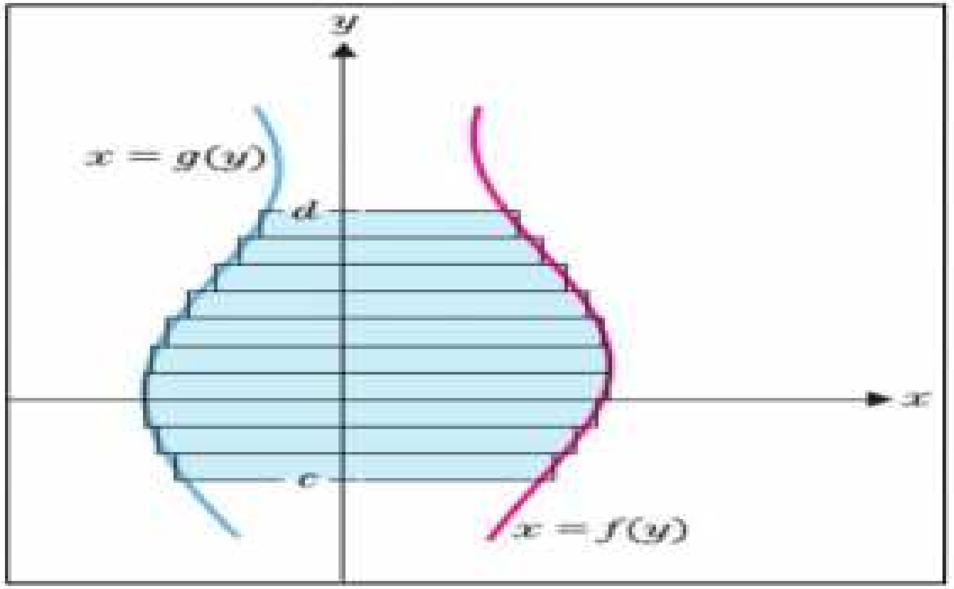
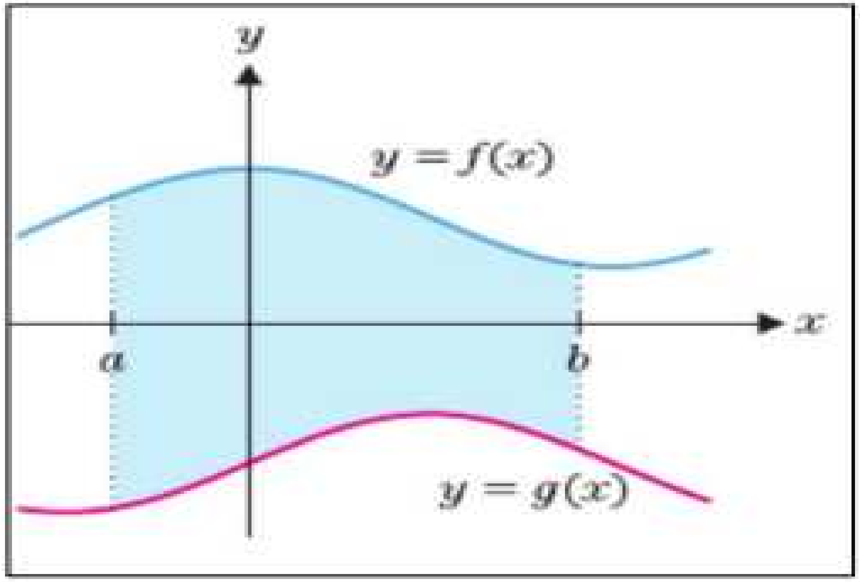
جميع قوانين الفصل الدراسي الثالث

أ / مشعل الحسين

المساحة بين منحنيين

يمين ـ يسار	فوق ـ تحت





يمين ـ يسار	فوق ـ تحت	
$x = f(y) \quad , \quad x = g(y)$	$y = f(x) \quad , \quad y = g(x)$	الدوال
أفقية من محور y: من أسفل إلى أعلى $y = c \quad , \quad y = d$	رأسية من محور x: من اليسار إلى اليمين $x = a \quad , \quad x = b$	حدود التكامل
$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\ dy$	$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$	المساحة

تطبيقات (الطاقة المفقودة بواسطة كرة التنس)

عند حدوث اصطدام بين مضرب التنس والكرة، يتغير شكل الكرة، تنكمش أولاً ومن ثم تتمدد.

حيث x هي مدى انكماش الكرة: $0 \le x \le m$ ، $f(x)$ هي القوة المبذولة على الكرة بواسطة المضرب

على فرض أن: $f_c(x)$ هي القوة أثناء انكماش الكرة

$f_e(x)$ هي القوة أثناء تمدد الكرة

وتكون نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام

$$\frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx}{\int_0^m f_c(x)\,dx} \times 100$$

الحجوم شرائح

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

الحجوم أقراص

	الدوران حول محور x أو مستقيم أفقي	الدوران حول محور y أو مستقيم رأسي
المقطع العرضي	رأسي: عمودي على محور الدوران	أفقي: عمودي على محور الدوران
الدالة	$y = f(x)$	$x = f(y)$
حدود التكامل	رأسية من محور x: من اليسار إلى اليمين $x = a \quad , \quad x = b$	أفقية من محور y: من أسفل إلى أعلى $y = c \quad , \quad y = d$
الحجم	$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$	$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy$

المقاطع حلقات

الحجم: هو التكامل المحدود لمساحة المقطع العرضي (مساحة الحلقة)

	الدوران حول محور x أو مستقيم أفقي	الدوران حول محور y أو مستقيم رأسي
المقطع العرضي	رأسي: عمودي على محور الدوران	أفقي: عمودي على محور الدوران
الدوال	$y = f(x)$	$x = f(y)$
حدود التكامل	رأسية من محور x: من اليسار إلى اليمين وهي حدود المجسم بعد الدوران $x = a \quad , \quad x = b$	أفقية من محور y: من أسفل إلى أعلى وهي حدود المجسم بعد الدوران $y = c \quad , \quad y = d$
الحجم	$V = \pi \int_a^b [R^2(x) - r^2(x)]\, dx$ حيث: $R(x)$ نصف القطر الخارجي $r(x)$ نصف القطر الداخلي	$V = \pi \int_c^d [R^2(y) - r^2(y)]\, dy$ حيث: $R(y)$ نصف القطر الخارجي $r(y)$ نصف القطر الداخلي

الأصداف	الدوران حول محور x أو مستقيم أفقي	الدوران حول محور y أو مستقيم رأسي
الشريحة	أفقية: موازية لمحور الدوران	رأسية: موازية لمحور الدوران
الدوال	$x = f(y)$	$y = f(x)$
حدود التكامل	أفقية من محور y: من أسفل إلى أعلى وهي حدود المنطقة قبل الدوران $y = c \quad , \quad y = d$	رأسية من محور x: من اليسار إلى اليمين وهي حدود المنطقة قبل الدوران $x = a \quad , \quad x = b$
الحجم	$V = \int_c^d 2\pi \ r(y) \ f(y) \ dy$ حيث: $r(y)$ نصف القطر $f(y)$ ارتفاع الشريحة	$V = \int_a^b 2\pi \ r(x) \ f(x) \ dx$ حيث: $r(x)$ نصف القطر $f(x)$ ارتفاع الشريحة

في الحلقات	في الأصداف
يكون المقطع العرضي عمودي على محور الدوران	تكون الشريحة موازية لمحور الدوران

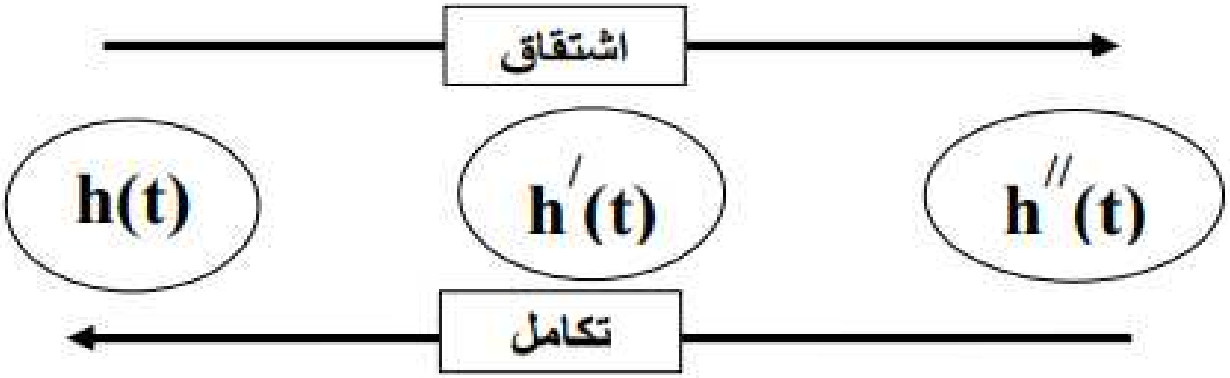
طول القوس

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

مساحة السطح

$$s = \int_a^b 2\pi\, f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

المقذوفات الرأسية



بعض ملاحظات الحلول:

1) يبدأ الحل غالباً بـ $h''(t) = -9.8 \;\; m/s^2$ أو $h''(t) = -32 \;\; ft/s^2$

(على حسب الوحدات المذكورة في المسألة)

	لأعلى	لأسفل
التسارع (العجلة)	$-9.8 \;\; m/s^2$ $-32 \;\; ft/s^2$	$-9.8 \;\; m/s^2$ $-32 \;\; ft/s^2$
السرعة المتجهة	+	-
الإزاحة	+	-

المقذوفات الأفقية

المركبة الرأسية:

اشتقاق →

$y(t)$ — $y^{\prime}(t)$ — $y^{\prime\prime}(t)$

← تكامل

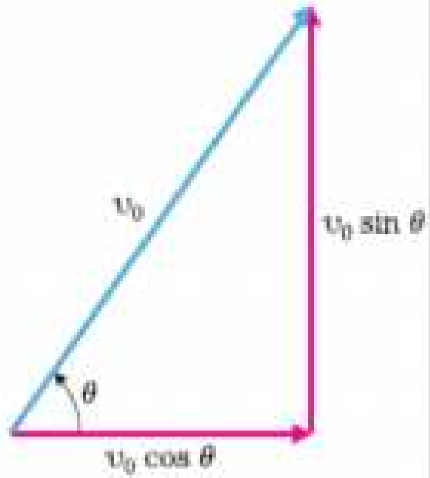
المركبة الأفقية:

اشتقاق →

$x(t)$ — $x^{\prime}(t)$ — $x^{\prime\prime}(t)$

← تكامل

مسار المقذوفات



المركّبات الرأسية والأفقية
للسرعة المتجهة

أولاً: الإطلاق من الأرض:

	الشروط الابتدائية	استراتيجية الحل
1) زمن الانطلاق: من المركبة الرأسية	$y'(0) = v_o \sin\theta$ $y(0) = 0$	نبدأ بـ $y''(t) = -9.8 \quad m/s^2$ أو $y''(t) = -32 \quad ft/s^2$ ونجري عمليات التكامل ثم نضع $y(t) = 0$ فينتج زمن الانطلاق
2) مدى المقذوف: من المركبة الأفقية	$x'(0) = v_o \cos\theta$ $x(0) = 0$	نبدأ بـ $x''(t) = 0$ ونجري عمليات التكامل ثم نعوض بزمن الانطلاق في $x(t)$ فينتج مدى المقذوف

ثانيًا: الإطلاق من ارتفاع $y = k$ فوق سطح الأرض:

	الشروط الابتدائية	استراتيجية الحل
1) زمن التحليق: من المركبة الأفقية	$x'(0) = v_o \cos\theta$ $x(0) = 0$	نبدأ بـ $x''(t) = 0$ ونجري عمليات التكامل ثم نضع $x(t) =$ المسافة الأفقية فينتج زمن التحليق
2) ارتفاع المقذوف: من المركبة الرأسية	$y'(0) = v_o \sin\theta$ $y(0) = k$	نبدأ بـ $y''(t) = -9.8 \quad m/s^2$ أو $y''(t) = -32 \quad ft/s^2$ ونجري عمليات التكامل ثم نعوض بزمن التحليق في $y(t)$ فينتج ارتفاع المقذوف

الشغل

الشغل W: هو شكل من أشكال القوة

وهو كمية الطاقة اللازمة لتحريك جسم ما بقوة ما لمسافة ما

وحدات قياس الشغل W:

جول J = نيوتن ـ متر (N-m)

كيلو جرام ـ متر (kg – m)

قدم ـ باوند (ft – lb)

1 J = 1 (N – m) = 0.102 (kg – m) = 0.738(ft – lb)

القوة ثابتة

$$W = F\,d$$

القوة متغيرة

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

الشغل المبذول في الحركة الرأسية مع فقدان جزء من الوزن

$$W = \int_0^a \left(w_1 - \frac{w_2}{d}x\right)\,dx$$

الارتفاع النهائي

الوزن المفقود

الوزن الابتدائي

مسافة فقدان الوزن

الدفع والزخم

1) **الدفع :** هو القوة المؤثرة على جسم خلال فترة زمنية محددة [a, b]

القوة ثابتة

$$J = F\,T$$

وحدات قياس الدفع:

نيوتن ـ ثانية N - s

كيلو جرام ـ ثانية Kg – s

باوند ـ ثانية lb - s

القوة متغيرة

$$J = \int_a^b F(t)\,dt$$

لاحظ الفرق بين الشغل والدفع

الشغل: تكامل القوة كدالة في المسافة

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

الدفع: تكامل القوة كدالة في الزمن

$$J = \int_a^b F(t)\,dt$$

2) **الزخم (كمية الحركة):** هي كتلة جسم متحرك ضرب سرعته $m\ \Delta v$

3) **معادلة الدفع والزخم:** $J = m\ \Delta v$

ملاحظة: التغير في السرعة

$$\Delta v = v(b) - v(a)$$

مركز الكتلة

مركز الكتلة: هو الموقع أو النقطة المحورية في الجسم التي عندها يحدث التوازن.

كتلة الجسم

- الكثافة ثابتة: $m = \rho L$ حيث L طول الجسم $L = b - a$
- الكثافة متغيرة: $m = \int_a^b \rho(x)\,dx$

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}$$

العزم الأول: $\int_a^b x\rho(x)\,dx$

الكتلة: $\int_a^b \rho(x)\,dx$

القوة الهيدروستاتيكية

1) لأجسام غمرت بأكملها تحت سطح الماء

$$F = 62.4\,A\,d$$

- 62.4: كثافة وزن الماء (lb/ft^3)
- A: مساحة سطح الجسم المغمور (ft^2)
- d: عمق الجسم المغمور (ft)

كثافة وزن الماء:

1000	kg / m^3
9800	N / m^3
62.4	lb / ft^3

2) القوة الهيدروستاتيكية على سد:

$$F = \int_{0}^{a} 62.4\ x\ w(x)\ dx$$

عمق الماء (ft)

عرض السد عند العمق x

كثافة وزن الماء (lb/ft^3)

عمق جزء من السد

كثافة وزن الماء:

1000	kg / m^3
9800	N / m^3
62.4	lb / ft^3

إذا كان السد

مستطيل
W(x) = b

شبه منحرف
W(x) = b + x

شبه منحرف
W(x) = b - x

حيث b : عرض السد العلوي عند مستوى سطح الماء

الشغل المبذول لضخ مياه خارج خزان

1) الخزان الكروى

طول قطر الخزان

$$W = 62.4\,\pi \int_{0}^{2r} x\,(2r - x)^2\,dx$$

كثافة وزن الماء (lb/ft^3)

المسافة التي يقطعها الماء إلى أعلى الخزان

كثافة وزن الماء:

1000	kg / m^3
9800	N / m^3
62.4	lb / ft^3

الشغل المبذول لضخ مياه خارج خزان

2) الخزان الاسطوانى

نصف قطر قاعدة الخزان

ارتفاع الخزان

$$W = 62.4\,\pi\,r^2 \int_{0}^{h} (h - x)\,dx$$

كثافة وزن الماء (lb/ft^3)

المسافة التي يقطعها الماء إلى أعلى الخزان

كثافة وزن الماء:

1000	kg / m^3
9800	N / m^3
62.4	lb / ft^3

شروط دالة كثافة الاحتمال

على فرض أنّ X هي متغيّر عشوائي له فرضيّة أي قيمة x لكل $a \le x \le b$. تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ X دالة $f(x)$ تحقق

(i) $f(x) \ge 0$ لكل $a \le x \le b$ — لا تكون دوال الكثافة الاحتمالية سالبة أبدًا.

و

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. — الاحتمال الكلي 1.

الاحتمال

يعطى الاحتمال الذي تقع فيه قيمة X (المرتبة) بين c و d بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ pdf على تلك الفترة. أي إنّ،

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

يناظر الاحتمال المساحة تحت المنحنى.

الوسط والوسيط

تعريف: المتغير العشوائي الذي له *pdf* هي *f(x)* على الفترة [a,b] يكون

1) الوسط μ :

$$\mu = \int_a^b x\, f(x)\,dx$$

2) الوسيط c : من حل المعادلة

$$\int_a^c f(x)\,dx = 0.5$$

قواعد التكامل الأساسية والمثلثية والأسية واللوغاريتمية

تكاملات الدوال المثلثية:

اشتقاق ⟶

$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

⟵ تكامل

لاحظ أن

$$\int \cos kx \; dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

قواعد التكامل غير المحدود:

1) $\int a \; dx = ax + c$ حيث a ثابت

2) $\int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

تكاملات الدوال اللوغاريتمية:

$$\ln|f(x)| + c \xrightarrow{\text{اشتقاق}} \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{\text{تكامل}} \ln|f(x)| + c$$

تكاملات الدوال الأسية:

$$e^{f(x)} + c \xrightarrow{\text{اشتقاق}} f'(x)\, e^{f(x)}$$

$$f'(x)\, e^{f(x)} \xrightarrow{\text{تكامل}} e^{f(x)} + c$$

الدوال المثلثية العكسية

تكاملات الدوال المثلثية العكسية:

اشتقاق ⟶

$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

⟵ تكامل

صيغ أخرى للدوال المثلثية العكسية:

$$1)\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

$$2)\ \int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

$$3)\ \int \frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{|a|}\sec^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right)+c$$

التكامل بالأجزاء

قاعدة التكامل بالأجزاء:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

نختار: u دالة يسهل تفاضلها

dv دالة يسهل تكاملها

وبشرط أن التكامل الثاني $\int v\,du$ يسهل حسابه

صيغ الاختزال

لأى عدد صحيح موجب n

$$1)\ \int \cos^n x\ dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx$$

لأي عدد صحيح موجب n

$$2)\ \int \sin^n x\ dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\ \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\ dx$$

$$3)\ \int \sec^n x\ dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\ \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\ dx$$

$$4)\int x^n\ e^x\ dx = x^n\ e^x - n\int x^{n-1}\ e^x\ dx$$

سنحتاج n تكاملات بالأجزاء لإكمال العملية.

الصيغة $\int \sin^m x \ \cos^n x \ dx$

إذا كانت القوتان m , n

إحداهما فردية والأخرى زوجية

تكامل بالتعويض: نفرض

u = الدالة ذات القوة الزوجية

مثال 3.1 ص 499
مثال 3.2 ص 500
التمارين 1 ، 2 ، 5 ص 507

فرديتان

تكامل بالتعويض: نفرض

u = cos x or u = sin x

والأفضل الأعلى قوة

التمارين 3 ، 4 ، 6 ص 507

خلاصة هذه الصيغة:

هي تكامل بالتعويض سنختار فيه

u = cos x or u = sin x

وبعد خطوة التعويض ستكتشف هل كان اختيارك صحيح أم يجب عليك تعديله .... ؟

قد تستخدم المتطابقات:

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

الصيغة $\int tan^m x \; sec^n x \; dx$

إذا كانت القوتان m , n

زوجيتان

تكامل بالتعويض: نفرض

u = tan x

مثال 3.7 ص 502

التمارين 15 ، 16 ص 507

فرديتان

تكامل بالتعويض: نفرض

u = sec x

مثال 3.6 ص 502

التمارين 9 ، 11 ، 12 ص 507

قوة tan x فردية وقوة sec x زوجية

تكامل بالتعويض: نفرض

u = tan x or u = sec x

التمارين 45 ، 46 ص 507

خلاصة هذه الصيغة:

هي تكامل بالتعويض سنختار فيه

u = tan x or u = sec x

وبعد خطوة التعويض ستكتشف هل كان اختيارك صحيح أم يجب عليك تعديله .... ؟

قد تستخدم المتطابقات:

$$sec^2 x = 1 + tan^2 x$$

$$csc^2 x = 1 + cot^2 x$$

التعويض مع الدوال المثلثية

التعبير	التعويض مع الدوال المثلثية	الفترة	المتطابقة
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

تكامل الدوال النسبية باستخدام
الكسور الجزئية

أولاً: درجة البسط < درجة المقام

1 المقام يُحلل إلى عوامل مختلفة جميعها من الدرجة الأولى

$$\text{الكسر} = \frac{A}{\text{العامل الأول}} + \frac{B}{\text{العامل الثاني}} + \cdots\cdots\cdots$$

2 المقام يُحلل إلى عوامل من الدرجة الأولى إحداها مكرر

$$\text{الكسر} = \frac{A}{\text{الغير مكرر}} + \frac{B}{\text{المكرر}} + \frac{C}{(\text{المكرر})^2}$$

3 أحد عوامل المقام الناتجة من التحليل من الدرجة الثانية ولا يحلل

$$\text{الكسر} = \frac{A}{\text{الدرجة الأولى}} + \frac{Bx + C}{\text{الدرجة الثانية}}$$

ثانياً: درجة البسط ≥ درجة المقام

4 القسمة المطولة أو التركيبية

ملاحظة: تكامل دالة خطية مرفوعة للقوة n

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$