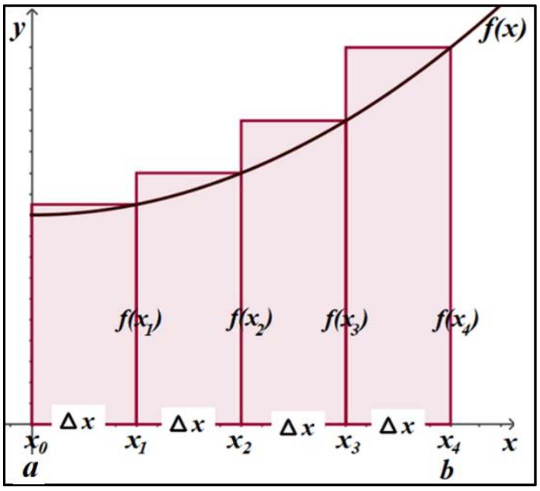
(3 - 5) المساحة

في هذا الدرس سوف نطور طريقة **لإيجاد المساحة تحت المنحنى** $y = f(x)$ وفوق محور x على الفترة $[a, b]$ وذلك بعمل تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية، سيكون عرض كل فترة جزئية $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

طرق التقريب بالمستطيلات (مجاميع ريمان)

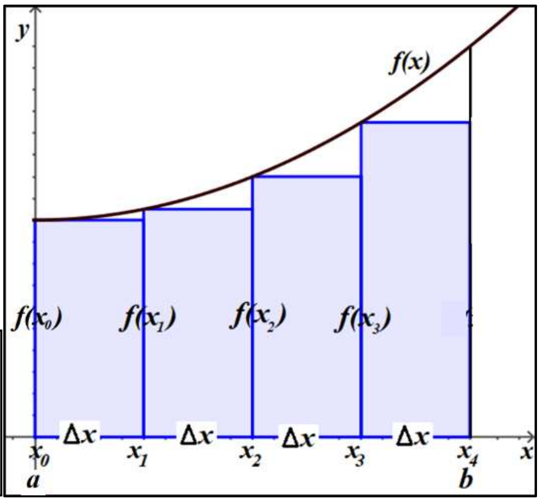
أولًا: التقريب اليميني



$$A \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A_n.$$

سنلاحظ في هذه الحالة أن:
مجموع مساحات المستطيلات الأربعة.......... من المساحة الحقيقية تحت المنحنى.

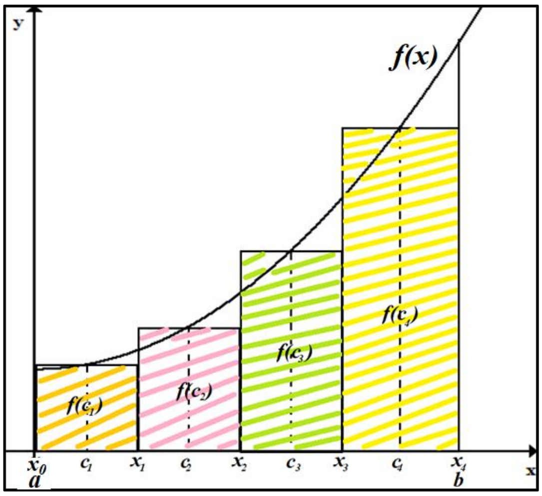
ثانيًا: التقريب اليساري



$$A \approx f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x = A_n$$

سنلاحظ في هذه الحالة أن:
مجموع مساحات المستطيلات الأربعة.......... من المساحة الحقيقية تحت المنحنى.

ثالثًا: التقريب المنتصفي



$$A \approx f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = A_n$$

سنلاحظ في هذه الحالة أن:
مجموع مساحات المستطيلات الأربعة.......... من المساحة الحقيقية تحت المنحنى.

(3 - 5) المساحة

ملاحظات: 1) مجموع ريمان الذي يستخدم قيم نقطة المنتصف **عادة أدق** من قاعدتي نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى.
2) كلما زاد عدد المستطيلات تحت المنحنى نحصل على مساحة أقرب إلى المساحة الحقيقية.

صياغة تعريف موحد لمجاميع ريمان بالحالات الثلاثة

التعريف 3.2

لتكن: $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ ، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
لكل i . اختر النقاط $c_1, c_2, \dots, c_n$ ، حيث يكون c_i أي نقطة في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.
لكل $i = 1, 2, \dots, n$. (وهذه النقاط تسمّى **نقاط القيم**). إنّ **مجموع ريمان** لهذه التجزئة ومجموعة نقاط القيم، هو

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

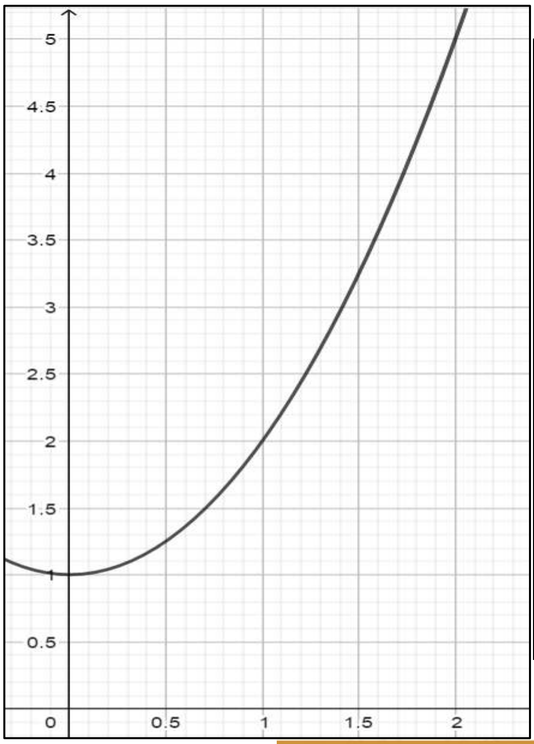
حيث: في التقريب اليميني $c_i = x_i$ واليساري $c_i = x_{i-1}$ والمنتصفي $c_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$

أولًا: إيجاد المساحة التقريبية عندما يكون عدد المستطيلات n صغيرًا

تمارين صـ 344 :- نظم نقاط التقدير المناظرة لنقطة المنتصف لكل فترة جزئية وارسم الدوال ومستطيلات التقدير وأوجد مجموع ريمان:

1) $f(x) = x^2 + 1 \qquad ; \qquad [0\,,2] \qquad ; \quad n = 4$

الحل:



الفترات الجزئية	طول الفترة Δx	منتصف الفترة c_i	الارتفاع $f(c_i)$	المساحة $f(c_i)\,.\,\Delta x$
مجموع المساحات (التقريبية) $A_4 = \sum_{i=1}^{4} f(c_i)\,\Delta x$				

تمارين صـ 345 ـ: استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى.

35.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

الحل

الفترة: .. .. $[a,b] =$

عدد الفترات الجزئية (عدد المستطيلات): ... ... $n =$

عرض كل فترة جزئية: ... ... $= \Delta x = \frac{b-a}{n}$

هل يمكنك إيجاد Δx بطريقة أخرى؟

a) نقطة النهاية اليسرى:

الارتفاعات اليسرى: .... , 2.4 , 2.0

$$A_8 = \sum_{i=0}^{7} f(c_i)\,\Delta x$$

....

....

....

b) نقطة النهاية اليمنى:

الارتفاعات اليمنى: .... , 2.6 , 2.4

$$A_8 = \sum_{i=1}^{8} f(c_i)\,\Delta x$$

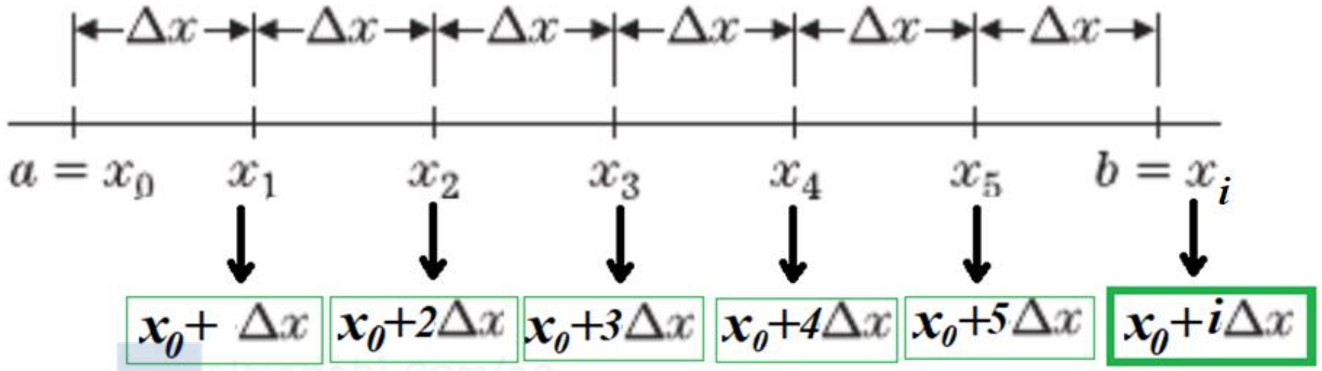
....

....

....

مفردات ورموز هامة

ترميز النقاط في التجزئة المنتظمة:



عدد الفترات الجزئية المتساوية: عدد المستطيلات n

عرض كل فترة جزئية: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

أو $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ حيث $i = 1, 2, 3, \dots \dots, n$

ثانيًا: إيجاد المساحة التقريبية عندما يكون عدد المستطيلات n كبيرًا

	قانون c_i	قيم i من	قيم i إلى
التقريب المنتصفي	$c_i = x_0 + i\ \Delta x + \frac{\Delta x}{2}$	$i = 0$	$i = n - 1$
التقريب المنتصفي	$c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$	$i = 1$	$i = n$
التقريب اليساري	$c_i = x_0 + i\ \Delta x$	$i = 0$	$i = n - 1$
التقريب اليميني	$c_i = x_0 + i\ \Delta x$	$i = 1$	$i = n$

تمارين صـ 344 :- قرب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلاً وقواعدها

a) نقطة النهاية اليسرى   b) نقطة المنتصف   c) نقطة النهاية اليمنى

$7)\ y = \sqrt{x+2} \qquad on\ [1\,,4] \qquad ,n = 16$

الحل

عرض كل فترة جزئية: $\Delta x = \frac{b-a}{n} =$ ....

a) التقريب اليساري:

$c_i = x_0 + i\ \Delta x$

= ....

من $i = 0$ إلى $i = n-1$

$A_{16} = \sum_{i=0}^{15} f(c_i)\,\Delta x$

....

استخدام الآلة ....

b) التقريب المنتصفي

$c_i = x_0 + i\ \Delta x + \frac{\Delta x}{2}$

= ....

من $i = 0$ إلى $i = n-1$

$A_{16} =$ ....

....

استخدام الآلة ....

c) التقريب اليميني

$c_i = x_0 + i\ \Delta x$

= ....

من $i = 1$ إلى $i = n$

$A_{16} =$ ....

....

استخدام الآلة ....

تفكير ناقد:

أوجد المساحة في كل من الحالات الثلاثة عندما $n = 50$, $n = 100$

ثالثًا: إيجاد المساحة الدقيقة عندما يكون عدد المستطيلات $n \to \infty$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

تمارين صـ 344 :- استخدم مجموع ريمان والنهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى

$14)\ y = 4x^2 - x \qquad on\ [0\,,1]$

التقريب اليميني

اعتبرنا الحل بيمين الفترة لسهولة الحل وهو لا يؤثر على ناتج المساحة حيث إن المساحة الدقيقة في كل الحالات ستكون نفسها

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} =$ ………….

$c_i = x_0 + i\ \Delta x$

= ……………………

من $i = 1$ إلى $i = n$

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

تمارين صـ 344 ـ: استخدم مجموع ريمان والنهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى

$$13)\ y = 2x^2 + 1 \qquad on\ [1\ ,3]$$

التقريب اليميني

اعتبرنا الحل بيمين الفترة لسهولة الحل وهو لا يؤثر على ناتج المساحة حيث إن المساحة الدقيقة في كل الحالات ستكون نفسها

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \ldots\ldots.\ldots\ldots$$

$$c_i = x_0 + i\ \Delta x$$

= ....

من $i = 1$ إلى $i = n$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....