$$
$$A = (800 - 2x)x$$
$$A = 800x - 2x^2$$
$$A^{/} = 800 - 4x$$
$$A^{/} = 0$$
$$x = 200 \quad , y = 400$$

$$A(0) = 0$$
$$A(400) = 0$$
$$A(20) = 80000$$

اكبر مساحة $8000\ m^2$

(1)مزرعة أبقار مستطيلة الشكل يراد تقسيمها بسياج طوله 720 متر إلى 8 حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة .أوجد أبعاد الحظيرة الواحدة لتكون مجموع مساحات جميع الحظائر أكبر ما يمكن ؟



12x +10 y =720

10y = 720 –1 2x

y =72 - 1.2x

$0 \le x \le 60$

$A = 8x\,y$

$A = (72 - 1.2x)x$

$A = 72x - 1.2x^2$

$A^{/} = 72 - 2.4x$

$A^{/} = 0 \to x = 30$

$A(0) = 0$

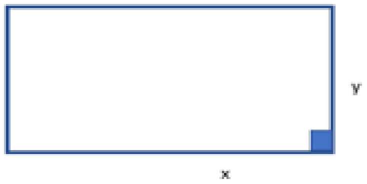
$A(60) = 0$

$A(30) = 8640$

أكبر مساحة

$8640\ m^2$

(2)قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها 400 متر مربع .اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الاربعة .



$A = xy = 400$

$y = \dfrac{400}{x}$

X > 0

$P = 2x + 2y$

$P = 2x + 2.\dfrac{400}{x}$

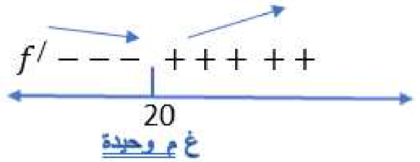
$P^{/}(x) = 2 - \dfrac{400}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 400}{x^2}$

$P^{/}(x) = 0 \ \to 2x^2 - 400 = 0$

$x = 20\ \ , x = -20$ مرفوض

$\boldsymbol{P^{/}(x)}$ غ. م $\to \boldsymbol{x = 0}$ مرفوض

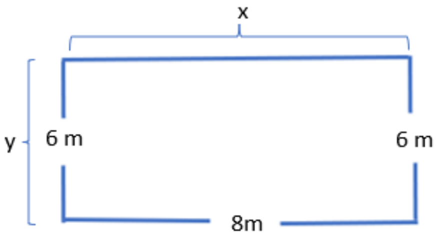
الاختبار (مجال مفتوح)



فهي مطلقة

$\boldsymbol{P = 80\ m}$

(3)مزرعة مستطيلة الشكل مساحتها 1600 متر مربع .بها ثلاثة ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الاول 10 متر ؛ ومن الجهتين الباقيتين بابين بعرض 6 متر لكل منهما.اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الاربعة (بدون الابواب)



$P = 2x + 2y - 22$

$P = 2x + 2.\dfrac{1600}{x}$

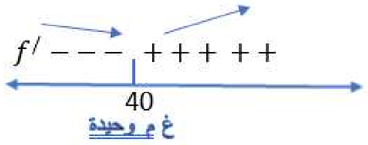
$P^{/}(x) = 2 - \dfrac{3200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 3200}{x^2}$

$P^{/}(x) = 0 \ \to 2x^2 - 3200 = 0$

$x = 40\ \ , x = -40$ مرفوض

$\boldsymbol{P^{/}(x)}$ غ. م $\to \boldsymbol{x = 0}$ مرفوض

الاختبار (مجال مفتوح)



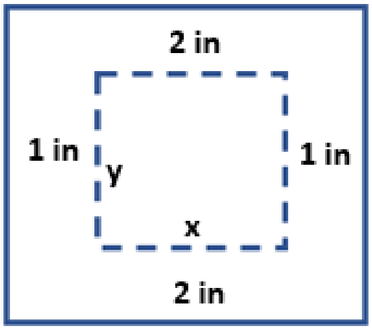
فهي مطلقة

$\boldsymbol{P = 138\ m}$

(1)صفيحة مستطيلة الشكل مطبوع عليها إعلان على شكل منطقة مستطيلة مساحتها

$98\ in^2$ ويوجد بالصفحة هوامش من الجانبين $1n$ ومن الاعلى والاسفل $2\ in$ أوجد

ابعاد الصفحة التي تحقق القيمة الصغرى للمساحة المطبوعة



$xy = 98$

$y = \frac{98}{x}$

X > 0

$A = (x+2)(y+4)$

$A = (x+2)\left(\frac{98}{x}+4\right)$

$A = 98 + 4x + \frac{196}{x} + 8$

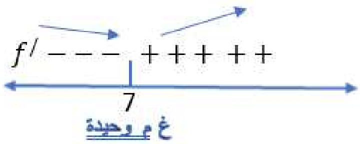
$A^{/}(x) = 4 - \frac{196}{x^2} = \frac{4x^2-196}{x^2}$

$A^{/}(x) = 0 \ \rightarrow 4x^2 - 196 = 0$

$x = 7 , x = -7$ مرفوض

مرفوض $\boldsymbol{x = 0} \rightarrow$ غ. م $\boldsymbol{A^{/}(x)}$

الاختبار (مجال مفتوح)



فهي مطلقة

الابعاد $18,9\ in$

(2) قطاع دائري محيطه$\boldsymbol{12\ cm}$. اوجد طول نصف قطر دائرته التي تجعل مساحته اكبر ما يمكن

A=$\frac{1}{2}\boldsymbol{rl}$

$\boldsymbol{2r + l = 12}$

$\boldsymbol{l = 2r - 12}$

$\boldsymbol{0 \le r \le 6}$

$A = \frac{1}{2}\ l\, r = \frac{1}{2} r(12-2r)$

$A = 6r - r^2$

$A^{/}(x) = 6 - 2r$

$A^{/}(x) = 0 \ \rightarrow r = 3$

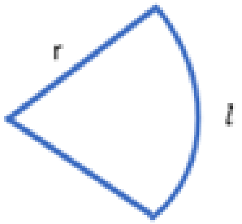
$A(0) = 0$

$A(6) = 0$

$A(3) = 9$

قيمة عظمى مطلقة

عند $\boldsymbol{r = 3}$



(3)ضلعان في مثلث طولاهما $\boldsymbol{a, b}$ والزاوية بينهما $\boldsymbol{\theta}$ اوجد قيمة الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ التي تجعل مساحة

المثلث اكبر ما يمكن .

A=$\frac{1}{2}\boldsymbol{absin\theta}$

$0 \le \theta \le \pi$

$A^{/} = \frac{1}{2}\ a\, b \cos\theta$

$A^{/} = 0 \ \rightarrow \frac{1}{2}\ a\, b \cos\theta = 0$

$\cos\theta = 0 \rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{2}$

$A(0) = 0$

$A(\pi) = 0$

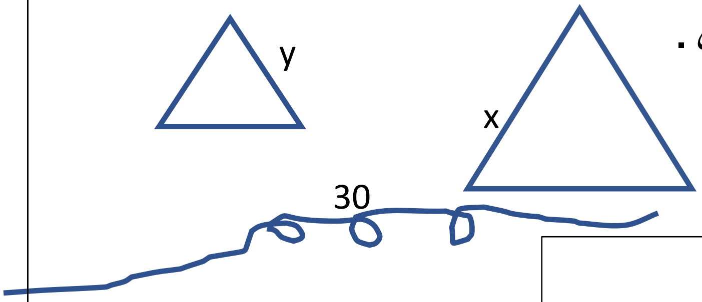
$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}ab$

قيمة عظمى مطلقة

عند $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ المثلث قائم

(1) سلك طوله $30cm$ نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الاضلاع ؛ حدد طول كل ضلع **من اضلاع المثلث ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن .**

مساحة المثلث المتطابق الذي طول ضلعه $\boldsymbol{l}$ هو **A=**$\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{l}^2$



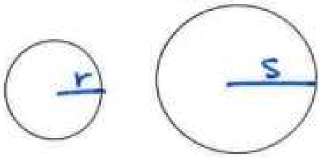
$$3x+3y=30$$
$$x+y=10$$
$$y=10-x$$
$$0\le x\ \le 10$$

$$A=A_1+A_2$$
$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$$
$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(10-x)^2$$
$$A^{/}=\frac{2\sqrt{3}}{4}x+\frac{2\sqrt{3}}{4}(10-x)^2(-1)$$
$$A^{/}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-10+x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-10)$$

$$A^{/}=0\ \rightarrow 2x=10$$
$$x=5$$
$$A(0)=0\ ,A(10)=0$$
$$A(5)=\frac{25\sqrt{3}}{4}$$

الابعاد $x=5\,,y=5$

(2)قرصان دائريان مجموع قطريهما 28 سم أوجد طول نصف قطر كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن .



$$2r+2s=28$$
$$r+s=14$$
$$s=14-r$$
$$0\le r\le 14$$

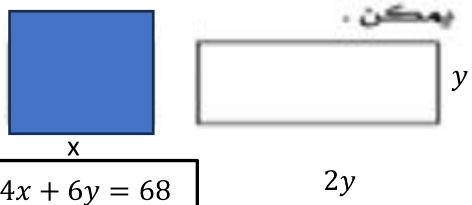
$$A=A_1+A_2$$
$$A=\pi r^2+\pi s^2$$
$$A=\pi r^2+\pi(14-r)^2$$
$$A^{/}=2\pi r+2\pi(14-r)^2(-1)$$
$$A^{/}=2\pi(r-14+r)=2\pi(2r-14)$$
$$A^{/}=0\rightarrow 2r-14=0\rightarrow r=7$$

$$A(0)=196\pi$$
$$A(14)=196\pi$$
$$A(7)=98\pi$$

قيمة صغرى مطلقة 98π

عند $r=7$

(1) سلك طوله 68 cm قسم إلى جزأين غير متساويين وثني الجزء الأول على شكل مربع والثاني على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه . أوجد طول كل جزء ليكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن .



$$4x + 6y = 68$$

$$y = \frac{68 - 4x}{6}$$

$$y = \frac{34 - 2x}{3}$$

$$0 \leq x \leq 17$$

$$A = A_1 + A_2 = x^2 + 2y^2$$

$$A = x^2 + 2\left(\frac{34 - 2x}{3}\right)^2$$

$$A = x^2 + \frac{2}{9}(34 - 2x)^2$$

$$A^{/} = 2x + {}^{4}/_{9}\,(34 - 2x)(-1)$$

$$A^{/} = 2x + \frac{16x}{9} - \frac{272}{9}$$

$$A^{/} = \frac{34x}{9} - \frac{272}{9}$$

$$A^{/} = 0 \rightarrow \frac{34x}{9} - \frac{272}{9} = 0$$

X=8

A(0)=256.88 ,A(17)=289

A(18)=136

قيمة صغرى مطلقة عند X=8

الأطوال هي 36 و 32

(2) نافذة على شكل مستطيل يعلوها نصف دائرة ، يراد احاطة الشكل بزخارف خشبية طولها $8 + \pi$ قدم . اوجد نصف قطر الدائرة بحيث تمر اكبر كمية للضوء من النافذة.

(يجب وضع زخارف بين المستطيل ونصف الدائرة).

(اوجد نصف قطر الدائرة بحيث تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن).

$$4r + \frac{1}{2}(2\pi r) + 2y = 8 + \pi$$

$$4r + \pi r + y = 8 + \pi$$

$$2y = 8 + \pi - 4r - \pi r$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2ry$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 + r(8 + \pi - 4r - \pi r)$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 + (8r + \pi r - 4r^2 - \pi r^2)$$

$$A^{/} = \pi r + 8 + \pi - 8r - 2\pi r = 8 + \pi - r(8 + \pi)$$

$$A^{/} = 0 \rightarrow \pi r + 8 + \pi - 8r - 2\pi r = 0$$

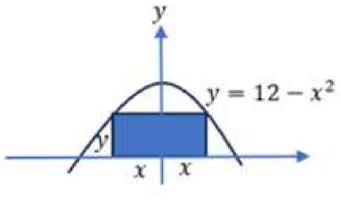
$$8 + \pi = r(8 + \pi) \rightarrow 0 \rightarrow r = 1$$

$$A^{//} = -(8 + \pi) < 0$$

لدالة قيمة عظمى محلية وهي مطلقة عند r=1

(1) ما اكبر مساحة مستطيل قاعدتة على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ

$y = 12 - x^2$



$y = 12 - x^2$

$x^2 = 12 - y$

$at: y = 0 \rightarrow x = \sqrt{12}$

$0 \leq x \leq \sqrt{12}$

$A = 2xy = 2x(12 - x^2)$

$A = 24x - 2x^3$

$A^{/} = 24 - 6x^2$

$A^{/} = 0$

$24 - 6x^2 = 0$

$x = 2 \; , x = -2$ مرفوض

$A(0) = 0$

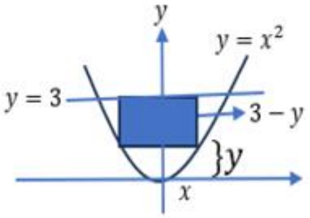
$A(\sqrt{12}) = 0$

$A(2) = 32$

أكبر مساحة هي 32

(2) ما اكبر مساحة مستطيل قاعدتة على المستقيم Y=3 وراساه السفليان على القطع المكافئ

$y = x^2$



$0 \leq x \leq \sqrt{3}$

$A = 2x(3 - y) = 2x(3 - x^2)$

$A = 6x - 2x^3$

$A^{/} = 6 - 6x^2$

$A^{/} = 0$

$6 - 6x^2 = 0$

$x = 1 \; , x = -1$ مرفوض

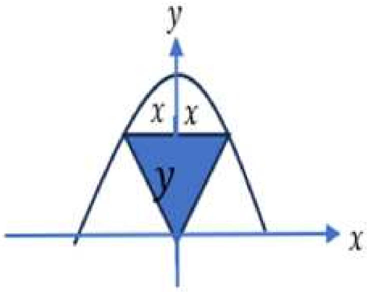
$A(0) = 0$

$A(\sqrt{3}) = 0$

$A(1) = 4$

أكبر مساحة هي 4

(3) اوجد مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه بحيث يكون احد رؤوسة هي نقطة الاصل والراسان الاخران على المنحنى $y = 27 - x^2$



$A = \frac{1}{2}(2xy) = xy = x(27 - x^2)$

$A = 27x - x^3$

$A^{/} = 27 - 3x^2$

$A^{/} = 0$

$27 - 3x^2 = 0$

$x = 3 \; , x = -3$ مرفوض

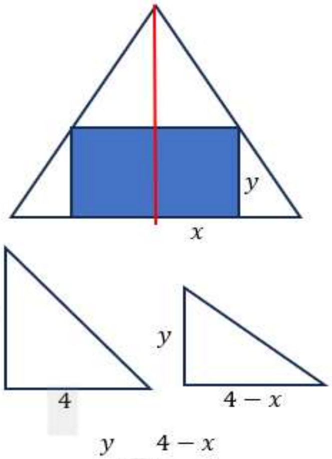
$A(0) = 0$

$A(\sqrt{27}) = 0$

$A(3) = 54$

أكبر مساحة هي 54

(1) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 8cm وطول ارتفاعه 10cm ، يراد رسم مستطيل داخل المثلث بحيث يقع احد بعدية على قاعدة المثلث ويقع كل من رأسيه الاخرين على على ساقي المثلث ، اوجد بعدي المستطيل لتكون مساحته اكبر ما يمكن



$$\frac{y}{10} = \frac{4-x}{4}$$

$$y = 10 - \frac{5}{2}x$$

$$0 \le x \le 4$$

$A = (2xy)$

$A = 2x\left(10 - \frac{5}{2}x\right)$

$A = 20x - 5x^2$

$A^{/} = 20 - 10x$

$A^{/} = 0$

$20 - 10x = 0$

$x = 2$

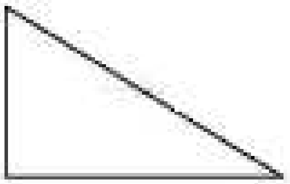
$A(0) = 0$

$A(4) = 0$

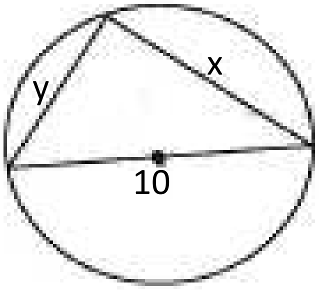
$A(2) = 20$

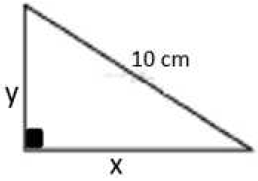
أبعاد المستطيل 5 و 4

(2) ما اكبر مساحة مثلث قائم الزاوية وتره يساوي 10cm



(1) اوجد مساحة اكبر مثلث يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها 5 cm بحيث يكون احد رؤوسة على محيط الدائرة واحد اضلاعه على قطر الدائرة.





$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$0 \le x \le 10$$

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$$

$$A^{/} = \frac{1}{2}.\frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$A^{/} = 0$$

$$200x - 4x^3 = 0$$

$$4x(50 - x^2) = 0$$

$x = 0$,$x = 5\sqrt{2}$,$x = -5\sqrt{2}$ مرفوض

$A^{/}$ غ.م $\rightarrow 100x^2 - x^4 = 0$

$x = 0$,$x = 10$,$x = -10$ مرفوض

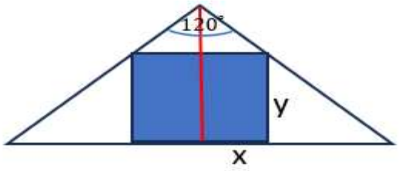
$$A(0) = 0$$

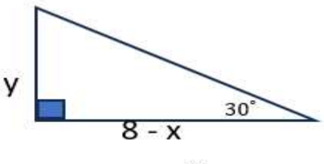
$$A(10) = 0$$

$$A(5\sqrt{2}) = 25$$

أكبر مساحة هي 25

(2) صفيحة على شكل . مثلث ABC متساوي الساقين طول قاعدته $BC = 16cm$ وقياس زاوية رأسه $\sphericalangle A = 120^{\circ}$ ، أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث يقع راسان من رؤوسه على قاعدة المثلث BC وكل من راسيه الآخرين على الضلعين AB, AC .





$$tan\ 30^{\circ} = \frac{y}{8 - x}$$

$$y = (8 - x)tan\ 30^{\circ}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(8 - x)$$

$$0 \le x \le 8$$

$$A = 2xy$$

$$A = 2x.2x.\frac{1}{\sqrt{3}}(8 - x)$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}(8x - x^2)$$

$$A^{/} = \frac{2}{\sqrt{3}}(8 - 2x)$$

$$A^{/} = 0 \rightarrow 8 - 2x = 0$$

$$x = 4$$

$$A(0) = 0$$

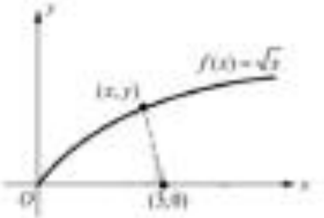
$$A(8) = 0$$

$$A(4) = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

أكبر مساحة هي

$$\frac{32\sqrt{3}}{3}$$

(1) ما اقصر بعد للنقطة $(3,0)$ عن المنحنى $y=\sqrt{x}$



$$y=\sqrt{x}$$

$$0 \le x \le 3$$

$$S=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$S=\sqrt{x^2-6x+9+x}$$

$$S=\sqrt{x^2-5x+9}$$

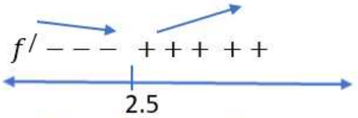
$$S^{/}=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$

$$S^{/}=0 \ \rightarrow 2x-5=0$$

X = 2.5

غ.م $S^{/}$

ليس لها حل $x^2-5x+9=0$



ق ص وحيدة فهي مطلقة

أقصر بعد $\sqrt{2.75}$

(2) ما اقصر بعد للنقطة $(5,-1)$ عن المستقيم $y=2x-1$

y+1=2x

$$S=\sqrt{(x-5)^2+(y-(-1))^2}$$

$$S=\sqrt{x^2-10x+25+4x^2}$$

$$S=\sqrt{5x^2-10x+25}$$

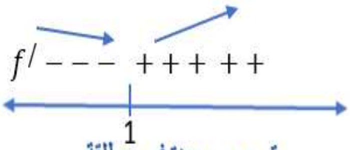
$$S^{/}=\frac{10x-10}{2\sqrt{5x^2-10x+25}}$$

$$S^{/}=0 \ \rightarrow 10x-10=0$$

X = 1

غ.م $S^{/}$

ليس لها حل $5x^2-10x+25=0$



ق ص وحيدة فهي مطلقة

أقصر بعد $\sqrt{20}$

(3) ما اقصر بعد للنقطة $(0,0)$ عن الدالة $y=\cos x$

$$S=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$S=\sqrt{x^2+cos^2x}$$

$$S^{/}=\frac{2x+2cosx(-sinx)}{2\sqrt{x^2+cos^2x}}$$

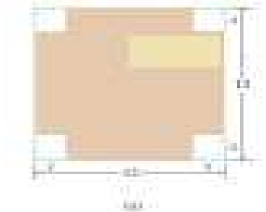
$$S^{/}=0 \ \rightarrow 2x-sin2x=0$$

X =0 بالتجريب أو الآلة

أُقصر بعد هو 1 $S(0)=1$,$S(1)=\sqrt{1+cos1}$

(1) يراد عمل صندوق على شكل مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلعها $12in$

وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد اكبر حجم للصندوق؟



$$V = (12-2x)(12-2x)x$$

$$V = x(12-2x)^2$$

$$V = x(144-48x+4x^2)$$

$$V = (144x-48x^2+4x^3)$$

$$V^/ = 144-96x+12x^2$$

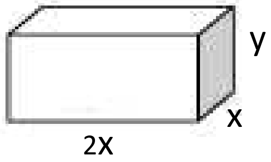
$$V^/ = 0 \ \rightarrow x = 2 \, , x = 6$$

$$V(0) = 0 \ \ , V(6) = 0 \, , V(2) = 128$$

أكبر حجم 128

(2) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده

الثلاثة $180cm$.اوجد أبعاده ليكون حجمه أكبر ما يمكن .



2x + x + y=180

3x + y = 180

y = 180 – 3x

$0 \le x \le 60$

$$V = 2x.x.y$$

$$V = 2x^2(180-3x)$$

$$V = 360x^2-6x^3$$

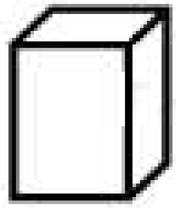
$$V^/ = 720x-18x^2$$

$$V^/ = 0 \ \rightarrow x = 0 \, , x = 40$$

$$V(0) = 0 \ \ , V(60) = 0 \, , V(40) = 192000$$

أكبر حجم 192000

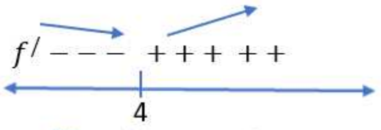
(1) متوازي مستطيلات (صندوق شبة مكعب) من الصاج بدون غطاء ، قاعدته مربعة الشكل سعته 32 متر مكعب أوجد أبعاده لتكون مساحته السطحية أقل ما يمكن .



$$x^2y = 32$$

$$y = \frac{32}{x^2}$$

$$x > 0$$



ق ص وحيدة فهي مطلقة

عند $x = 4$

الأبعاد هي 2 و 4 و 4

$$S = x^2 + 4xy$$

$$S = x^2 + 4x.\frac{32}{x^2}$$

$$S = x^2 + \frac{128}{x}$$

$$S^{/} = 2x - \frac{128}{x^2}$$

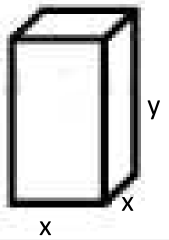
$$S^{/} = 0 \to \ 2x - \frac{128}{x^2}$$

$$2x = \frac{128}{x^2} \to \ x^3 = 64$$

$$x = 4$$

$S^{/}$ غ.م $\to x = 0$ مرفوض

(2) يراد عمل خزان للمياه بغطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة و سعته 3 متر مكعب وتكاليف صنع المتر المربع من قاعدته 40 درهم و تكاليف صنع المتر المربع من جوانبه 45 درهم أوجد أبعاد الخزان لتكون التكلفه الكلية لصنع الخزان أقل ما يمكن.



$$2x^2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2x^2}$$

$$x > 0$$

$$C = 2x^2(40) + 4xy(45)$$

$$C = 80x^2 + 180xy$$

$$C = 80x^2 + 180x\frac{3}{2x^2}$$

$$C = 80x^2 + \frac{270}{x}$$

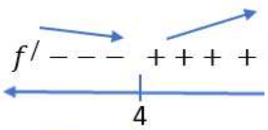
$$C^{/} = 160x - \frac{270}{x^2}$$

$$C^{/} = 0 \to 160x = \frac{270}{x^2}$$

$x^3 = 43200 \to x = \sqrt[3]{43200}$ ثم يكمل الحل

(1) يراد صنع خزان ماء من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $128\pi\ cm^3$. اوجد ابعاد الخزان لتكون كمية المعدن المستخدم في صنعه اقل ما يمكن.

$$\pi r^2 h = 128\pi$$
$$r^2 h = 128$$
$$h = \frac{128}{r^2}$$
$$r > 0$$



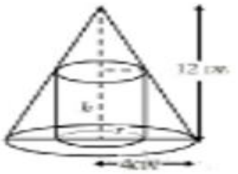
ق ص وحيدة فهي مطلقة

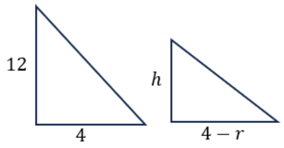
عند $x = 4$

الأبعاد هي 4 و 8

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{128}{r^2}$$
$$S = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$$
$$S^{/} = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}$$
$$S^{/} = 0 \rightarrow \ 4\pi r = \frac{256\pi}{r^2}$$
$$r^3 = 64 \rightarrow r = 4$$
$$S^{/}\text{م.غ} \ \rightarrow r = 0$$

(2) الشكل المجاور يمثل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $4\ cm$ وارتفاعه $12\ cm$ رسم داخله اسطوانه دائرية قائمة بحيث يكون محور الاسطوانة ومحور المخروط متقابلين وكذلك القاعدتين .اوجد أكبر حجم لهذه الاسطوانة





$$\frac{h}{12} = \frac{4-r}{4}$$
$$y = 12 - 3r$$
$$0 \le r \le 4$$

$$V = \pi r^2 h + 4xy$$
$$V = \pi r^2 (12 - 3r)$$
$$V = 12\pi r^2 - 3\pi r^3$$
$$V^{/} = 24\pi r - 9\pi r^2$$
$$V^{/} = 0 \rightarrow 24\pi r - 9\pi r^2 = 0$$
$$r = 0 \rightarrow \ r = {}^{8}/_{3}$$
$$V(0) = 0 \ \ , V(4) = 0$$
$$V({}^{8}/_{3}) = \frac{256\pi}{9}$$

حجم الاسطوانة هو $\frac{256\pi}{9}$

(1) أوجد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج عن دوران مثلث قائم الزاوية وتره $5\ cm$ حول احد ضلعي القائمة.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(25 - h^2)h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(25h - h^3)$$

$$V^{/} = \frac{1}{3}\pi(25 - 3h^2)$$

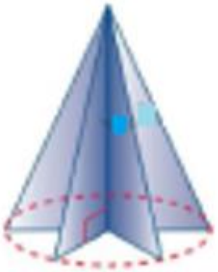
$$V^{/} = 0 \to 25 - 3h^2 = 0$$

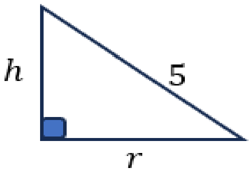
$$h = \frac{5}{\sqrt{3}}\ , h = {}^{-5}\!/_{\sqrt{3}}$$ مرفوض

$$V(0) = 0 \quad , V(5) = 0$$

$$V\left({}^{5}\!/_{\sqrt{3}}\right) = 50.4$$

اكبر حجم هو 50.4





$$r^2 + h^2 = 25$$

$$r^2 = 25 - h^2$$

$$0 \le r \le 5$$

(2) اوجد حجم اكبر مخروط دائري قائم داخل كره نصف قطرها 3 وحدات.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(6h^2 - h^3)$$

$$V^{/} = \frac{1}{3}\pi(12h - 3h^2)$$

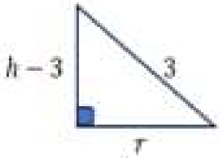
$$V^{/} = 0 \to 25 - 3h^2 = 0$$

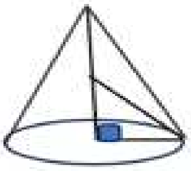
$$h = 0, h = 4$$

$$V(0) = 0 \quad , V(6) = 0$$

$$V(4) = \frac{32}{3}\pi$$

32





$$r^2 + (h - 3)^2 = 9$$

$$r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2$$

$$0 \le h \le 6$$

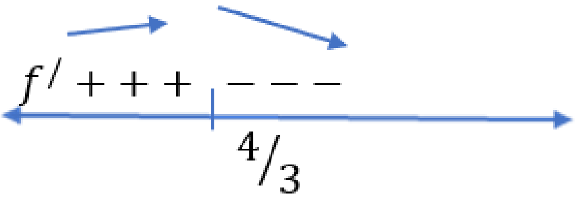
(1) تمثل الدالة $Q(t)=-3t^3+12t^2+60t$ عدد السلع التي ينتجها عامل خلال الزمن t حيث تمثل $Q'(t)$ كفاءة العامل في أي لحظة . اوجد الزمن التي يكون فيها كفاءة العامل اكبر ما يمكن

$$Q^{/}(t) = -9t^2 + 24t + 60$$ دالة الكفاءة

$$Q^{//}(t) = -18t + 24$$

$$Q^{//}(t) = 0 \to -18t + 24 = 0$$

$$t = \frac{4}{3}$$ ساعة



قيمة عظمى محلية وحيده فهي مطلقة

(2) تمثل العلاقة $P(v)=\frac{1}{v}+cv^3$ مقدار الطاقة التي يبذلها طائر حتى يسير بالسرعة v حيث $c>0$.

اوجد السرعة التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

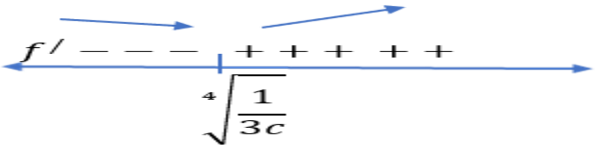
$$P^{/} = \frac{-1}{v^2} + 3cv^2 = \frac{-1 + 3cv^4}{v^2}$$

$$P^{/} = 0 \to -1 + 3cv^4 = 0$$

$$3cv^4 = 1 \to v^4 = \frac{1}{3c}$$

$$v = \sqrt[4]{\frac{1}{3c}}$$

$P^{/}$ غ. م $\to v = 0$ خارج المجال



قيمة صغرى محلية وحيدة فهي مطلقة

(1) تمثل الدالة $R(x)=\frac{35x-x^2}{x^2+35}$ ارباح شركة بملاين الدراهم من بيع x سلعة بالالاف. اوجد

القيمة العظمى للربح

$$R^{/}=\frac{(35-2x)(x^2+35)-(35x-x^2)(2x)}{(x^2+35)^2}$$

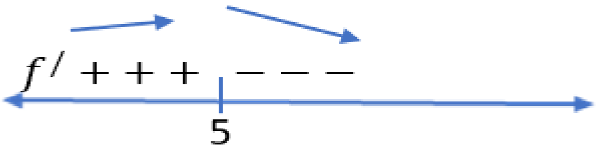
$$R^{/}=0\to(35-2x)(x^2+35)-(35x-x^2)(2x)=0$$

$$35x^2+35^2-2x^3-70x-70x^2+2x^3=0$$

$$-35x^2-70x+35^2=0$$

$$x^2+2x-35=0$$

$x=-7$ مرفوض , $x=5$



قيمة عظمى محلية وحيده فهي مطلقة

أعلى ربح

$$R=\frac{35(5)-5^2}{5^2+35}=2.5$$ مليون

تمثل الدالة $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$ تركيز الدواء في العضلات بعد t ساعة من اخذ الدواء، اوجد

الزمن الذي يكون فية التركيز الدواء داخل العضلات اكبر ما يمكن

$$f^{/}=e^{-0.02t}(-0.02)-e^{-0.42t}(-0.42)$$

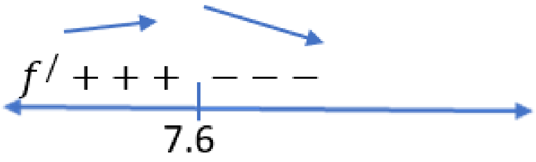
$$f^{/}=0\to e^{-0.02t}(-0.02)-e^{-0.42t}(-0.42)=0$$

$$0.02e^{-0.02t}=0.42e^{-0.42t}$$

$$\frac{0.42}{0.02}=\frac{e^{-0.02t}}{e^{-0.42t}}$$

$$21=e^{0.4t}\to ln21=0.4t$$

$$t=\frac{ln21}{0.4}=7.6$$



قيمة عظمى محلية وحيده فهي مطلقة

(1) الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء الى الرئتين ،بازاحة جميع الجسيمات التي تسد القصبة الهوائية وتغير نصف قطر القصبة الهوائية. اذا علمت ان السرعة المتجهه لدفق الهواء خلال القصبة الهوائي تعطى بالعلاقة $V(r) = cr^2(r_0 - r)$ عند نصف قطر القصبة r ، حيث c عدد ثابت و r_0 نصف قطر القصبة بدون اي ضغط (سعال) اوجد نصف قطر القصبة الهوائية التي تجعل السرعة المتجهه للهواء اكبر ما يمكن

$$V(r) = c\,r_0 r^2 - c\,r^3$$

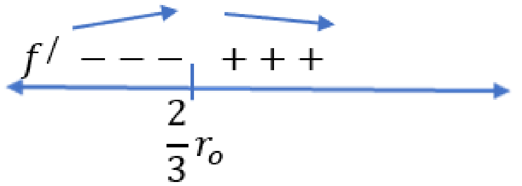
$$V^{/} = 2c\,r_0 r - 3c\,r^2$$

$$V^{/} = 0 \rightarrow 2c\,r_0 r - 3c\,r^2 = 0$$

$$cr(2r_0 - 3r) = 0$$

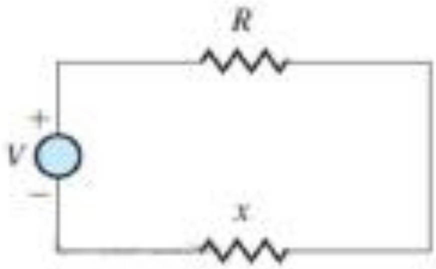
$c\,r = 0 \;\rightarrow r = 0$ مرفوض

$$2r_o - 3r = 0 \rightarrow r = \frac{2}{3}r_0$$



قيمة عظمى محلية وحيده فهي مطلقة

(2) تمثل العلاقة $p(x) = \frac{V^2 x}{(R+x)^2}$ مقدار الطاقة الممتصة في جهاز كهربائي كما في الشكل حيث V مقدارالجهد، R كمية المقاومة، أوجد قيمة x التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة الممتصة.



$$P^{/} = \frac{V^2(R+x)^2 - 2(x)V^2(R+x)}{(R+x)^2}$$

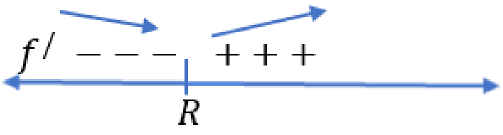
$$V^2(R-x)[r$$

$$P^{/} = \frac{= V^2(R+x)[R+x-2x]}{(R+x)^2}$$

$$P^{/} = 0 \rightarrow V^2(R+x)[R+x-2x]$$

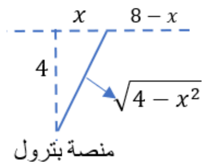
$V = 0$ مرفوض $R = -x$ مرفوض

$$R + x - 2x \rightarrow R = x$$



قيمة صغرى محلية وحيده فهي مطلقة

(1) يراد توصيل خط انابيب من منصة للبترول في البحر وتبعد 4 كيلو متر عن الشاطئ ، الى خزان للنفط يقع على الشاطئ ويبعد الى الشرق عن اقرب نقطة للمنصة من الشاطئ مسافة 8 كيلو متر. اذا علمت ان تكلفة مد كيلومتر في البحر هو 5 مليون درهم وعلى الشاطئ هو 3 مليون درهم. اوجد اقل تكلفة لمد خط الانابيب بين المنصة والخزان.



$0 \le x \le 8$

$$C = C_s + S_l$$

$$C = 5\sqrt{16+x^2} + 3(8-x)$$

$$C^{/} = \frac{5(2x)}{2\sqrt{16+x^2}} + 3(-1)$$

$$C^{/} = 0 \rightarrow \frac{5(2x)}{2\sqrt{16+x^2}} = 3$$

$$5x = 3\sqrt{16+x^2}$$

$$25x^2 = 9(16+x^2)$$

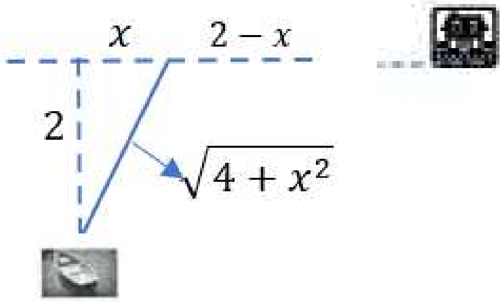
$$25x^2 - 9x^2 = 144$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3, x = -3 \text{ مرفوض}$$

C(0)=44 , C(8)=44.7 ,C(3)=40

أُقل تكلفة هي 40 مليون

(2) ابحر شخص في قاربه على بعد 2 km من الشاطئ ، يريد الوصول الى بيته الذي يقع على الشاطئ والذي يبعد 2km عن اقرب نقطة للقارب من الشاطئ ، اذا علمت انه يمكنه التجديف بمعدل 2 km/h والسير بمعدل 5 km/h . اوجد اقل زمن ممكن للوصول الى بيته



$$T = t_1 + t_2 \qquad \text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$T = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{2-x}{5}$$

$$T^{/} = \frac{1}{2} . \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}$$

$$T^{/} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} . \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5}$$

$$5x = 2\sqrt{x^2+4}$$

$$25x^2 = 4(x^2+4) \rightarrow 21x^2 = 16$$

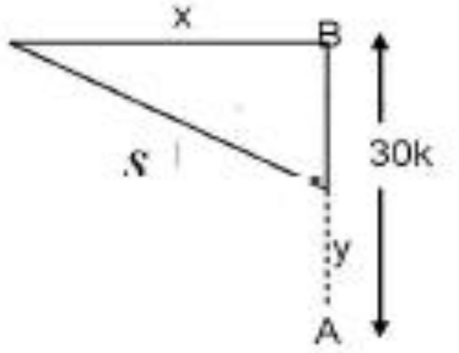
$$21x^2 = \frac{16}{21} \rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{21}} , x = \frac{-4}{\sqrt{21}} \text{ مرفوض}$$

$$T(0) = 2.4$$

$$T(2) = 2$$

$$T\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 103 \text{ أقل زمن}$$

(1) باخرتان هما A,B تقع الباخرة A على بعد $30\ km$ جنوبي الباخرة B وتسير شمالاً بسرعة $15\ km/h$ وكانت الباخرة B تسير غرباً بسرعة $10\ km/h$ متى تكون المسافة بينهما أقل مايمكن



$$S = \sqrt{x^2 + (30 - y)^2}$$

$$S = \sqrt{(10t)^2 + (30 - 15t)^2}$$

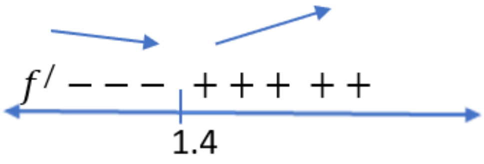
$$S = \sqrt{100t^2 - 900t + 900}$$

$$S = \sqrt{325t^2 + 900 - 900t}$$

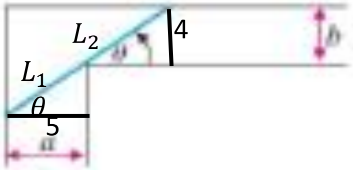
$$S^{/} = \frac{650t - 900}{2\sqrt{325t^2 + 900 - 900t}}$$

$$S^{/} = 0 \to 650t - 900x = 0 \quad ,t = 1.4$$

أقل تكلفة هي 40 مليون



أقل زمن بعد 1.4 ساعة



(2) الشكل المجاور يمثل ممر بعرض $a = 5m$ من احدى الجهتين والجهة الاخرى بعرض $b = 4m$ اوجد طول اطول سلم ممكن ان يمر من الممر

$$\cos\theta = \frac{5}{L_1}$$

$$L_1 = \frac{5}{\cos\theta}$$

$$L_1 = 5\sec\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{L_2}$$

$$L_2 = \frac{4}{\sin\theta}$$

$$L_2 = 4\csc\theta$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$L = 5\sec\theta + 4\csc\theta$$

$$L^{/} = 5\sec\theta\tan\theta - 4\csc\theta\cot\theta$$

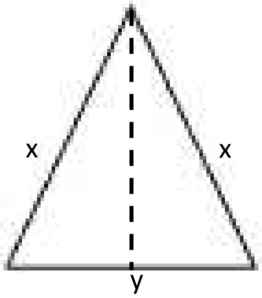
$$L^{/} = 0 \ \to 5\sec\theta\tan\theta = 4\csc\theta\cot\theta$$

$$\frac{\sec\theta\tan\theta}{\csc\theta\cot\theta} = \frac{4}{5} \to \tan^3\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} \to \theta = \tan^{-1}\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 42^{\circ}$$

$$L = 5\sec 42^{\circ} + 4\csc 42^{\circ} = 12.7\ \text{m}$$

(1) ما اكبر مساحة مثلث متساوي الضلعين محيطة يساوي 30cm



$$2x + y = 30$$

$$y = 30 - 2x$$

$$0 \le x \le 15$$

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}y\sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$A = \frac{1}{2}y\sqrt{x^2 - \left(\frac{30-2x}{2}\right)^2}$$

$$A = y\sqrt{x^2 - (15-x)^2}$$

$$A = (30-2x)\sqrt{x^2 - (15-x)^2}$$

$$A = (30-2x)\sqrt{x^2 - 225 + 30x - x^2}$$

$$A = (30-2x)\sqrt{-225+30x}$$

$$A^{/} = (-2)\sqrt{-225+30x} + (30-2x).\frac{30}{2\sqrt{-225+30x}}$$

$$A^{/} = 0 \to (2)\sqrt{-225+30x} = (30-2x).\frac{30}{2\sqrt{-225+30x}}$$

$$4(-225+30x) = 900 - 60x$$

$$(-225+30x) = 225 - 15x$$

$$45x = 450$$

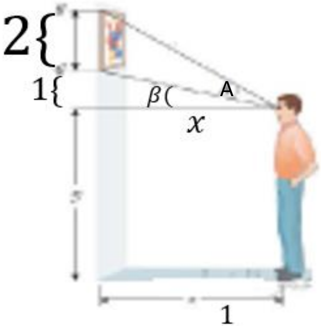
$$x = 10 \to y = 10$$

$$A(0) = 0, A(115) = 0$$

$A(10) = \frac{1}{2}(10)\left(5\sqrt{3}\right) = 25\sqrt{3}$ مساحة أكبر

(2) اعتمد على الشكل المجاور في ايجاد قيمة x التي تجعل زاوية الرؤية A اوضح ما يمكن

حيث $6'$ تمثل 6 اقدام



$$tan\beta \;\; = \frac{1}{x}$$

$$\tan(A+\beta) = \frac{3}{x}$$

$$A + \beta = tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$A = tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) - \beta$$

$$A = tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$A = cot^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - cot^{-1}(x)$$

$$A^{/} = \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}.\frac{1}{3} - \frac{-1}{1+x^2}$$

$$A^{/} = 0 \to \frac{3}{9+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$x = \sqrt{3}\,, x = -\sqrt{3}$ مرفوض

$x = \sqrt{3}$ أوضح رؤية عندما

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثامن : المعدلات المرتبطة

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

(1) اقراء المسالة وارسم شكلا توضيحياً ان لزم

(2) حدد الثوابت و المتغيرات ،والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة

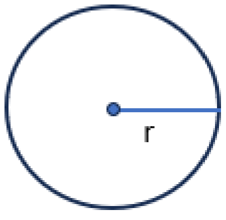
(3) اكتب العلاقة التي تربط المتغيرات مستعيناً بالمسالة والرسم بحيث تكون معدلات جميع المتغيرات معلومة باستثناء المعدل المطلوب

(4) اشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة للزمن (يجوز الاشتقاق بوجود عدة متغيرات)

(5) عوض القيم المعطى لايجاد المطلوب

ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ،ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5m / \min$ اوجد معدل التغير في مساحة الحريق عندما يكون نصف قطره $200m$.

(1 + 2



(3

$$\frac{dr}{dt} = 5$$

$$\frac{dA}{dt} = ؟؟$$

r =200

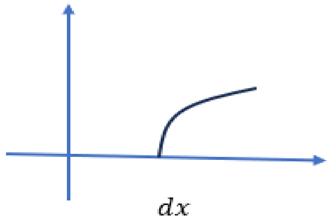
4) $A = \pi r^2$

5) $\frac{dA}{dt} = \pi\left(2r\frac{dr}{dt}\right)$

6) $\frac{dA}{dt} = \pi\big(2(200)(5)\big) = 2000\pi$

$$\frac{dA}{dt} = 6283m^2/min$$

(1) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y=\sqrt{x^2-3}$ ، فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\ unit/s$ أوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما تكون $x=2$



$$\frac{dx}{dt}=3$$

$$\frac{dy}{dt}=؟؟$$

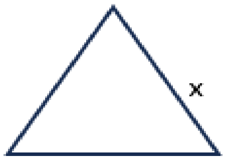
$$x=2$$

$$y=\sqrt{x^2-3}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2-3}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(2)(3)}{2\sqrt{2^2-3}}=6$$

(2) مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $0.1\,cm/s$ أوجد مقدار الزيادة في مساحته عندما يكون طول ضلعه يساوي $\sqrt{3}\ cm$



$$\frac{dx}{dt}=0.1$$

$$\frac{dA}{dt}=؟؟$$

$$x=\sqrt{3}$$

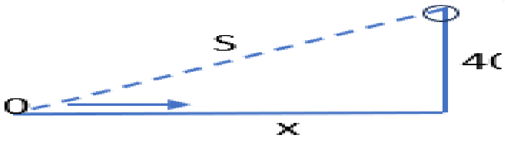
$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{dA}{dt}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3}(0.1)\right)=0.15cm^2/min$$

(3) تتحرك كرة بمعدل $1\ m/s$ على خط أفقي متجه نحو عمود ارتفاعه $40\ m$ ، أوجد معدل تغير المسافة بين الكرة وقمة العمود عندما تكون الكرة على بعد $30\ m$ من قاعدة العمود.

(اهمل ارتفاع الكرة)



$$\frac{dx}{dt}=-1$$

لأن المسافة تقل

$$\frac{dS}{dt}=؟؟$$

$$x=30$$

$$S=\sqrt{x^2+40^2}$$

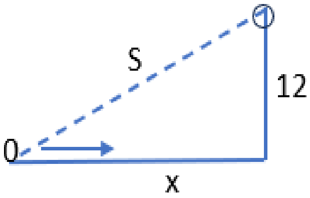
$$\frac{dS}{dt}=\left(\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+40^2}}\right)$$

$$\frac{dS}{dt}=\left(\frac{(30)(-1)}{\sqrt{30^2+40^2}}\right)=-0.6\,m/s$$

(1) من نقطة على جسر ارتفاعة عن سطح البحر $12\ m$ ، سحب قارب بواسطة حبل بمعدل $8\ m/\min$

اوجد السرعة الافقية التي يتحرك بها القارب عندما يكون القارب على بعد $16\ m$ من اسفل الجسر.

(اهمل ارتفاع القارب)



ملاحظة

عندما $x = 16$

$$S = \sqrt{16^2 + 12^2}$$

$$S = 20$$

$$\frac{dS}{dt} = -8$$

$$\frac{dS}{dt} = ؟؟$$

$$x = 16$$

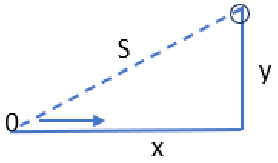
$$x = \sqrt{S^2 - 12^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2s\dfrac{dS}{dt}}{2\sqrt{s^2 - 12^2}}\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{(20)(-8)}{\sqrt{20^2 - 12^2}}\right) = -10\ m/s$$

(2) تسير سيارة بسرعة $50km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟ فسر ذلك



$$\frac{dy}{dt} = -40$$

$$\frac{dx}{dt} = -50$$

$$\frac{ds}{dt} = ??$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)(-40) + \left(\frac{1}{2}\right)(-50)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

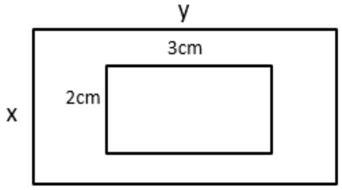
$$\frac{dS}{dt} = -62.6\ km/h$$

هذه القراءة خاطئة لأن الرادار متحرك

(1) مستطيل عرضة $2\ cm$ ، وطولة $3\ cm$ يتغير بعدي المستطيل بحيث يزداد عرضة بمعدل $4\ cm / s$

فاذا كانت النسبة بين ابعاد المستطيل لا تتغير ، اوجد معدل تزايد مساحة المستطيل عندما يكون عرضة $8\ cm$

$$A = xy$$



$$\frac{dx}{dt} = 4$$

$$x = 8$$

$$\frac{dA}{dt} = ??$$

من التشابه

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

نلاحظ عدم وجود معلومات عند y ومشتقتها

لذا نحتاج إلى معادلة مساعدة

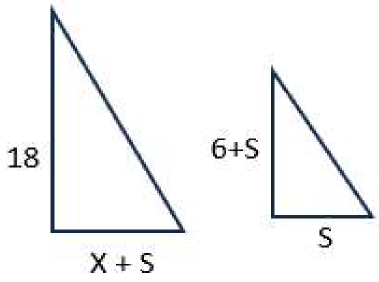
$$A = x.\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x^2$$

$$A = 3x.\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 3x\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = 3(8)(4) = 96ft/s$$

(2) يمشي رجل طوله $6\ ft$ بمعدل $12\ ft / s$ على خط أفقي مبتعداً عن عمود كهرباء ارتفاعه $18\ ft$.

أوجد معدل تغير طول الرجل



$$\frac{dx}{dt} = 12 , \frac{ds}{dt} = ??$$

من التشابه

$$\frac{x+s}{s} = \frac{18}{6} = 3$$

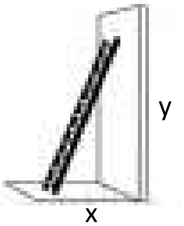
$$x + s = 3s$$

$$x = 2s \rightarrow s = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(12) = 6$$

سلم طوله $15\ m$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، ويتحرك بعيدا عن الحائط بمعدل $8\ m/s$

(أ) ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم على الحائط عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $12\ m$ من الحائط.



$$\frac{dx}{dt} = 8$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

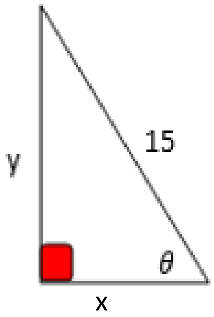
$$x = 12$$

$$y = \sqrt{15^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x.\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{15^2 - x^2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=12} = \frac{-8(12)}{\sqrt{15^2 - 12}} = -10.66\ m/s$$

(ب) ما معدل التغير في مساحة المثلث الذي يتكون من السلم والحائط والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $12\ m$ من الحائط.



$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}.y + \frac{dy}{dt}.x\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(8.9 + 12.(-10.66) = -27.96\ m^2/s$$

(ج) ما معدل التغير في الزاوية التي بين السلم والارض عند اللحظة التي تكون فيها الزاوية $\frac{\pi}{6}$

$$cos\theta = \frac{x}{15} \qquad \rightarrow \qquad -\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{15}.\frac{dx}{dt}$$

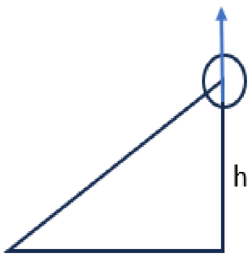
$$-\frac{1}{2}.\frac{d\theta}{dt} = \frac{8}{15} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{16}{15}\ rad/s$$

(1) يرتفع بالون راسياً للأعلى بمعدل $42m / \min$ ، اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض ويبعد $150m$ عن موقع البالون على الارض، اوجد معدل تغير زاوية المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع $150m$ من سطح الارض

$$tan\theta = \frac{h}{150} \quad \rightarrow \ \theta = tan^{-1}\frac{h}{150}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{150}\cdot\frac{dh}{dt}}{1+\left(\frac{h}{150}\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{150}\cdot 42}{1+\left(\frac{150}{150}\right)^2} = 0.42\ rad/min$$



$$\frac{dh}{dt} = 42$$

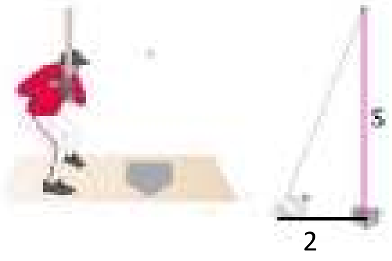
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{h=150} =?$$

(2) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيس للكرة ويضرب كرة بشكل افقي وبسرعة متجهة $130\,ft / s$ ،ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة عندما تكون الكرة على بعد $10\,ft$

$$tan\theta = \frac{s}{2} \quad \rightarrow \ \theta = tan^{-1}\frac{s}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{ds}{dt}}{1+\left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

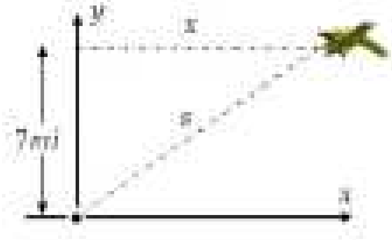
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{1}{2}.130}{1+\left(\frac{10}{2}\right)^2} = 2.5\ rad/s$$



$$\frac{ds}{dt} = 130$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{s=10} =?$$

(1) تطير طائرة على ارتفاع ثابت قدره $7\ mi$ عن سطح الارض وتمر مباشرة فوق رادار كما هو مبين بالشكل ، اذا كانت المسافة بين الطائرة والرادار تتغير بسرعة $300\ mi / h$ اوجد سرعة الطائرة عندما تكون المسافة بين الطائرة والرادار $10\ mi$.



$$\frac{ds}{dt} = 300$$

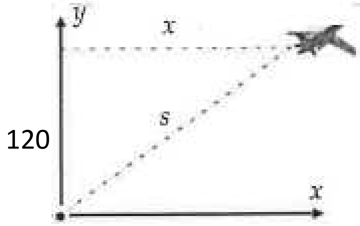
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{s=10} = ?$$

$$x = \sqrt{s^2 - 7^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2s.\frac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2 - 7^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10(300)}{\sqrt{10^2 - 49}} = 420\ mi/h$$

(2) تطير طائرة حمد الورقية على ارتفاع ثابت قدره $120m$ وتقذفها الرياح افقياً بمعدل $6m / s$ ما السرعة التي يجب ان يترك فيها حمد الخيط حتى تبقى الطائرة على نفس الارتفاع وذلك عندما تكون الطائرة على بعد $130m$ منه.



$$\frac{ds}{dt} = 300$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{s=10} = ?$$

<u>ملاحظة:</u> عندما S =130

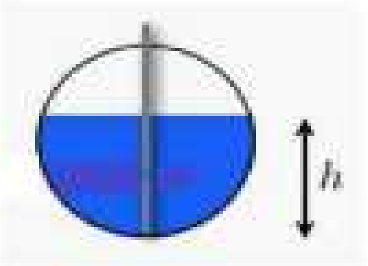
$x = \sqrt{130^2 - 120^2}$ =50

$$S = \sqrt{x^2 + 120^2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2x.\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + 120^2}}$$

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{x=50} = \frac{50(6)}{\sqrt{50^2 + 120^2}} = 2.3\ m/s$$

(1) يتدفق النفط الى خزان على شكل نصف كرة بمعدل $8m^3 / s$ ، فاذا كان حجم النفط V في الخزان يعطي بالعلاقة



$$V=\frac{\pi}{3}h^2(36-h)$$

أوجد معدل تغير ارتفاع الخزان عندما يكون النفط على ارتفاع $4m$.

$$V=\frac{\pi}{3}(36h^2-h^3)$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left(72h\frac{dh}{dt}-3h^2\frac{dh}{dt}\right)$$

$$8=\frac{\pi}{3}(72(4)-3(4)^2)\frac{dh}{dt}$$

$$24=\pi.240.\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{10\pi}m/s$$

$$\frac{dv}{dt}=8$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=4}=?$$

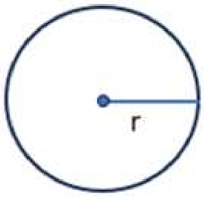
(2) بالون كروي نفخ في غاز الهيليوم بمعدل $100\pi\ ft^3 / \min$.

(أ) اوجد سرعة تزايد نصف قطر البالون عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5\ ft$.

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2.\frac{dr}{dt}$$

$$100\pi=100\pi.\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt}=1\ ft/min$$



$$\frac{dV}{dt}=100\pi$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=5}=??$$

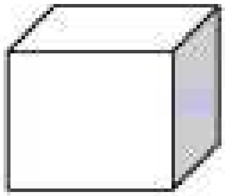
(ب) اوجد سرعة تزايد مساحة البالون السطحية عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5\ ft$.

$$S=4\pi r^2$$

$$\frac{dS}{dt}=8\pi r.\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt}=8\pi(5)(1)=40\pi\ ft^2/min$$

(1) خزان مكعب الشكل مملوء بالماء طول ضلعه $5\ m$ يتسرب منه الماء بمعدل $2\ m^3 / h$ ، اوجد معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان .



المتغير فقط هو ارتفاع الماء وليس طول أو عرض الخزان

$$V = 5.5.\mathrm{h} = 25\mathrm{h}$$

$$\frac{dV}{dt} = 25\frac{dh}{dt}$$

$$-2 = 25\frac{dh}{dt} - 2 = 25\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -0.08\ m/h$$

(2) خزان اسطواني الشكل نصف قطره $3\ ft$ وارتفاعه $5\ ft$ و يتدفق الماء له بمعدل $14\ ft^3 / s$ ويتسرب منه بمعدل $6\ ft^3 / s$.

(أ) اوجد معدل تغير ارتفاع الماء داخل الخزان

نلاحظ أن نصف قطر الماء ثابت

$$V = \pi(3)^2.h\ V = 9\pi h$$

$$\frac{dV}{dt} = 9\pi\frac{dh}{dt}$$

$$9 = 9\pi\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\ ft/s$$

$$\frac{dv}{dt} = 15 - 6 = 9$$

$$\frac{dh}{dt} = ??$$

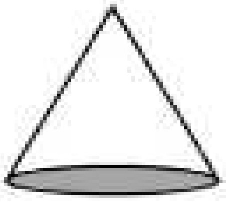
(ب) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء داخل الخزان

سطح الماء

ثابت لا يتغير

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

(1) يتشكل الرمل بعد تفريغه على شكل مخروط قائم رأسه للاعلى بمعدل $10m^3/\min$ اذا كان ارتفاع المخروط يساوي طول قطر قاعدة المخروط ، اوجد سرعة تغير ارتفاع المخروط عندما يكون ارتفاعه $6m$.



$h = 2r$

$\frac{dV}{dt} = -10$

$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=5} = ??$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h \ = \frac{1}{3}\pi r^2 . 2r$$

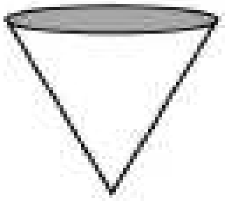
$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r^2 . \frac{dr}{dt}$$

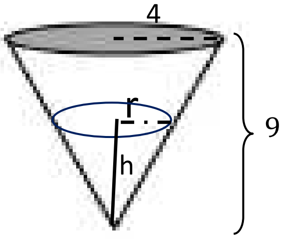
$$-10 = 2\pi (5)^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-10}{50\pi} = \frac{-1}{5\pi} \ m/min$$

(2) يتسرب الماء من خزان على شكل مخروط قائم رأسه للاسفل بمعدل $10m^3/\min$ اذا كان ارتفاع المخروط يساوي $\frac{3}{8}$ من طول قطر قاعدة المخروط ، اوجد سرعة تغير نصف قطر المخروط عندما يكون نصف القطر $4m$. ثم اوجد سرعة هبوط سطح الماء عند نفس اللحظة.

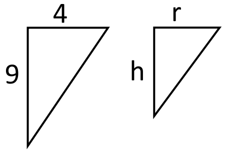


(1) خزان ماء مخروطي قائم رأسه للاسفل طول نصف قطر قاعدته $4m$ وارتفاعه $9m$ ،يصب فيه الماء بمعدل $17m^3/h$ يتسرب الماء منه بمعدل $8m^3/h$ ، اوجد سرعة تغير نصف قطر المخروط عندما يكون نصف القطر $2m$ ، ثم اوجد سرعة هبوط سطح الماء عند نفس اللحظة.

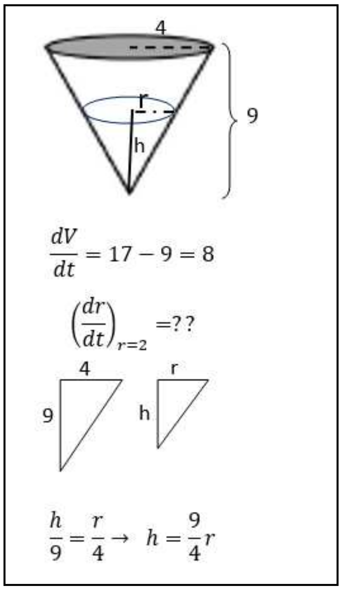


$$\frac{dV}{dt} = 17 - 9 = 8$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=2} = ??$$



$$\frac{h}{9} = \frac{r}{4} \rightarrow \quad h = \frac{9}{4}r$$



$$\frac{dV}{dt} = 17 - 9 = 8$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=2} = ??$$

$$\frac{h}{9} = \frac{r}{4} \rightarrow \quad h = \frac{9}{4}r$$

حجم الماء في المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h \ = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{9}{4}r$$

$$V = \frac{3}{4}\pi r^3$$

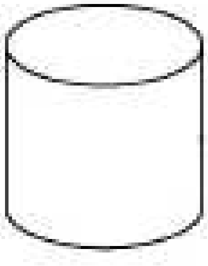
$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi r^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$9 = \frac{9}{4}\pi (2)^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$9 = 9\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \ m/h$$

(2) اسطوانة دائرية قائمة تتمدد بالحرارة ، فإذا كان ارتفاعها $\frac{6}{7}$ من نصف قطر قاعدتها ،ويتغير نصف قطرها بمعدل $0.1ft/h$ أوجد معدل تغير حجمها وذلك عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها $14ft$.



$$\frac{dr}{dt} = 0.01$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{r=4} = ??$$

$$h = \frac{2}{3}(2r) = \frac{4r}{3}$$

$$V = \pi r^2 . h \ = \pi r^2 . \frac{4}{3}r$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi (5)^2 . 0.01$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \ ft^3/h$$

مكعب ثلجي يتناقص طول ضلعة بمعدل $1cm/h$

(أ) أوجد معدل تغير حجمه عندما يكون طول ضلعه $10cm$

$$\frac{dx}{dt} = -1$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{x=10} = ??$$

$$V = r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 . \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 3(10)^2(-1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -300\ cm^3/h$$

(ب) أوجد معدل تغير مساحته السطحية عندما يكون طول ضلعه $10cm$

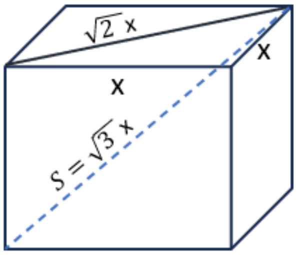
$$S = 6x^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 12x . \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 12(10)(-1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -120\ cm^2/h$$

(ج) أوجد معدل تغير طول قطره عندما يكون طول ضلعه $10cm$



$$S = \sqrt{3}\ x$$

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{3} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{3}(-1)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\sqrt{3}\ cm^2/h$$

(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 120 برميل في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}$ ، اوجد معدل تزايد نصف قطر التسرب عندما يكون نصف القطر $300\,ft$.

برميل $7.5 = 1 ft^3$

$$\frac{1}{4}'' = \frac{1}{4} in = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} ft = \frac{1}{48}'$$

$$\frac{dV}{dt} = 120 \text{برميل}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{120}{7.5} = 16A^3/m$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=300} = ??$$

$$V = \pi r^2 h \ \ V = \pi r^2 . \frac{1}{48}$$

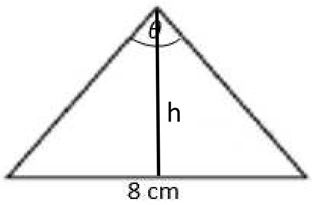
$$V = \frac{1}{48} \pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{48} \pi r \frac{dr}{dt}$$

$$16 = \frac{2}{48} (300) \ \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(16)(48)}{600} = 0.4\ ft/min$$

(2) مثلث متساوي الساقين قاعدته ثابتة طولها $8\ cm$ ، يزيد ارتفاع المثلث بمعدل $2\ cm$ لكل دقيقة اوجد معدل التغير في زاوية رأس المثلث عندما يكون ارتفاعه $6\ cm$.



$$\frac{dh}{dt} = 2$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{h=6} = ??$$

$$tan\frac{\theta}{2} = \frac{4}{h}$$

$$\frac{\theta}{2} = tan^{-1}\frac{4}{h}$$

$$\theta = 2tan^{-1}\frac{4}{h}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{-\frac{4}{h^2}}{1 + \left(\frac{4}{h}\right)^2} = -0.3\ rad\ /min$$

الاقتصاد

القيمة العظمى للربح

القيمة العظمى للربح (إذا وجدت) تحدث عند مستوى الإنتاج الذي عنده الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية .

$r(x)$ = الدخل من بيع x سلعة . ‏ ‏ = عدد القطع × السعر ‏ ‏ $\frac{dr}{dx}$ = دخل حدي .

$c(x)$ = تكلفة إنتاج الـ x سلعة . ‏ ‏ $\frac{dc}{dx}$ = تكلفة حدية .

$p(x)$ = الربح من بيع x سلعة . ‏ ‏ $\frac{dp}{dx}$ = ربح حدي .

$p(x) = r(x) - c(x)$

ملاحظة مهمة : دالة الدخل والتكلفة والربح هي دالة تراكمية اما الدخل الحدي والتكلفة الحدية والربح الحدي دالة حدية اي تحسب كل دالة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظات

(1) التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C(x_n) - C(x_{n-1})$

(2) التكلفة الحدية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C'(x_n)$

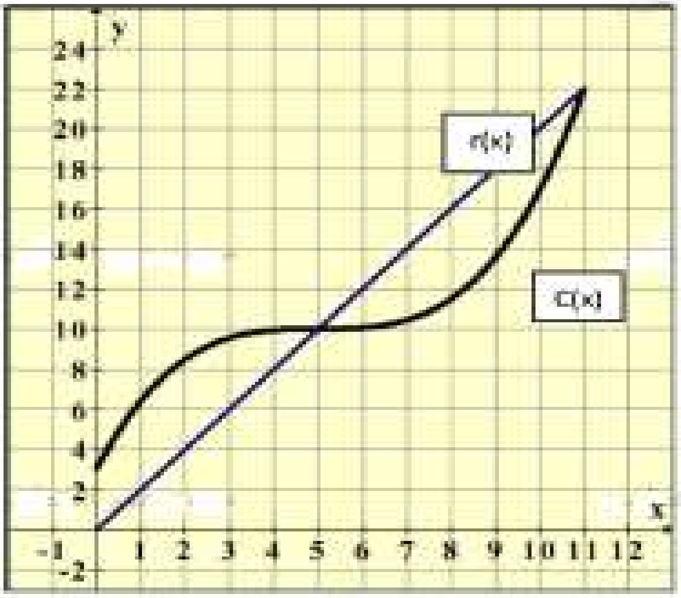
(3) عندما يكون الانتاج كبير فان التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة يساوي $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

(5) اذا كانت $C'(x) > 0$ فان ذلك يدل على زيادة التكلفة مع زيادة الانتاج

(6) اذا كانت $C''(x) > 0$ فان ذلك يدل على زيادة تكلفة القطعة الواحدة مع زيادة الانتاج

ولكن يفضل ان تكون سالبة..حتى يكون الانتاج على كفاءة عالية



في الشكل المجاور $C(x)$ تمثل التكلفة بملايين الدراهم ، $r(x)$ تمثل الدخل بملايين الدراهم حيث (x) تمثل وحدات جهاز الحاسوب المنتجة من شـــــــركة ما بآلاف الوحـــــــدات حيث $0 \le x \le 11$

اجب عما يلي :

(1) اوجد $C(0)$ وماذا تمثل

$C(0) = 3$

وهي تمثل التكلفة الابتدائية للمشروع

(2) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة ربح

(5,11)

(3) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة خسارة

(0,5)

(4) حدد القيمة التقريبية للانتاج التي تحقق فيها الشركة ربحية عظمى

X = 8000

(5) اوجد $C(5)$ و $r(5)$ وماذا تلاحظ

$r(5) =$ 10 مليون مليون

$S(5) =$ مليون10

الربح يساوي صفر (الدخل = التكلفة)

تسمى هذه النقطة " بنقطة التعادل "

(1) أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x) = 0.02x^2 + 8x + 5000$

(أ) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

$C(100) = 6000 - 5988 = 12$ درهم

(ب) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

$$C^{/}(100) = 0.04x + 8$$

$C^{/}(100) = 0.04(100) + 8 = 12$درهم

(ج) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100, وايهما اسهل بالحساب.

متساوية

لكن التكلفة الحدية أسهل بالخساب

(د) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج100 قطعة

متوسط الإنتاج $C^{/}(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{6000}{100} = 60$ درهم

(هـ) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

متوسط الإنتاج $C^{/}(1000) = \frac{33000}{1000} = 30$ درهم

(و) قارن بين متوسط انتاج 100 متوسط انتاج 1000ماذا تلاحظ.

نلاحظ انه كلما زاد الإنتاج تقل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة

(1) اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x وحدة تعطى بالعلاقة $C(x)=2x+5000$ ،ودالة الايردات تعطى بالعلاقة $R(x)=10x-0.001x^2$.اوجد القيمة العظمى للربح.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 10x - 0.001x^2 - (2x + 100)$$

$$P^{/}(x) = 10 - 0.002x - 2$$

$$P^{/}(x) = 8 - 0.002x$$

$$P^{/}(x) = 0 \rightarrow \ 8 - 0.002x \ \rightarrow x = \frac{8}{0.002} = 4000$$

القيمة العظمى للربح $P^{//}(x) = -0.002 < 0$ الاختبار

$P(400) = 11000$ للدالة قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

(2) مصنع لعب اطفال لانتاج الدمى ، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم ،فاذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ اوجد عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح.

عدد القطع × السعر : $P(x) = 20x$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P^{/}(x) = R^{/}(x) - C^{/}(x)$$

$$P^{/}(x) = 20 - (0.004x + 2)$$

$$P^{/}(x) = 12 - 0.004x$$

$$P^{/}(x) = 0 \rightarrow \ 12 - 0.004x \ \rightarrow x = \frac{12}{0.004} = 3000$$

القيمة العظمى للربح $P^{//}(x) = -0.004 < 0$ الاختبار

$P(3000) = 13000$ للدالة قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

القيمه الصغرى لمتوسط التكلفة

متوسط التكلفة يساوي $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

(1) لتكن $C(x)=x^3-6x^2+15x$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة بالالاف . اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.**

$$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{x^3-6x^2+15x}{x}=x^2-6x+15$$

$$\bar{C}^{/}(x)=2x-6$$

$$\bar{C}^{/}(x)=0\ \rightarrow x=3$$

$$\bar{C}^{//}(x)=2>0$$

للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة

فهي مطلقة عند إنتاج 3000 قطعة

(2) لتكن $C(x)=0.02x^2+20x+1800$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.**

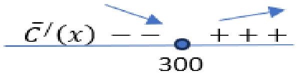
$$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{0.02x^2+20x+1800}{x}$$

$$=0.02x+20+\frac{1800}{x}$$

$$\bar{C}^{/}(x)=0.02x-\frac{1800}{x^2}$$

$$\bar{C}^{/}(x)=0\ \rightarrow 0.02=\frac{1800}{x^2}$$

$0.02x^2=1800 \rightarrow x^2=90000\ \rightarrow x=300\ x=-300$ مرفوض



للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة

فهي مطلقة عند إنتاج 300 قطعة

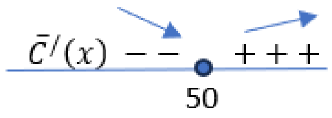
(1) لتكن $C(x) = 10e^{0.02x}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة بالالاف . اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10e^{0.02x}}{x}$$

$$\bar{C}^{/}(x) = \frac{x.(0.2)e^{0.02x} - (1)10e^{0.02x}}{x^2} = \frac{e^{0.02x}(0.2x-10)}{x^2}$$

$\bar{C}^{/}(x) = 0 \ \to 0.2x - 10 \to x = 50 \, , e^{0.02x} = 0$ ليس لها حل

$\bar{C}^{/}(x)$ غ.م $\to x^2 = 0, x = 0$ مرفوض



للدالة قيمة صغرى محلية وحيدة

فهي مطلقة عند إنتاج 50 جهاز

(2) لتكن $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{\frac{3}{2}}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة . أوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{16000 + 200x + 4x^{\frac{3}{2}}}{x} = \frac{16000}{x} + 200 + 4x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{C}^{/}(x) = -\frac{16000}{x^2} + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{C}^{/}(x) = 0 \ \to 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{16000}{x^2}$$

$$2x^{\frac{3}{2}} = 16000 \to x^{\frac{3}{2}} = 8000 \ \to x = 8000^{\frac{3}{2}} \to \ x = 400$$

(3) تمثل الدالة $\bar{C}(x) = 10 + \frac{100}{x}$ متوسط التكلفة لانتاج x من الاجهزة . اذا كان الانتاج الحالي 10 قطعة ويزداد بمعدل جهزين سنويا ، اوجد معدل التغير السنوي في متوسط التكلفة.

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\left(\frac{d\bar{C}\,(x)}{dt}\right)_{x=10} = ?$$

$$\frac{d\bar{C}\,(x)}{dt} = -\frac{100}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\bar{C}\,(x)}{dt} = -\frac{100}{(10)^2} .2 = -2$$

ستنخفض قيمة القطعة الواحدة بالمتوسط 2

(1) اذا كانت سعر التذكرة الواحدة لحضور حفل هي 40 درهم ،ويتم خصم واحد درهم عن كل تذكرة بعد طلب 20 تذكرة بحد اقصى 50 تذكرة. (مثلاً سعر التذكر 38 درهم عند شراء 22 تذكرة) أوجد عدد التذاكر التي تحقق القيمة العظمى لتكلفة التذاكر.

$$C(x) = [\,40 - 1(x-20)].x$$
$$C(x) = 40x - x^2 + 20x$$
$$C(x) = 60x - x^2$$
$$C^{/}(x) = 60 - 2x$$
$$C^{/}(x) = 0 \ \rightarrow 60 = 2x$$
$$x = 30$$

$$21 \le x \le 50$$
$$C(21) = 840$$
$$C(50) = 500$$
$$C(30) = 900$$

عدد التذاكر هو 30

(2) تبيع مكتبة 20000 او اقل كتاب سنوياً من نوع واحد بربح 3 درهم لكل كتاب فاذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا العدد فان الربح يقل بمعدل 0.0001 درهم عن كل كتاب زيادة عن 20000 كتاب (مثلاً ربح الكتاب الواحد 2.9 درهم عند بيع 21000 كتاب). ما عدد النسخ التى تبيعها المكتبة حتى تحقق أعلى ربح.

$$P(x) = [\,3 - 0.0001(x-20000)].x \qquad , x > 20000$$
$$P(x) = 3x - 0.0001x^2 + 2x$$
$$P(x) = 5x - 0.0001x^2$$
$$P^{/}(x) = 5 - 0.0002x$$
$$P^{/}(x) = 0 \ \rightarrow 5 = 0.0002x$$
$$x = 25000$$

وهي قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

أذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p)=200(30-p)$ حيث p سعر القطعة

ملاحظة

$0<P<30$

(أ) أوجدعدد القطع المطلوبة عند السعر 10 درهم.

$$f(10)=200(30-10)=4000$$

(ب) أوجدعدد القطع المطلوبة عند السعر 15 درهم

$$f(10)=200(30-15)=3000$$

المرونة

$$E=\frac{P}{f(P)}f'(P)$$

(ج) أوجد مرونة الطلب E

$$E=\frac{P(-200)}{200(30-P)}=\frac{-P}{30-P}$$

(د) أوجد مدى الاسعار الذي يكون فيه الطلب مرن $E<-1$.

$$E<-1 \quad \rightarrow \frac{P}{P-30}< -1$$

$$P-30< 0 \rightarrow P>P-30$$

$$2P>30$$

$P>15$ لان المقام موجب

مدى الاسعار هو $15<P<30$

الدخل

$$R=P\times f(P)$$

(هـ) أوجد دالة الايرادات ثم حدد الفترة التي يتزايد فيها الايراد.

$R =$ السعر × عدد القطع

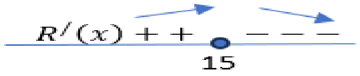
$$R=P\times f(P)$$

$$R=200(30-P).P$$

$$R=200(30P-P^2)$$

$$R^{/}=200(30-2P)$$

$$R^{/}=0\rightarrow P=15$$



تتزايد الايرادات في الفترة(0,15)

تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالعلاقة $s(t) = 60 - 40e^{-0.05x(t)}$ حيث $x(t)$ تمثل كمية الانفاق بالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن t بالسنوات ، والجدول التالي يمثل حجم الانفاق لمدة اربع سنوات.

4	3	2	1	السنة t
20000	18000	16000	14500	$x(t)$ تكلفة الاعلانات

أ) قدر مقدار المبيعات عند السنة الثانية.

$$t = 2 \rightarrow x(t) = 16000$$

$$s(2) = 60 - 40e^{-0.05(16000)} = 42000$$

ب) قدر معدل الانفاق على الاعلانات في السنة الرابعة.

$$x^{/}(t) = \frac{20000 - 18000}{4 - 3} = 2000$$

ج) قدر معدل التغير في كمية المبيعات في السنة الرابعة.

$$s^{/}(t) = -40e^{-0.05x(t)}.(0.05.x^{/}(t))$$

$$s^{/}(t) = 2x^{/}(t)e^{-0.05x(t)}$$

$$s^{/}(t) = 2(2000)e^{-0.05(20)}$$

$s^{/}(t) = 1470$ درهم

العلوم

(1) تحدد العلاقة $f(x)=\sqrt{2x}$ حيث $0\le x\le 8$ كثافة أول x متر من سلك معدني رقيق أوجد الكثافة الخطية للمعدن عندما $x=8$

الكثافة الخطية

$\rho(x)=f'(x)$

$$\rho(x)=f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\rho(8)=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$$

(2) يعرف الرقم الهيدروجيني $P(x)$ بالعلاقة $P(x)=c+ln\frac{x}{1-x}$ حيث تمثل x كمية القاعدة المضافة الى الخليط لكسر الحامض و c عدد ثابت حيث $0<x<1$ ، أوجد قيمة x التي تجعل <u>معدل</u> تغيير الرقم الهيدروجيني صغير جدا.(قيمة صغرى مطلقة)

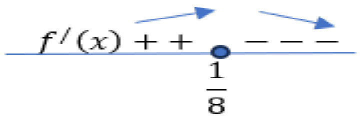
$$f(x)=2x(1-4x)$$

$$f(x)=2x-8x^2$$

$$f'(x)=2-16x$$

$$f'(x)=0\rightarrow 2-16x=0\rightarrow 16x=2$$

$x=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ وهي قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة



∴ يصل سرعة التفاعل إلى قيمة العظمى عندما يكون

تركيز المادة $\frac{1}{8}$ درجة الإشباع

(1) تحدد العلاقة $Q(t)=e^t(3\cos 2t+4\sin 2t)$ ، كمية الشحنة بالكولوم في دائرة كهربائية عند زمن معين، اوجد التيار بعد نصف ثانية .

التيار $I(t)=Q'(t)$

$$I(t)=Q^{/}(t)=e^{t}(3cos2t+4sin2t)+e^{t}(-6sin2t+8cos2t)$$

$$I(t)=Q^{/}(t)=e^{t}(11cos2t-2sin2t)$$

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=e^{1/2}(11\cos 1-2sin1)=7$$

السكـان

(1) تمثل الدالة $f(t)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة

(أ) اوجد $f(2)$ وماذا تمثل .

$$f(2)=\frac{70}{1+3e^{-0.2(2)}}=23$$

أي ان 23% من سكان المدينة ستصلهم الإشاعة بعد ساعتين

(ب) اوجد $f'(2)$ وماذا تمثل .

$$f^{/}(x)=\frac{-70(3(-0.2)e^{-0.2t})}{(1+3e^{-0.2t})^2}$$

$$f^{/}(2)=\frac{42e^{-0.2(2)})}{(1+3e^{-0.2(2)})^2}=3.1$$

أي أن معدل انتشار الإشاعة

هو 3.1% بعد ساعتين

(ج) نسبة عدد السكان الذين ستصلهم الاشاعة .

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{70}{1+3e^{-0.2t}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{70}{1+{}^{3}/_{e^{0.2t}}}=70$$

أي ان نسبة 70 % من السكان ستصلهم الإشاعة

(2) اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=4p(t)\left[5-p(t)\right]$ حيث $p(t)$ عدد السكان مع مرور الزمن ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.

ملاحظة

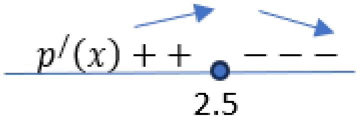
$p'(t)$ تعني معدل النمو السكاني ويمكن اعتبارها دالة في عدد السكان اي ان

$f(p)=p'(t)$

$$f(p)=4p(5-p)=20p-4p^2$$

$$f^{/}(p)=20-8p$$

$$f^{/}(p)=0\ \rightarrow 20=8p\rightarrow p=2.5$$



قيمة عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

يكون معدل النمو في ذروته عندما يكون عدد السكان 2.5 مليون

تمارين عامة على الوحدة الرابعة

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1)التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sqrt{x+4}$ عند $x = 0$ هو

الدرس الاول

(a) $l(x) = 2 + x$

(b) $l(x) = 1 + 2x$

(c) $l(x) = 2 + \frac{1}{2}x$

(d) $l(x) = 2 + \frac{1}{4}x$

(2)التقريب الخطي للدالة $f(x) = tan^{-1}x$ عند $x = 0$ هو

الدرس الاول

(a) $l(x) = x$

(b) $l(x) = 2x$

(c) $l(x) = \frac{1}{2}x$

(d) $l(x) = \frac{\pi}{2} + x$

(3)التقريب الخطي للعدد $\sqrt[3]{67}$ هو

الدرس الاول

(a) $\frac{65}{16}$

(b) $\frac{17}{4}$

(c) $\frac{33}{8}$

(d) $\frac{9}{2}$

(4) يمثل الجدول التالي مستشعر يقيس الموقع $f(x)$ لجسم بعد t ميكروثانية من التصادم فإن موقع الجسم عند $t = 23$ باستخدام الخطي يساوي تقريبا

الدرس الاول

t	20	30	40
f(t)	18	23	23

(a) 40

(b) 18.6

(c) 18.9

(d) 18.3

(5) إن تقريب الاول لصفر الدالة $f(x) = e^{-x} - x$ باستخدام طريقة نيوتن معتبرًا $x_0 = 0$ هو

الدرس الاول

(a) -0.5	(b) 0.5	(c) 0.563	(d) 0.613

(6) التقريب الثاني للعدد $\sqrt{2}$ باستخدام طريقة نيوتن هو

الدرس الاول

(a) $\frac{17}{12}$	(b) $\frac{7}{4}$	(c) $\frac{7}{5}$	(d) $\frac{3}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^8 - 1}{x - 1}$

الدرس الثاني

(a) 6	(b) 7	(c) 8	(d) 9

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos2x}$

الدرس الثاني

(a) 0	(b) 1	(c) $\frac{1}{2}$	(d) $\frac{1}{4}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - cosx}{x}$

الدرس الثاني

(a) 0	(b) 1	(c) -1	(d) 2

(10) $\lim\limits_{x\to 4^+} 8(x-4)^{x-4}$

الدرس الثاني

(a) 0 (b) 1 (c) 8 (d) e^8

(11) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1+\frac{3}{x})$

الدرس الثاني

(a) 0 **(b) 1** **(C) 3** **(d) 9**

(12) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

الدرس الثاني

(a) 0 (b) 1 (c) e (d) e^2

(13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$

الدرس الثاني

(a) 0 (b) 1 (c) e (d) e^2

(14) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

الدرس الثاني

(a) 0 (b) ∞

الدرس الثاني

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

(15) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$

(a) 2

(b) -2

(c) e^2

(d) e^{-2}

الدرس الثاني

(16) $\lim_{x\to 0^+}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

(a) 6

(b) 3

(c) e^6

(d) e^2

الدرس الثاني

(17) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

(a) 3

(b) 2

(c) e^2

(d) $2e^2$

الدرس الثاني

(18) $\lim_{x\to 0^+}(sinx)^{x}$

(a) 0

(b) 1

(c) e

(d) 2

(19) $\lim_{x\to 0}\frac{tan^{-1}x}{sin^{-1}x}$

الدرس الثاني

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(20) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

الدرس الثاني

(a) 2

(b) 3

(c) $\frac{2}{3}$

(d) $\frac{3}{2}$

(21) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$

الدرس الثاني

(a) e

(b) e^{x}

(c) e^{n}

(d) e^{nx}

(22) الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = x - sin2x$ على الفترة $[0,\pi]$ هي

الدرس الثالث

(a) $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}$

(b) $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$

(d) $\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}$

(23) القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x) = sin^{-1}x$ على الفترة $[-1,1]$ هي

(a) π **(b)** 1

الدرس الثالث

(c) $\frac{3\pi}{2}$ **(d)** $\frac{\pi}{3}$

(24) الدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$ متزايدة على الفترة

الدرس الرابع

(a) **(-1 , 0)** **(b)** $(-3,-1)$

(c) $(-\infty, 0)$ **(d)** $(0, \infty)$

(25) الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ هي

(a) **0** **(b)** $0, -1$

الدرس الثالث

(c) $1, -1$ **(d)** -1

(26) الدالة $f(x) = tan^{-1}x$ متزايدة على الفترة

الدرس الرابع

(a) **(-1 , 1)** **(b)** $(0, 2)$

(c) $(-\infty, 0)$ **(d)** $(-\infty, \infty)$

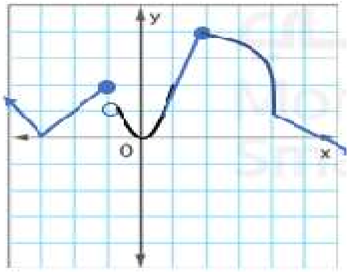
(27) إذا كان للدالة $f(x) = x^3 - cx$ قيمة حرجة عند $x = -1$ فإن قيمة c تساوي

(a) 1 **(b)** 3 **(c)** -3 **(d)** 0

الدرس الثالث

الدرس الثالث

(28) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ إن الاعداد الحرجة للدالة $f(x)$ هي



(a) 2

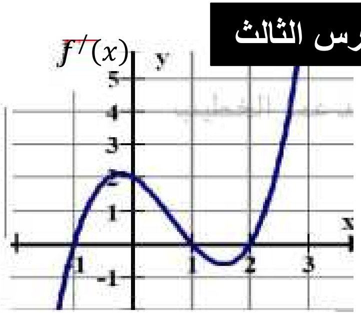
(b) 3

(c) 5

(d) 4

(29) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f^{/}(x)$ إن عدد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)$ هي

الدرس الثالث



(a) 0

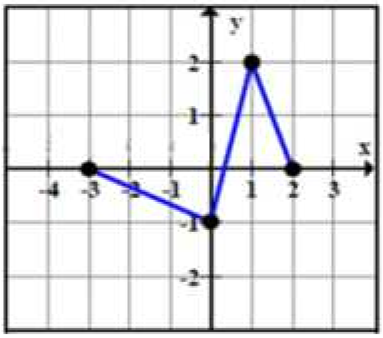
(b) $-1, 1, 2$

(c) $0\ ,\frac{2}{3}$

(d) $-\frac{1}{2}\ ,\frac{3}{2}$

الدرس الثالث

(30) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ ان الدالةf



(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط

(b)لها قيمة صغرى مطلقة فقط

(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة

(d)ليس لها قيم قصوى

الدرس الخامس

(31) الدالة $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$

(a) لها نقطة انقلاب عند $x = 0$

(a) لها نقطة انقلاب عند $x = 1$

(a) لها نقطة انقلاب عند $x = -1$

(d) نقطة لها نقطة انقلاب

(32) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f^{/}(x)$ إن عدد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)$ هي

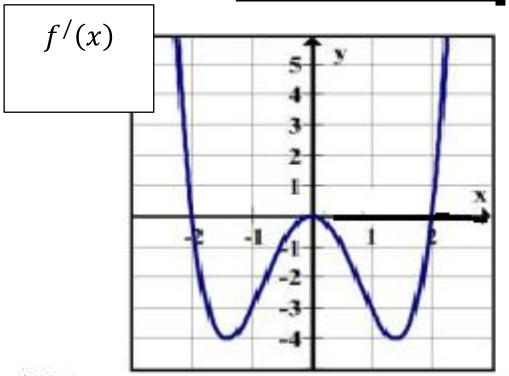
الدرس الخامس

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 4



(33) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان القيمة العظمى المحلية للدالة $f(x)$ تكون عند

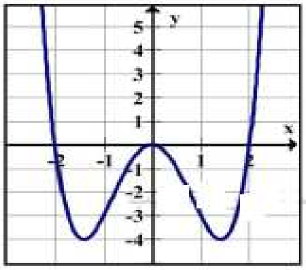
الدرس الرابع

(a) $-2,0$

(b) 0

(c) -2

(d) $-2,0,2$



(34) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان القيمة الصغرى المحلية للدالة $f(x)$ تكون عند

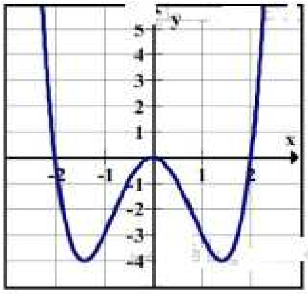
الدرس الرابع

(a) -2

(b) 2

(c) $-2,0$

(d) $2,0$



(35) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان فترة التناقص للدالة $f(x)$ هي

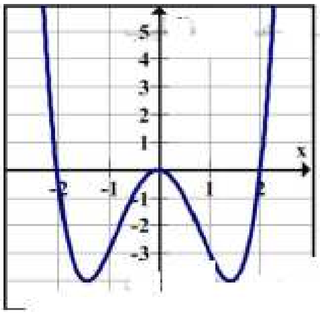
الدرس الرابع

(a) $(-\infty,\frac{-3}{2}),(0,\frac{3}{2})$

(b) $(-1,1)$

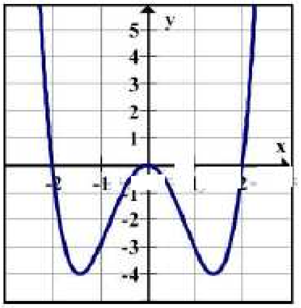
(c) $(-\infty,-1),(1,\infty)$

(d) $(-2,0),(0,2)$



الدرس الخامس

(36) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان فترة التقعر للاعلى للدالة $f(x)$ هي



(a) $(-\infty,\frac{-3}{2}),(0,\frac{3}{2})$

(b) $(\frac{-3}{2},0),(\frac{3}{2},\infty)$

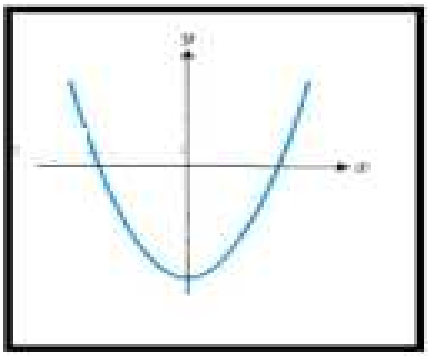
(c) $(-\infty,-1),(1,\infty)$

(d) $(-2,0),(0,2)$

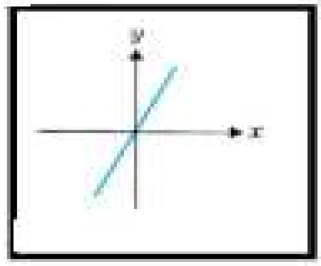
الدرس الخامس

(37)اعتمد على شكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$

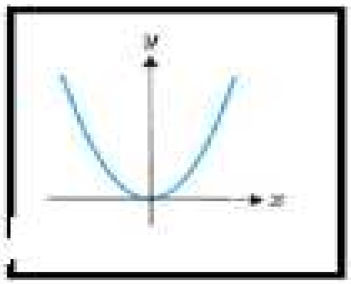
له $f(x)$



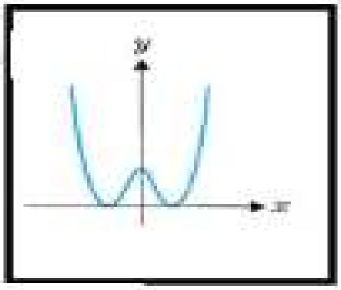
(a)



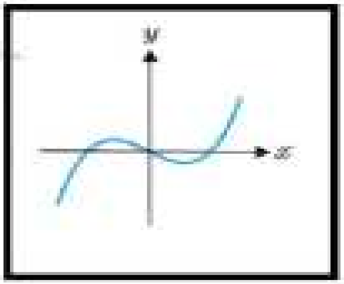
(b)



(c)



(d)

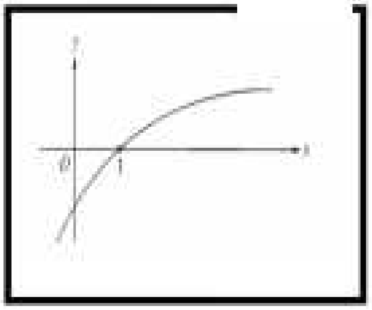


الدرس الخامس

(38) اي من العبارات التالية صحيحة

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي

يمثل بيان الدالة $f(x)$



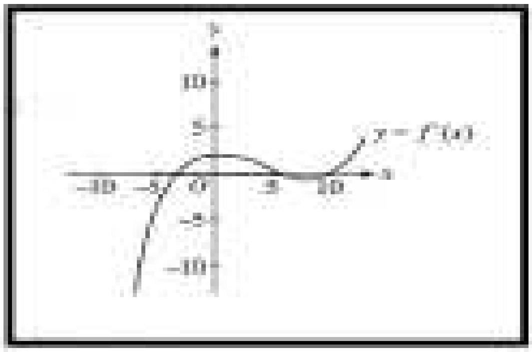
(a) $f(1) < f'(1) < f''(1)$ (b) $f(1) < f''(1) < f'(1)$

(c) $f'(1) < f(1) < f''(1)$ (d) $f''(1) < f(1) < f'(1)$

(39) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي

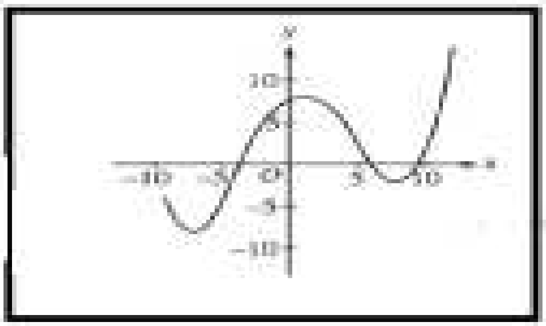
يمثل بيان الدالة $f'(x)$

اي من الرسومات البيانية التالية ممكن ان يكون للدالة $f(x)$

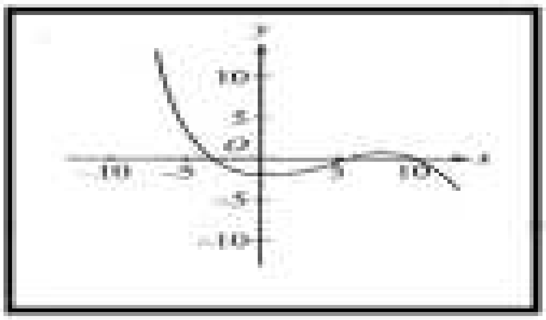


الدرس الخامس

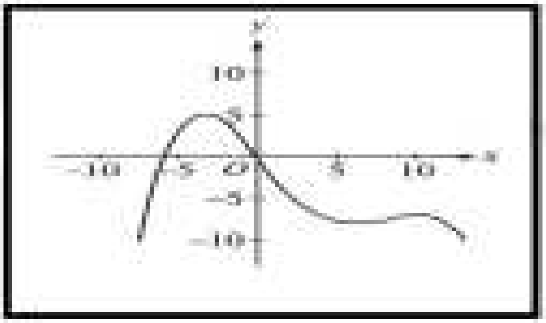
(a)



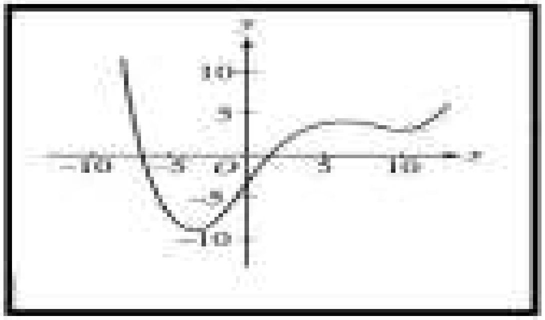
(b)



(c)



(d)



الدرس الثالث

40) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)\begin{cases}7-2x^2 & x\le 1\\ x^2-4x & x<1\end{cases}$ هي

(a) 0,1,2

(b) 0, 1

(c) o , 2

(d) 1 , 2

الدرس الثالث

41) القيمة العظمى المطلقة للدالة $\boldsymbol{f(x)=x^2e^{-x}}$ على الفترة $[\mathbf{0,4}]$ **هي**

(a) 0

(b) e

(c) $\frac{4}{e^3}$

(d) $\frac{16}{e^4}$

الدرس الرابع

(42) الدالة $f(x)=x-\sqrt{x-1}$ متناقصة على الفترة

(a) $(-\infty,\frac{5}{4})$

(b) $(1,\frac{5}{4})$

(c) $(\frac{5}{4},\infty)$

(d) $(1,\infty)$

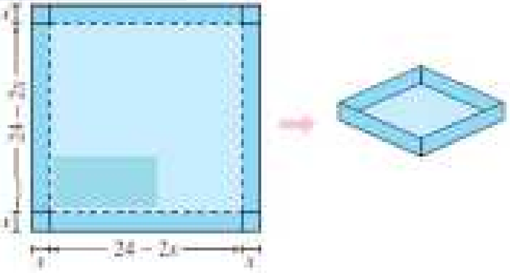
الدرس السابع

(43) يراد عمل صندوق على شكل مكعب

بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلعها

$24cm$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس.

فان اكبر حجم للصندوق هو ؟



(a) 1024

(b) 512

(c) 4

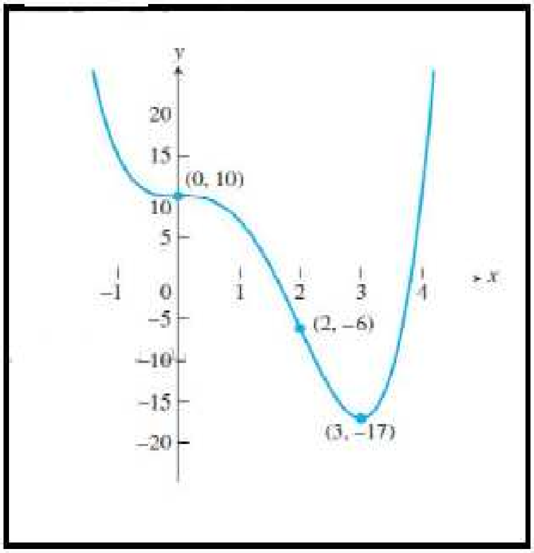
(d) 64

(44) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي

يمثل بيان الدالة $f(x)$

ان قيم x التي يكون عندها اشارة الدالة

f' والدالة f'' موجبتين هي



الدرس الخامس

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $(3,\infty)$

(c) $(-17,\infty)$ (d) $(-\infty,3)$

(45) الدال $f(x)=\sin x-\cos x$ على $[0,\pi]$ متناقصة على الفترة

(a) $(-\infty,\frac{3\pi}{4})$ (b) $(\frac{3\pi}{4},\infty)$

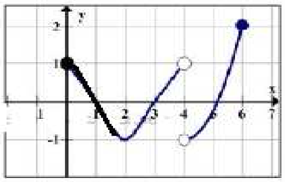
(c) $(0,\frac{3\pi}{4})$ (d) $(\frac{3\pi}{4},\pi)$

الدرس الرابع

(46) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$

ان الفترة التي تكون عليها الدالة المتصلة $f(x)$

متناقصة ومقعرة للاسفل هي



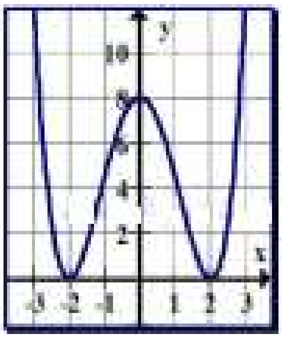
(a) $(1,2)$ (b) $(2,3)$

(c) $(0,2)$ (d) $(2,4)$

الدرس الخامس

الدرس الرابع

(47) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$



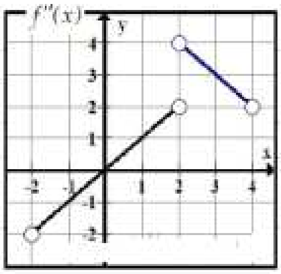
في تحديد اي من العبارات التالية صحيحة

(a) $f(0) > f(1)$ (b) $f(-2) = f(2)$

(c) $f(0) < f(1)$ (d) $f'(0) = 0$

(48) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f''(x)$ ، ان فترة التقعر للاسفل للدالة $f(x)$ هي

الدرس الخامس

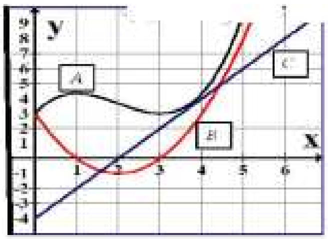


(a) $(2,4)$ (b) $(-2,0)$

(c) $(0,4)$ (d) $(-2,2)$

(49) الشكل المجاور يمثل بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ ،ان الدالة التي تمثل بيان الدالة $f'(x)$ هي

الدرس الخامس



(a) A (b) B

(c) C (d) لا يمكن تحديدها

الدرس الرابع

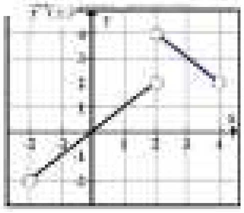
(50) لتكن $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2 & , x < 1 \\ -x^2 + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$ فان

(a) للدالة f قيمة عظمى محليه عند $x = 0$

(b) للدالة f قيمة عظمى محليه عند $x = 1$

(c) للدالة f قيمة عظمى محليه عند $x = 2$

(d) ليس للدالة f اي قيم عظمى



(51) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f''(x)$ حيث $f'(-1) = f'(1) = 0$

فاي من الجمل التالية صحيحة

(a) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = -1$

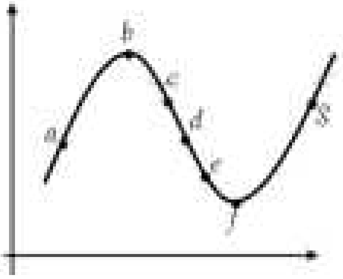
(b) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ وقيمة عظمى محلية عند $x = -1$

(c) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

(d) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = 0$

الدرس الخامس

(52) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة h في تحديد الرمز الذي يحقق $h' = 0, h'' > 0$

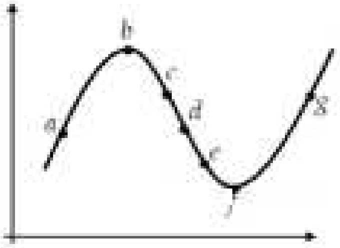


(a) b (b) f

(c) d (d) g

الدرس الخامس

(53) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة h في تحديد الرمز الذي يحقق $h'' = 0$

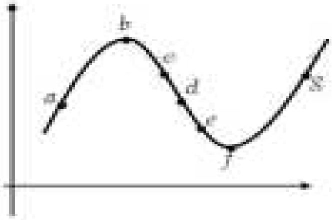


الدرس الخامس

(b) f

(c) d (d) g

(54) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة h في تحديد الرموز التي تحقق $h' \times h'' > 0$



(a) a, c (b) e, g

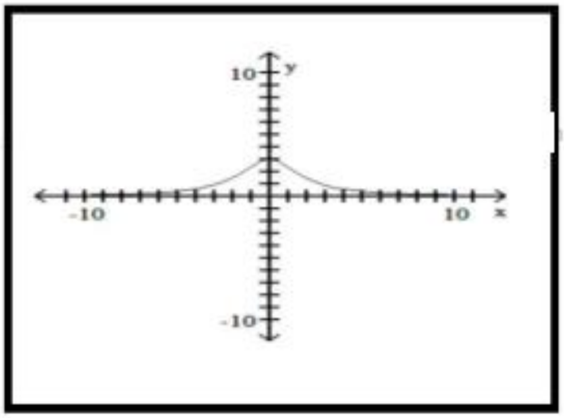
(c) c, g (d) a, e

الدرس الخامس

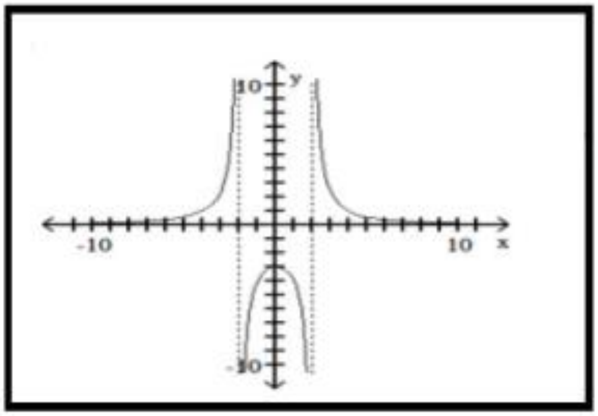
الدرس السادس

(55) الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ هو

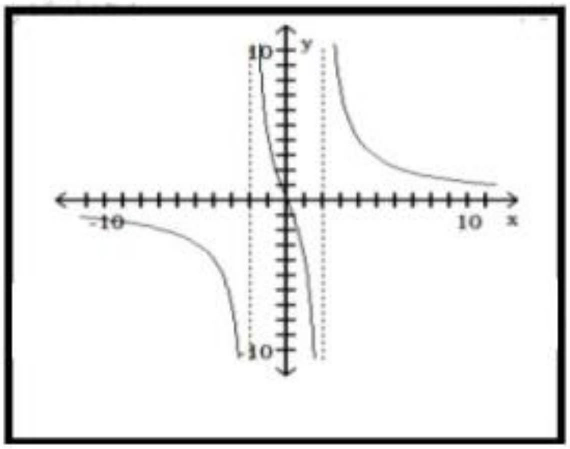
(a)



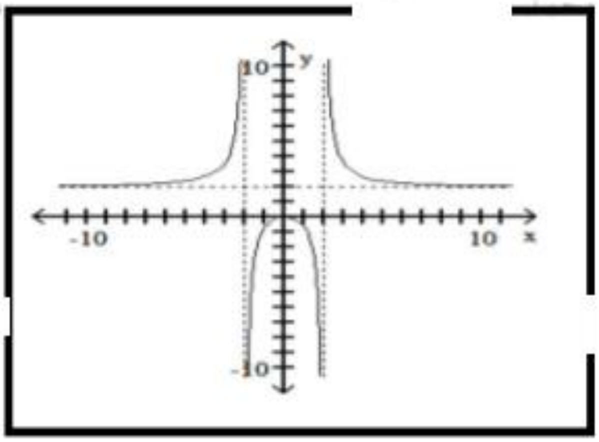
(b)



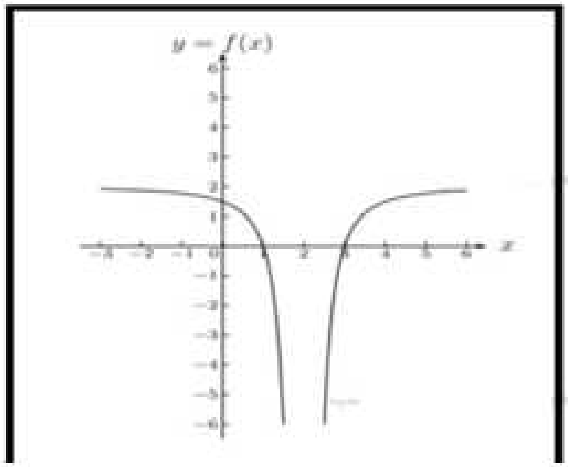
(c)



(d)



(56) احدى الدوال التالية له التمثيل البياني المجاور



(a) $f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{x-2}$

(b) $f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^3}$

(c) $f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

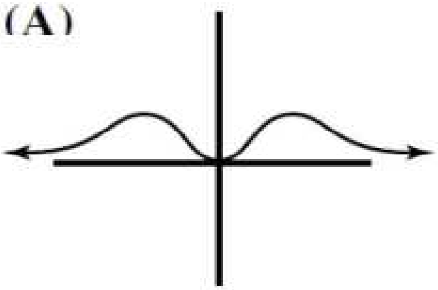
(d) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

الدرس السادس

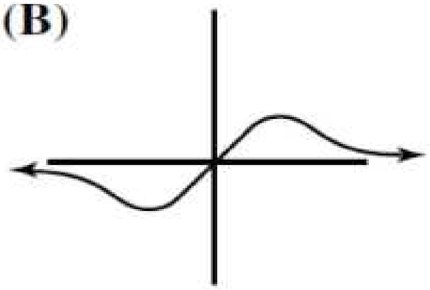
الدرس السادس

57) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ هو

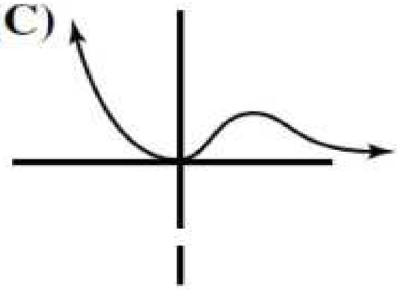
(A)



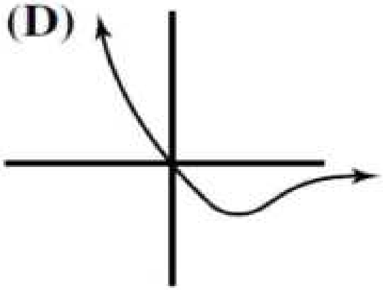
(B)



(C)



(D)



الدرس السادس

(58) احدى الدوال التالية

لها خط تقارب مائل

(a) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x-2}$

(b) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

(d) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$

(59) يتدفق النفط إلى خزان على شكل نصف كرة بمعدل $126m^3/h$ فإذا كان حجم النفط V في الخزان يعطى بالعلاقة

الدرس السادس

$$V = \frac{4}{3}h^2(36 - h)$$

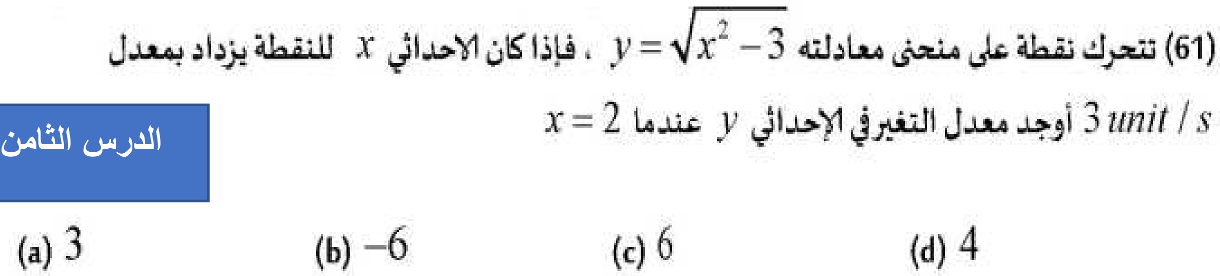
فإذا كان معدل ارتفاع الخزان عندما يكون النفط على ارتفاع 3m هو

$(a)\frac{1}{3}$ $(b)\frac{1}{2}$ $(c)\frac{1}{6}$ $(d)\frac{1}{4}$

(60 تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y = \sqrt{x^2 - 3}$ فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\ unit/s$. أوجد معدل التغير في الاحداثي y عندما $x = 2$

الدرس الثامن

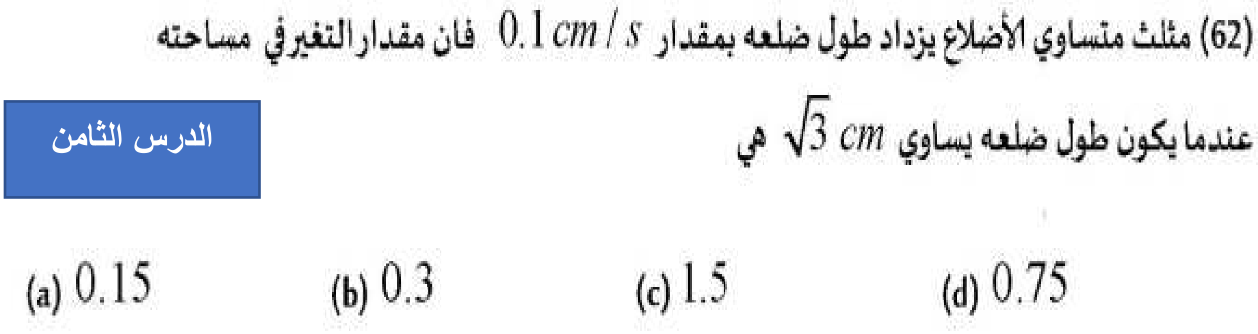
$(a)\ 3$ $(b) - 6$ $(c)\ 6$ $(d)\ 4$



(61) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y = \sqrt{x^2 - 3}$ ، فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\ unit/s$ أوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما $x = 2$

الدرس الثامن

(a) 3 (b) −6 (c) 6 (d) 4



(62) مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $0.1\ cm/s$ فان مقدار التغير في مساحته عندما يكون طول ضلعه يساوي $\sqrt{3}\ cm$ هي

الدرس الثامن

(a) 0.15 (b) 0.3 (c) 1.5 (d) 0.75

(63) يمشي رجل طوله $6\,ft$ بمعدل $12\,ft/s$ على خط أفقي مبتعداً عن عموده كهرباء ارتفاعه $18\,ft$.

ان معدل تغير طول ظل الرجل عندما يكون الرجل على بعد $12\,ft$ من قاعدة العمود هي

الدرس الثامن

(a) 12 (b) 6 (c) 4 (d) 3

(64) سلم طوله $15\,m$، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، ويتحرك بعيداً عن الحائط بمعدل $6\,m/s$ فان معدل التغير في الزاوية التي بين السلم والارض عند اللحظة التي يكون عندها اسفل السلم على بعد 9 من الحائط هي

الدرس السادس

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(65) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 150 برميل في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{30}\,ft$ فان معدل تزايد نصف قطر التسرب عندما يكون نصف القطر $300\,ft$.

برميل $7.5 = 1\,ft^3$

الدرس الثامن

(a) $\frac{15}{2\pi}$ (b) $\frac{1}{\pi}$ (c) $\frac{1}{2\pi}$ (d) $\frac{2}{\pi}$

(66) تتحرك نقطة على المنحنى $y = x^2$ فان النقطة التي يتساوى فيها معدل تغير الاحداثي السيني مع الاحداثي الصادي هي.

الدرس الثامن

(a) $(1,1)$ (b) $(-1,1)$

(c) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ (d) $(1,\frac{1}{2})$

(67) تسير سيارة بسرعة $30km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{3}km$ شمال التقاطع . وتسير سيارة شرطة بسرعة $40km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}km$ شرق التقاطع نفسه .في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذى تتغير بها المسافة بين السيارتين .فان السرعة المتجهة التي سيسجلها الرادارهي.

الدرس الثامن

(a) 0 (b) 48

(c) -96 (d) -48

(68) تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالعلاقة $s(t)=60-40e^{-0.05x(t)}$ حيث $x(t)$ تمثل كمية الانفاق بالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن t بالسنوات . والجدول التالي يمثل حجم الانفاق لمدة اربع سنوات.

الدرس الثامن

السنة	1	2	3	4
تكلفة الاعلانات	14500	18000	22000	25000

فان معدل التغيرفي كمية المبيعات في السنه الرابعه تقريبا تساوي

(a) 1719 (b) 6550

بث

(c) 27250 (d) 3000

(69) تمثل (t) كفاءة العامل في اي لحظه . ان الزمن بالساعات الذي يكون فيها كفاءة العامل اكبر ما يمكن هو

الدرس التاسع

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(70) الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء الى الرئتين .بازاحة جميع الجسيمات التي تسد القصبة الهوائية وتغير نصف قطر القصبة الهوائية. اذا علمت ان السرعة المتجهه لتدفق الهواء خلال القصبة الهوائي تعطى بالعلاقة $V(r)=2r^2(1-r)$ عند نصف قطر القصبة r بالمليمتر .فان نصف قطر القصبة الهوائية التي تجعل السرعة المتجهه للهواء اكبر ما يمكن هي

(a) 1

(b) 2

الدرس الثامن

(c) $\frac{3}{2}$

(d) $\frac{2}{3}$

(71) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده الثلاثة $180\ cm$,ان عرض الصندوق الذي له اكبرحجم هو

(a) 60

(b) 120

الدرس السابع

(c) 40

(d) 80

(72) ان اقصربعد للنقطة $(1,0)$ عن المنحنى $y=\sqrt{x}$ يساوي

(a) $\sqrt{3}$

(b) 1

الدرس السابع

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

(73) مصنع لعب اطفال لانتاج الدمى ، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم .فأذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ فان عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح هي

الدرس التاسع

(a) 6000 **(b)** 3000

(c) 30000 **(d)** 7000

(74) أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

فان التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100 هي

الدرس التاسع

(a) 6000 **(b)** 11.98

(c) 5988 **(d)** 5.99

(75) أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

فان التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100 هي

الدرس التاسع

(a) 6000 **(b)** 12

(c) 5988 **(d)** 6

(76) لتكن $C(x)=10e^{0.02x}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة الكهربائية . فان مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة هو

الدرس التاسع

(a) 5 **(b)** 500

(c) 50 **(d)** 10

(77) تحدد العلاقة $f(x)=\sqrt{2x}$ حيث $0 \le x \le 8$ كثافة أول x متر من سلك معدني رقيق فان الكثافة الخطية للمعدن عندما $x=8$ هي

الدرس التاسع

الكثافة الخطية

$\rho(x)=f'(x)$

(a) 2 (b) 4

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

(78) اذا كان للدالة $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ نقطة انعطاف عند $x=1$ فأن قيمة a تساوي

الدرس الخامس

(a) -2 (b) 2 (c) -1 (d) 1

الدرس الثاني

(79) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

(a) $-\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{24}$ (d) $-\frac{1}{24}$

(80) يتسرب الماء من الشكل المجاور الذي يمثل قمع ارتفاعة $10\ cm$ حيث يعطى نصف قطر سطح الماء في اي لحظة بالعلاقة $r=\frac{1}{20}(3+h^2)$. اذا كان معدل تناقص نصف القطر $\frac{1}{5}\ cm^2/s$ عند الارتفاع $3\ cm$ فان معدل تغير الارتفاع عند نفس اللحظة يساوي

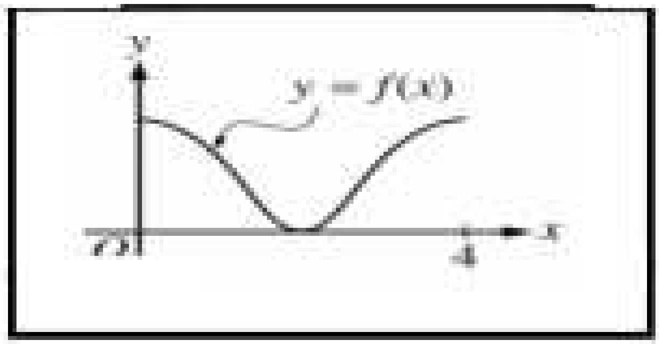
الدرس الثامن

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

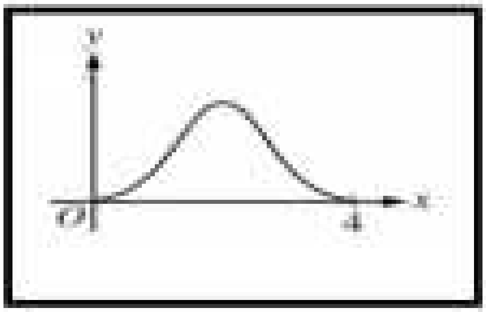
(81) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$

ان الشكل المناسب لبيان الدالة $f'(x)$ هو

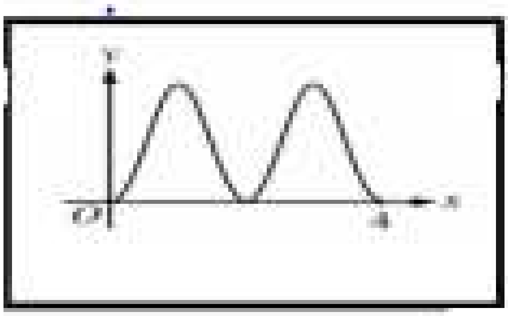
الدرس الخامس



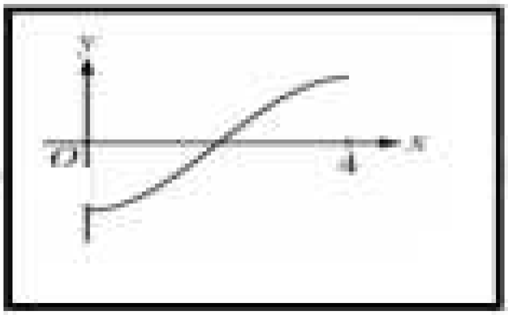
(a)



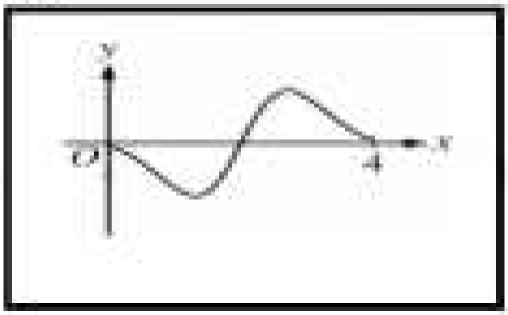
(b)



(c)



(d)



(82) اذا كانت الدالة $f(x)=\frac{k\,x}{x^2+1}$ متناقصة على الفترة $(-1,1)$ فان

الدرس الرابع

(a) $k<1$

(b) $k<0$

(c) $k>0$

(d) $k>1$

(83) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x^2+3x}$

الدرس الثاني

(a) 0

(b) 1

(c) $\dfrac{1}{2}$

(d) $\dfrac{1}{3}$

(84) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln x$

الدرس الثاني

(a) 0

(b) 1

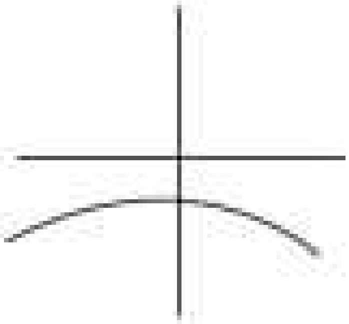
(c) -1

(d) 2

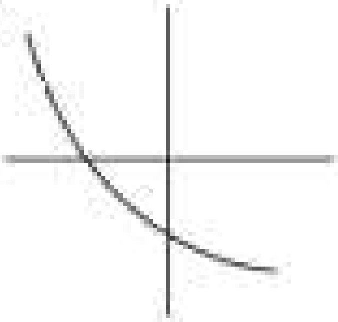
(85) احدى الرسومات التالية يمثل بيان الدالة $f(x)$ حيث $f'<0$ و $f''<0$

الدرس الخامس

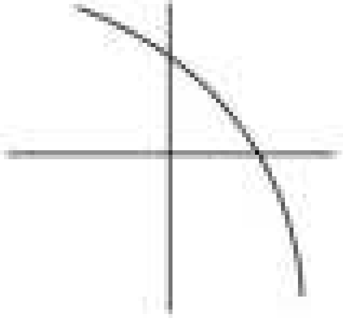
(a)



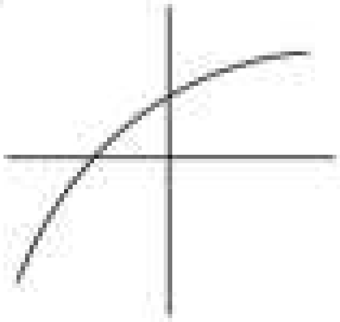
(b)



(c)



(d)



(86) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=\left|x^2-4\right|=\begin{cases}x^2-4 & x<-2, x>2\\ 4-x^2 & -2\le x\le 2\end{cases}$ هي

الدرس الثالث

(a) $-2, 2$ (b) 0

(c) $-2, 0, 2$ (d) $0, 2$

(87) اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين ، حيث $f(2)=1$ ، $f'(2)=4$ ، $f''(2)=3$ فان التقريب الخطي للعدد $f(1.9)$ يساوي

(a) 0.6 (b) 0.9 (c) 1.3 (d) 1.4

الدرس الاول

(88) اذا كان معدل التناقص في نصف قطر كرة ثلجية $2cm/h$ ، فان معدل التغير في مساحة الكرة السطحية عندما يكون القطر $6cm$ هو

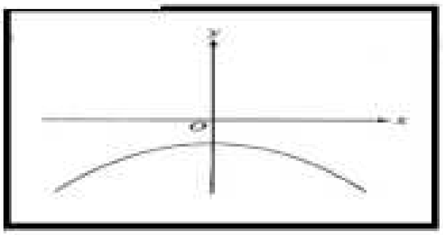
(a) -4π (b) -16π (c) -48π (d) -144π

الدرس الثامن

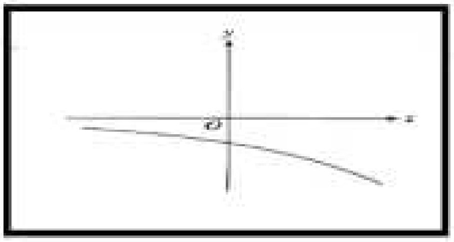
(89) اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين حيث $f<0$ و $f'<0$ و $f''<0$ ، فان التمثيل البياني الذي يمثل الدالة $f(x)$ هو

الدرس الخامس

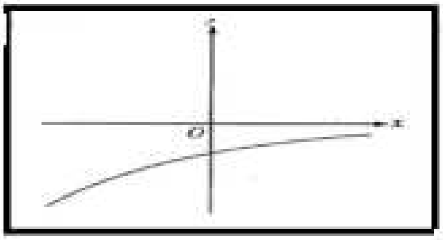
(a)



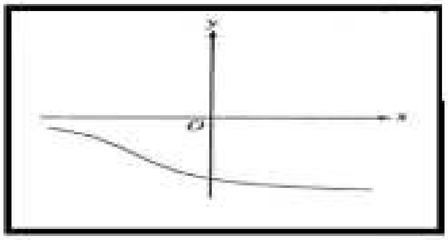
(b)



(c

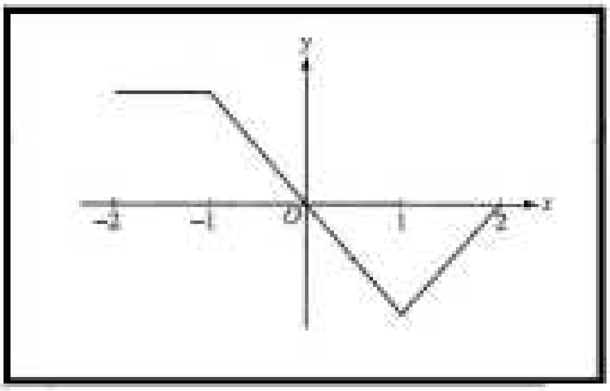


(d)



(90) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، على الفترة $(-2,2)$ فاي من العبارات التالية صحيحة بالنسبة لبيان الدالة $f(x)$

الدرس الرابع



(a) الدالة f متناقصة على الفترة $(-1,1)$

(b) الدالة f متزايدة على الفترة $(1,2)$

(c) الدالة f متزايدة على الفترة $(-2,0)$

(d) للدالة f قيم صغرى مطلقة عند $x=1$

(91) اذا كانت للدالة $f(x)=x^2e^{kx}$ عددا حرجا عند $x=\frac{2}{3}$ فان قيمة k تساوي

(a) -3 (b) 0

(c) $\frac{-3}{2}$ (d) $\frac{-1}{3}$

الدرس الثالث

(92) الدالة $f(x)=|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & x<-2, x>2 \\ 4-x^2 & -2\le x\le 2 \end{cases}$ مقعرة للاسفل على الفترة

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $(2,\infty)$

(c) $(-\infty,-2),(2,\infty)$ (d) $(-2,2)$

الدرس الخامس

(93) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

(a) 0 (b) 1

(c) -2 (d) 2

الدرس الثاني

(94) الدالة $f(x)=2xe^{x}$ مقعرة للأسفل على الفترة

(a) $(-\infty,-2)$

(b) $(-2,\infty)$

الدرس الخامس

(c) $(-\infty,-1)$

(d) $(-1,\infty)$

(95) اذا كانت $f'(x)=x(x-3)^{2}(x+1)$ فان الدالة لها قيمة عظمى محلية عند x تساوي

(a) -1

(b) 0

الدرس الرابع

(c) $-1,0$

(d) $-1,3$

(96) اذا كانت $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ فان القيمة العظمى المطلقة للدالة هي

(a) 1

(b) 0

الدرس الرابع

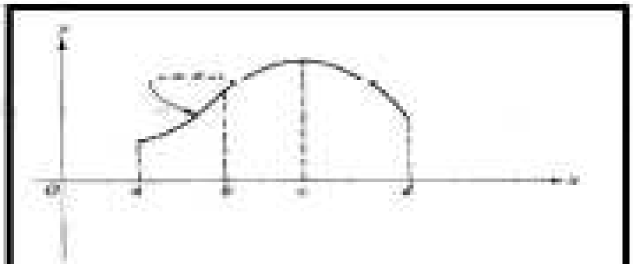
(c) $-\frac{1}{e}$

(d) $\frac{1}{e}$

(97) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$

ان الفترة التي تكون عليها الدالة متزايدة ومقعرة

للاسفل هي



الدرس الخامس

(a) (a,c)

(b) (b,c)

(c) (b,d)

(d) (a,d)

(98) اذا كانت $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$ فان القيمة العظمى المطلقة للدالة f على الفترة $[-2, 4]$ تكون عند

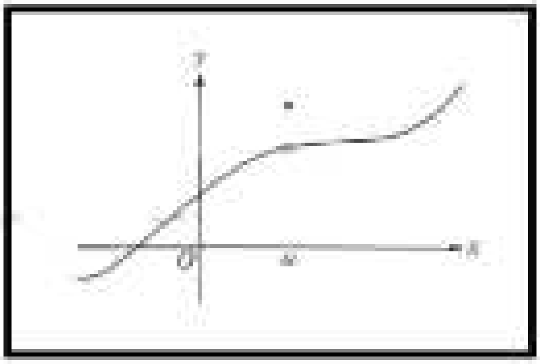
الدرس الثالث

(a) -2 (b) 0

(c) 2 (d) 4

الدرس الرابع

(99) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $f(x)$ فاي من العبارات التالية صحيحة



(a) للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x = a$

(b) للدالة f قيمة عظمى مطلقة عند $x = a$

(c) للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

(d) ليس للدالة f اي قيم قصوى محلية او مطلقة

(100) اذا كانت $v(t) = t^3 - 3t^2 + 12t + 4$ تمثل دالة السرعة المتجية لجسم يتحرك على خط مستقيم فان اقل تسارع يصل اليه الجسم هو

الدرس السابع

(a) 12 (b) 40

(c) 9 (d) 21

(101) مكعب ثلجي يتناقص طول ضلعة بمعدل $1cm/h$ فان معدل تغير طول قطرالمكعب عندما يكون طول ضلعة $10cm$ هو

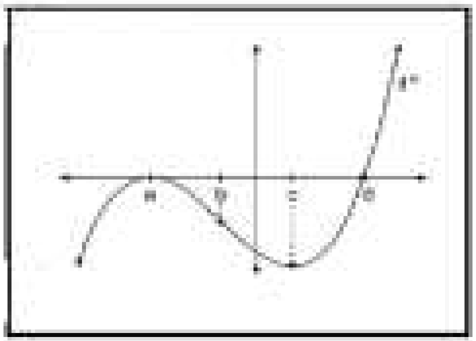
الدرس الثامن

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) 1 (d) 3

(102) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f''(x)$

ان نقطة الانعطاف تكون عند x



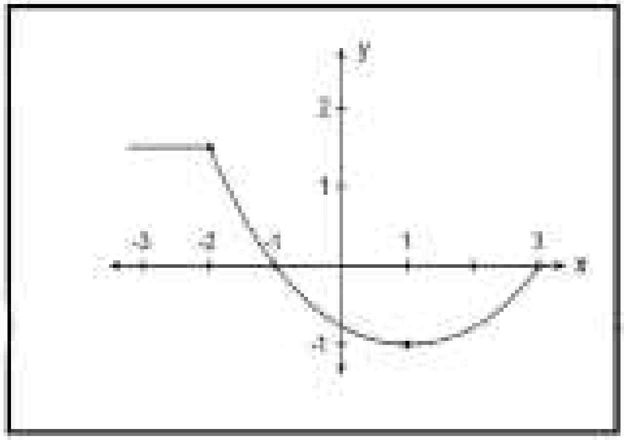
(a) a　　(b) d

(c) a,d　　(d) b

الدرس الخامس

(103) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ اي من العبارات التالية صحيحة

الدرس الرابع



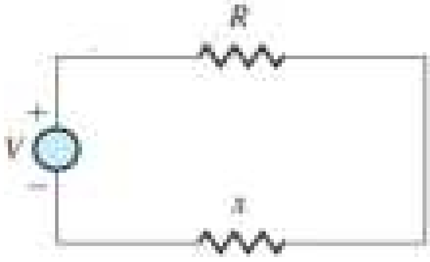
(a) للدالة f قيمة صغرى محلية عند $x=-1$

(b) للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x=-1$

(c) للدالة f قيمة عظمى مطلقة عند $x=-2$

(d) للدالة f قيمة صغرى مطلقة عند $x=-1$

(104) تمثل العلاقة $p(x)=\frac{V^2x}{(R+x)^2}$ مقدار الطاقة الممتصة في جهاز كهربائي كما في الشكل حيث V مقدار الجهد ، R كمية المقاومة ، فان قيمة x التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة الممتصة تكون عند



(a) $x=V$　　(b) $x=2V$

(c) $x=R$　　(d) $x=2R$

الدرس السابع

(105) تمثل العلاقة $P(v)=\frac{1}{v}+cv^3$ مقدار الطاقة التي يبذلها طائر حتى يسير بالسرعة v حيث $c>0$، فإن السرعة التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة تكون عند

الدرس السابع

(a) $v=\frac{1}{3c}$ (b) $v=\frac{1}{\sqrt{3c}}$

(c) $v=\frac{1}{\sqrt[4]{c}}$ (d) $v=\frac{1}{\sqrt[4]{3c}}$

(106) تمثل الدالة $R(x)=\frac{35x-x^2}{x^2+35}$ ارباح شركة من بيع x الف سلعة. فان القيمة العظمى للربح تكون عند بيع

الدرس السابع

(a) 5000 (b) 7000

(c) 5 (d) 7

(107) تمثل الدالة $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$ تركيز الدواء في العضلات بعد t ساعة من اخذ الدواء، فان الزمن الذي يكون فية تركيز الدواء اكبر ما يمكن هو

(a) 7 (b) 3.8

(c) 5 (d) 7.6

(108) تمثل الدالة $f(v)=v\,e^{-v/2}$ قوة احدى عضلات الجسم بعد انقباضها بسرعة مقدارها v، فان السرعة التي تحقق القيمة العظمى للقوة هي

الدرس السابع

(a) 2 (b) 4

(c) 1 (d) 8

(109) تمثل الدالة $f(t)=\frac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة فان معدل التغير في انتشار الاشاعة بعد ساعتين يساوي

(a) 70 (b) 23

(c) 46 (d) 17.5

الدرس التاسع

(110) تمثل الدالة $f(t)=\frac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة فان نسبة عدد السكان الذين ستصلهم الاشاعة هي .

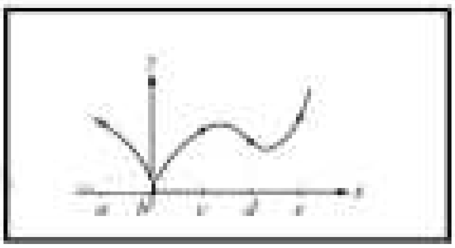
(a) 70% (b) 23%

(c) 46% (d) 17.5%

الدرس التاسع

(111) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$

ان نقطة الانعطاف للدلة $f(x)$ تكون عند x



(a) b (b) d

(c) b,d (d) c,d

الدرس الرابع

(112) تمثل الدالة $f(p)=400(20-p)$ كمية الطلب على سلعة معينة عند السعر p حيث $p<20$

ان مدى الاسعار الذي تكون فية دالة الايرادات $r=pf(p)$ متزايدة هي

(0,10) (b) (10,20)

(c) (0,20) (d) (20,400)

الدرس التاسع

(113) الجدول التالي يمثل بعض المعلومات

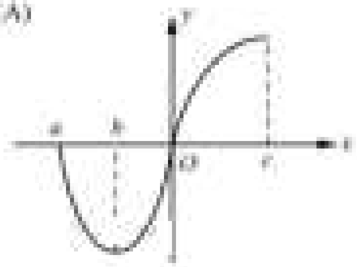
عن الدالة $f(x)$ ومشتقاتها

x	$a<x<b$	b	$b<x<0$	0	$0<x<c$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	3	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$

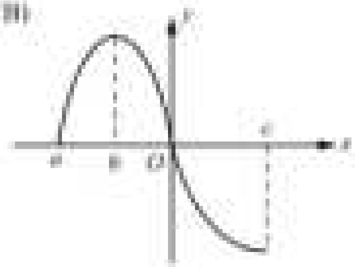
اي من الرسومات التالية ممكن ان يكون للدالة $f(x)$

الدرس السادس

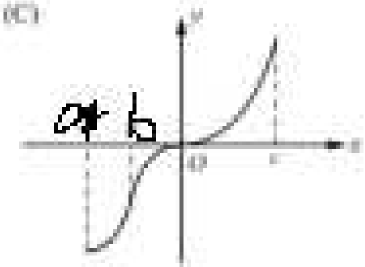
(A)



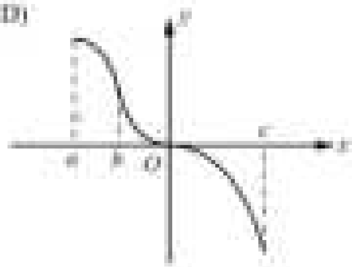
(B)



(C)

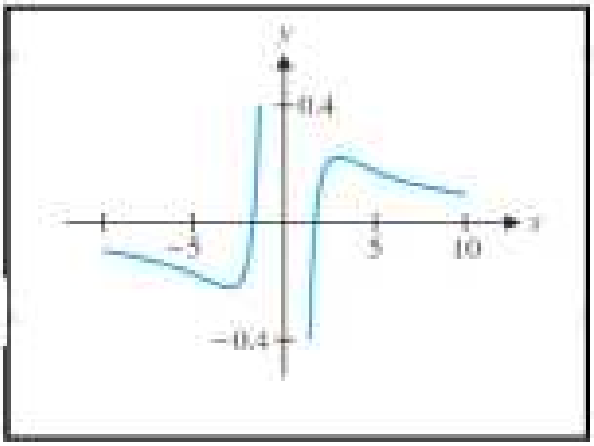


(D)



(114) احدى الدوال التالية له التمثيل البياني المجاور

الدرس السادس



(a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$

(b) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3}$

(d) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^3-1}$

(115) اي من الدوال التالية يمكن استخدام طريقه نيوتن في ايجاد التقريب الاول لصفر الدالة عندما تكون $x_0 = 0$

الدرس الاول

(a) $f(x)=x^3-2x^2+1$ (b) $f(x)=x^2-\cos x$

(c) $f(x)=x-e^x$ (d) $f(x)=x^3-2x+1$

(116) عدد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^3-4x}$ هي

الدرس الثالث

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 5

(117) الدالة $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ متزايدة على الفترة

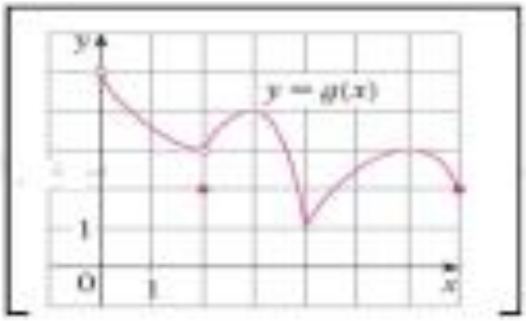
الدرس الرابع

(a) $(-\infty,e)$ (b) $(0,e)$

(c) (e,∞) (d) $(0,1)$

(118) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $g(x)$

ان القيمة العظمى المطلقة للدالة هي



الدرس الثالث

(a) 5 (b) 4

(c) 0 (d) لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

(119) تمثل الدالة $f(p)=400(20-p)$ كمية الطلب على سلعة معينة عند السعر p حيث $p<20$

ان السعر الذي تكون فيه دالة الايرادات $r=p\,f(p)$ اكبر ما يمكن هو

الدرس التاسع

(a) 10 (b) 20

(c) 400 (d) 15

(120) اذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[-2,3]$ وتحقق ما يلي

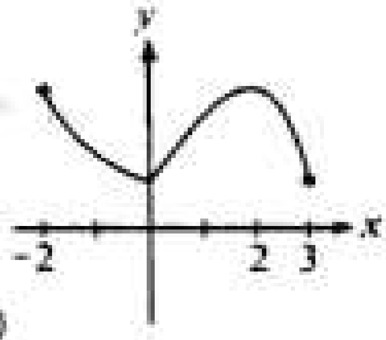
$f'(2)=0$

$f'(0)=not\ exist$

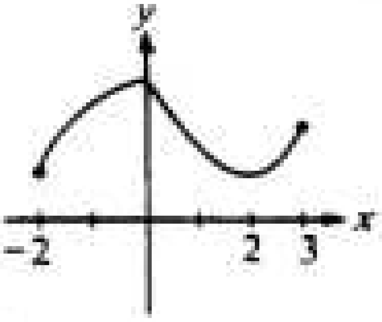
$f''(x)<0$

الدرس السادس

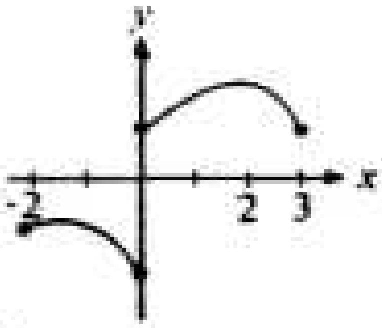
فإن التمثيل البياني المناسب للدالة $f(x)$ هو



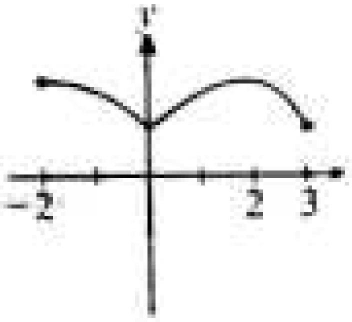
(a)



(b)



(c)



(d)

(121) الدالة $f(x) = \frac{-5}{(x-2)}$ مقعرة للاسفل على الفترة

الدرس الخامس

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $(2,\infty)$

(c) $(-\infty,2)$ (d) $(5,\infty)$

(122) الدالة $f(x) = x + \frac{1}{x}$ متناقصة على الفترة

الدرس الرابع

(a) $(-1,1)$ (b) $(-\infty,\infty)$

(c) $(-\infty,-1),(1,\infty)$ (d) $(0,1)$

(123) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+5e^x)^{\frac{1}{x}}$

الدرس الثاني

(a) 0 (b) e

(c) 1 (d) e^5

(124) خزان على شكل مخروط قائم مملؤ ماء ويتسرب منه الماء ويتغير ارتفاعه ونصف قطره بمعدل $2\,m$ في الساعة فان معدل تغير حجم الماء في الخزان عندما يكون الارتفاع $4\,m$ ونصف القطر $3\,m$ هو

(a) 16π (b) 22π (c) 6π (d) 8π

الدرس الثامن

(125) يمشي رجل طوله 6 ft بمعدل 4.5 ft /s

على خط أفقي مبتعداً عن عمود كهرباء ارتفاعه $15\,ft$

على خط أفقي مبتعداً عن عمود كهرباء ارتفاعه $15\,ft$

فإن [illegible]

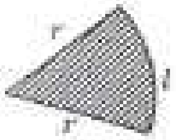
الدرس الثامن

(126) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج طوله $600\,ft$ متر على الجوانب الثلاث الاخرى فان اكبر مساحة يمكن احاطتها هي .

(a) 45000 (b) 40000 (c) 60000 (d) 30000

الدرس السابع

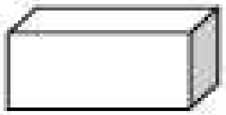
(127) قطاع دائري محيطه $12cm$ ، فان طول نصف قطر دائرة التي تجعل مساحتة اكبر ما يمكن



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6

الدرس السابع

(128) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده الثلاث $45cm$. فان اكبر حجم له يكون .



الدرس السابع

(a) 3000 (b) 30000 (c) 22500 (d) 90000

(129) ان مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه بحيث يكون احد رؤوسة هي نقطة الاصل والراسان الاخران على المنحنى $y=27-x^2$ هو

(a) 27 (b) 108 (c) 54 (d) 72

الدرس السابع

130) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{1-x+\ln x}$

(a) $-\pi^2$ (b) π^2 (c) $-\infty$ (d) ∞

الدرس الثاني

اجابات تمارين الوحدة الرابعة

1	D	11	C	21	B	31	D	41	C	51	B	61	C	71	C	81	D	91	A
2	A	12	C	22	B	32	C	42	B	52	B	62	A	72	C	82	B	92	D
3	A	13	B	23	D	33	C	43	A	53	C	63	B	73	B	83	D	93	D
4	B	14	C	24	D	34	B	44	B	54	C	64	D	74	B	84	A	94	A
5	B	15	D	25	B	35	D	45	D	55	D	65	B	75	B	85	C	95	A
6	A	16	C	26	D	36	B	46	A	56	C	66	C	76	C	86	C	96	D
7	C	17	C	27	B	37	D	47	C	57	A	67	D	77	D	87	A	97	B
8	C	18	B	28	C	38	D	48	B	58	C	68	A	78	C	88	C	98	D
9	D	19	B	29	B	39	D	49	B	59	B	69	B	79	D	89	D	99	A
10	C	20	D	30	C	40	A	50	B	60	A	70	D	80	B	90	C	100	C

101	B	106	A	111	C	116	D	121	B	126	A								
102	B	107	D	112	A	117	B	122	A	127	B								
103	B	108	A	113	A	118	D	123	B	128	B								
104	C	109	B	114	C	119	A	124	B	129	C								
105	D	110	A	115	D	120	D	125	B	130	A								

إنتهت الوحدة الرابعة بحمد الله
واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق