شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae
موقع المناهج الإماراتية

ملزمة الدروس الثلاثة الأولى من الوحدة الرابعة

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	أسئلة الامتحان النهائي الالكتروني والورقي - بريدج
2	حل اختبار تجريبي يحاكي الامتحان النهائي وفق الهيكل الوزاري
3	اختبار تجريبي يحاكي الامتحان النهائي وفق الهيكل الوزاري
4	حل تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي
5	تجميعة أسئلة بونس متوقعة في الامتحان النهائي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

مقرَّرات الفصل الدراسي الثاني

Unit 4: Applications of Differentiation — الوحدة الرابعة: تطبيقات التفاضل

Jalshobaki.com

Lesson Number	Lesson Name	اسم الدرس
C4 - L3	Maximum and Minimum Values	القيم العظمى والصغرى
C4 - L4	Increasing and Decreasing Functions	الدوال المتزايدة والمتناقصة
C4 - L5	Concavity and the Second Derivative Test	التقعر واختبار المشتقة الثانية
C4 - L6	Overview of Curve Sketching	نظرة عامة على رسم المنحنيات
C4 - L7	Optimization	القيم المثلى
C4 - L8	Related Rates	المعدلات المرتبطة
C4 - L9	Rates of Change in Economics and the Sciences	معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

Unit 5: Integration — الوحدة الخامسة: التكامل

Jalshobaki.com

C5 - L1	Antiderivatives	عكس المشتقة والدالة الأصلية
C5 - L2	Sums and Sigma Notation	المجموع والرمز سيجما
C5 - L3	Area	المساحة
C5 - L4	The Definite Integral	التكامل المحدود
C5 - L5	The Fundamental Theorem of Calculus	النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
C5 - L6	Integration by Substitution	التكامل بالتعويض
C5 - L7	Numerical Integration (Enrichment Material)	التكامل العددي (مطالعة ذاتية)
C5 - L8	The Natural Logarithm as an Integral	اللوغاريتم الطبيعي كتكامل (مطالعة ذاتية)

Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com

Maximum and Minimum Values (4-3) القيم العظمى والصغرى

Increasing and Decreasing Functions (4-4) الدوال المتزايدة والمتناقصة

Concavity and the Second Derivative Test (4-5) التقعُّر واختبار المشتقة الثانية

* هذه الدروس يجب أن تربط معاً ويجب إعادة ترتيبها بحيث يتم فهمها من قبل الطالب بكل سهولة، ولهذا سنشرحها مجتمعة حسب أفضلية الأولوية كاملةً، ثم نعود لتفصيلها بشكل أوضح مع مجموعة من التمارين المهمة.

First Derivative Applications $f'(x)$ تطبيقات المشتقة الأولى

1) Critical Numbers — 1) النقاط (الأعداد) الحرجة

2) Increasing and Decreasing Intervals — 2) فترات التزايد والتناقص

3) Absolute Extremum – Maximum and Minimum — 3) القيم القصوى – عظمى وصغرى

1

النقاط الحرجة: هي نقاط داخلية في مجال الدالة (إذا لا يعد طرفا فترة مجال الدالة قيماً حرجة) ، حيث يكون عندها

$\bar{f}(c) = 0$ أو $\bar{f}(c)$ غير موجودة بسبب 1) عدم الاتصال: قفزة، فجوة، لا نهائي وتذبذبي

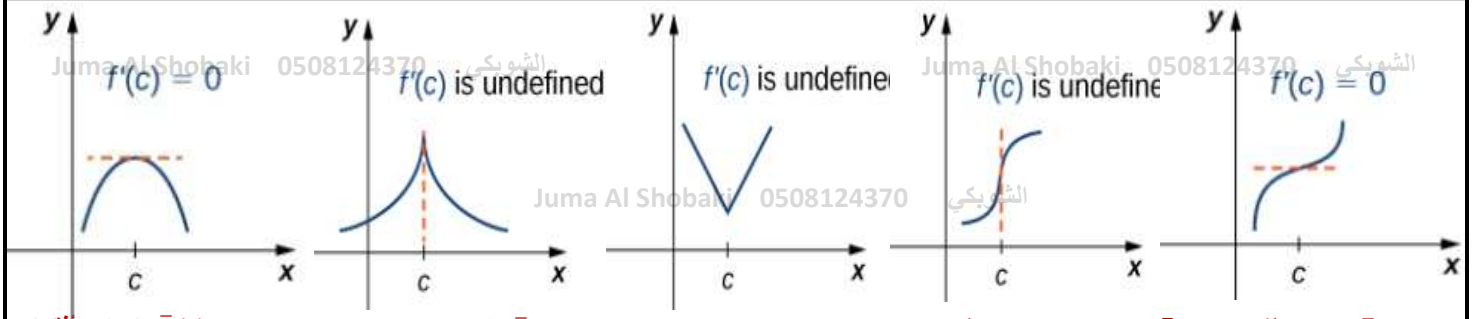
2) عدم قابلية الاشتقاق: ركن، ناب، مماس عمودي

Critical Numbers: They are internal points in the domain of function (so end points are not critical numbers).

Where $\bar{f}(c) = 0$ or $\bar{f}(c)$ is undefined, because of:

1) Discontinuity (jump, hole, infinite, oscillating)

2) Non-Differentiable (corner, cusp, vertical tangent line)

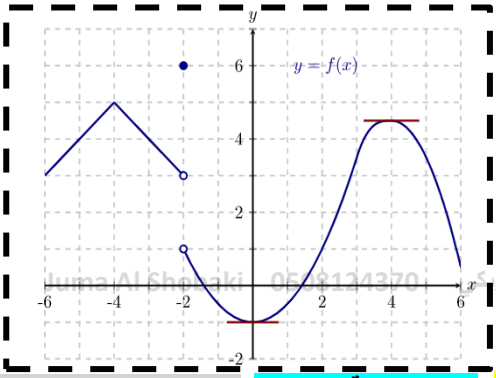


$\bar{f}(c) = 0$ (مماس أفقي) — $\bar{f}(c)$ غير موجودة (ناب) — $\bar{f}(c)$ غير موجودة (ركن) — $\bar{f}(c)$ غير موجودة (مماس رأسي) — $\bar{f}(c) = 0$ (مماس أفقي)

أولا : يتم إيجاد النقاط الحرجة بيانياً في الدالة $f(x)$:

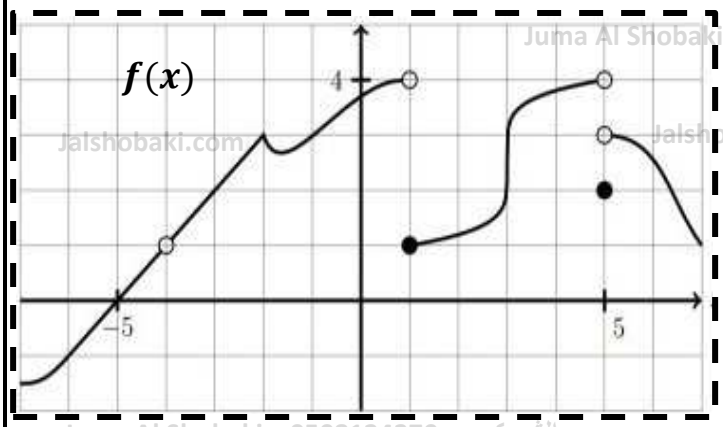
Find all critical numbers in the function $f(x)$?

س1) جد كافة الأعداد الحرجة للدالة f ؟



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س2) جد النقاط الحرجة في الدالة $f(x)$ ؟ **Find all critical numbers in the function $f(x)$?**



Jalshobaki.com

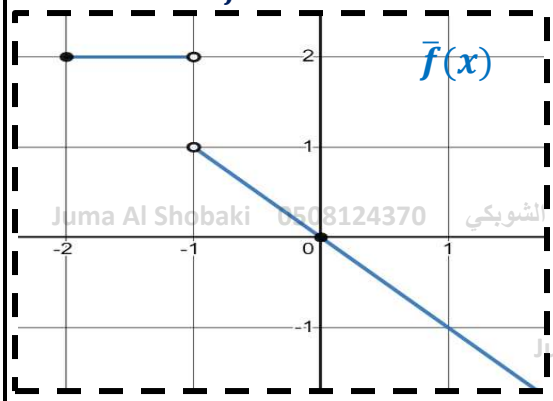
ثانيا : ويتم إيجاد النقاط الحرجة بيانياً في $\bar{f}(x)$

1) من مقاطع x ، حيث تمثل أصفار مشتقة الدالة 2) أو حيث المشتقة غير معرفة (أي المشتقة ليس لها وجود)

- **Critical Numbers are found graphically in $\bar{f}(x)$ from $x-intercepts$, where represent the zeros of the derivative of the function or where the derivative is undefined (the derivative does not exist)**

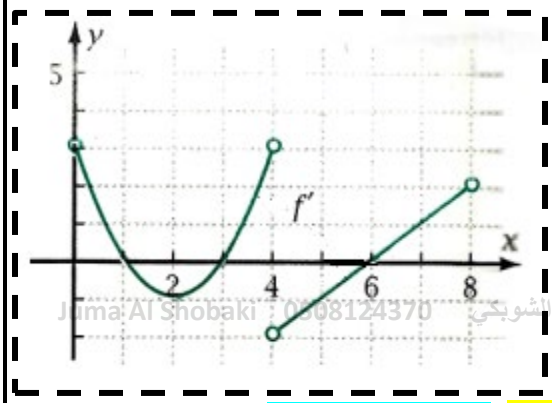
س1) الدالة f معرَّفة على الفترة $[-2,\infty)$ ، والشكل المجاور يمثل بيان الدالة $\bar{f}(x)$ ، جد الأعداد الحرجة للدالة f ؟

The function f is defined on the interval $[-2,\infty)$, and the shown figure represents $\bar{f}(x)$, find the critical numbers for the function f ?



س2) الدالة f معرَّفة على الفترة $[0,8]$ ، والشكل المجاور يمثل بيان الدالة $\bar{f}(x)$ ، جد الأعداد الحرجة للدالة f ؟

The function f is defined on the interval $[0,8]$, and the shown figure represents $\bar{f}(x)$, find the critical numbers for the function f ?



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

ثالثاً: يتم إيجاد النقاط او الاعداد الحرجة جبريا

Find all critical numbers?

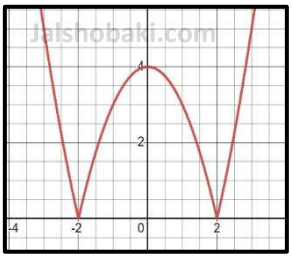
س) جد النقاط الحرجة للدالة أو مجموعة قيم x الحرجة؟

Jalshobaki.com

1) $f(x) = x + \frac{2}{x}$

2) $f(x) = [x + 2]$

3) $f(x) = |x^2 - 4|$



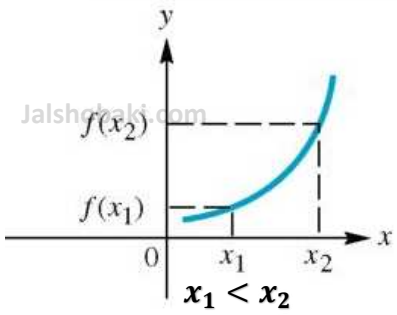
4) $f(x) = x^3 + 3x$

5) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

وسنتعرف على إيجاد النقاط الحرجة في الدوال الأخرى وذلك في تمارين الدروس القادمة إن شاء الله.

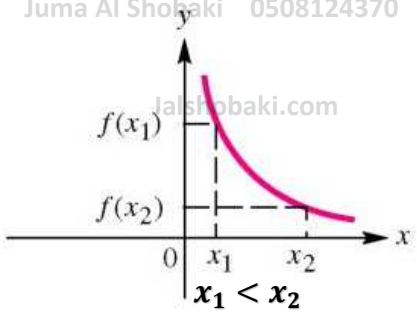
2

فترات التزايد والتناقص: لتكن f دالة معرَّفة على الفترة L ، ولتكن x_1 , x_2 أي نقطتان في الفترة فإنَّ:



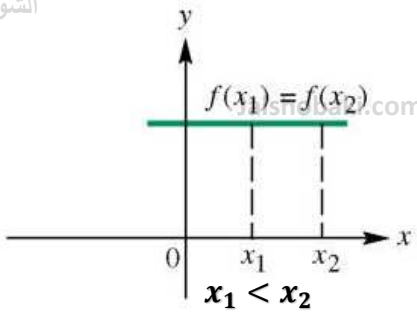
$f(x_1) < f(x_2)$

Increasing الدالة متزايدة



$f(x_1) > f(x_2)$

Decreasing الدالة متناقصة



$f(x_1) = f(x_2)$

Constant الدالة ثابتة

- في حال وجود المشتقة الأولى $\bar{f}$ ، أي الدالة متَّصلة $[\ a, b\ ]$ ، وقابلة للاشتقاق $(\ a, b\ )$ ، فـــإنَّ:

✓ **If the first derivative $\bar{f}$ exists, the function is continuous $[\ a, b\ ]$, and differentiable $(\ a, b\ )$, then:**

1) $\bar{f}(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ متزايدة
Increasing

2) $\bar{f}(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ متناقصة
Decreasing

3) $\bar{f}(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ ثابتة
Constant

- بفرض (f) دالة متزايدة وكان لها معكوس f^{-1} ، فأنَّ f^{-1} أيضاً متزايدة.

(f)is an increasing function with inverse function f^{-1}, f^{-1} *is also an* increasing function

- إذا كانت f , g دالّتان تزايديتان فأنَّ $f(g(x))$ أيضاً متزايدة.

f , g are increasing functions, $f(g(x))$ is also increasing

س1) أوجد (يدوياً) الفترات التي تكون فيها الدالة $y = x^4 - 8x^2 + 1$ متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة؟

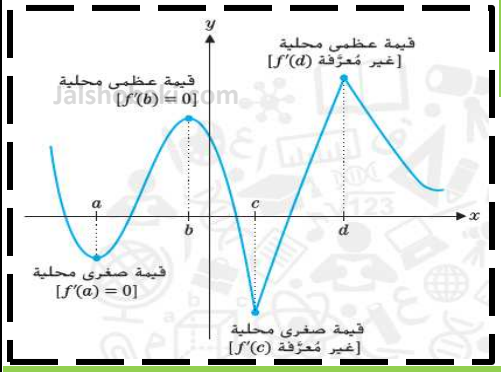
Determine where the function $y = x^4 - 8x^2 + 1$ is increasing and decreasing?

س2) جد فترات التزايد والتناقص للدالة $g(x) = 2x + cosx$ ؟

Find the intervals where the function is increasing and decreasing?

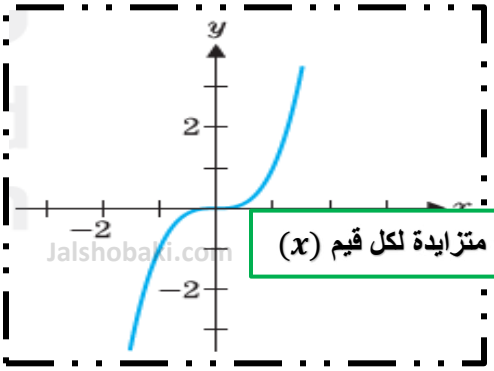
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

3 القيم القصوى (العظمى والصغرى): Absolute Maximum and Minimum Values



- القيم القصوى المحلية (النسبية) تحدث فقط عند الأعداد الحرجة أي عند $\bar{f}=0$ وعند $\bar{f}$ غير موجودة
- يقال أنّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c)\geq f(x)$ لكل (x) في فترة مفتوحة تحوي c
- يقال أنّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت $f(c)\leq f(x)$ لكل (x) في فترة مفتوحة تحوي c

- توجد القيم القصوى عند النقاط الحرجة، ولكن ليس بالضرورة أنَّ كل نقطة حرجة تناظر قيمة قصوى



لاحظ الدالة متزايدة لكل قيم (x)

$Ex)\quad f(x)=x^3$

$\bar{f}(x)=3x^2=0 \quad x=0 \in$ للمجال

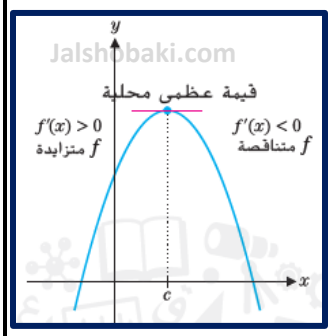
❖ لاحظ $x=0$ حرجة ولكن ما من قيم قصوى عندها، و السبب أنَّ الدالة لم تتزايد ثمّ تتناقص على جانبي $x=0$

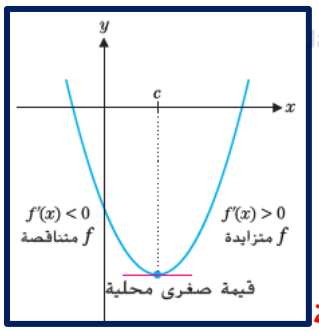
❖ Note that $x=0$ is a critical number, but there are no extrema values for it, and the reason is that the function did not increase and then decrease on either side of $x=0$

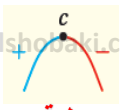
- ✓ Local Extrema occur only at critical numbers, when $\bar{f}=0$ and when $\bar{f}$ does not exist
- ✓ $f(c)$ is said to be a local maximum of f if $f(c)\geq f(x)$ for each (x) in an open interval containing c
- ✓ $f(c)$ is said to be a local minimum of f if $f(c)\leq f(x)$ for each (x) in an open interval containing c
- ✓ Extremum values are found at critical numbers, but not necessarily every critical number corresponds to an extrema value

- نظرية فيرمات: بفرض $f(c)$ تمثّل قيمة قصوى محلية إذن لابد أنَّ (c) عدداً حرجاً والعكس غير صحيح

- ✓ Fermat's Theorem: Suppose that $f(c)$ is a local extremum (local maximum or local minimum), then (c) must be a critical number of f

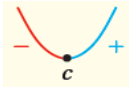






- إذا تغيَّرت إشارة $\bar{f}(x)$ من + ⟵ − حول c

(أي من التزايد للتناقص) ⟸ يتضمَّن $f(c)$ عظمى محلية

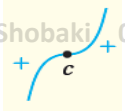


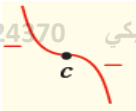
- إذا تغيَّرت إشارة $\bar{f}(x)$ من − ⟵ + حول c

(أي من التناقص للتزايد) ⟸ يتضمَّن $f(c)$ صغرى محلية

واذا لم تغير $\bar{f}(x)$ من اشارتها حول c, فان $f(c)$ ليست قصوى محلية

f changes from increasing to decreasing at *c*), then *f* (*c*) is a local maximum.
f changes from decreasing to increasing at *c*), then *f* (*c*) is a local minimum
If *f* (*x*) has the *same* sign on (*a*, *c*) and (*c*, *b*), then *f* (*c*) is *not* a local extremum.





Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

- تعرف القيم القصوى المطلقة إذا كان f دالة مجالها D و $c \in D$

1) عظمى مطلقة $f(c) \geq f(x)$ لكل (x) في مجال D

2) صغرى مطلقة $f(c) \leq f(x)$ لكل (x) في مجال D

Jalshobaki.com

- تسمّى قيم قصوى مطلقة وقد تهمل هذه التسمية ونكتفي بالقصوى(كل قيمة قصوى مطلقة هي محلية والعكس غير صحيح)
- الدوال المتصلة والمعرفة على $[a, b]$ تحقّق عظمى وصغرى مطلقة في تلك الفترة. وتوجد القيم القصوى المطلقة عند النقاط الطرفية (أي نقطة نهاية a أو b) وعند النقاط الحرجة
- الدوال المتصلة والمعرفة على(a, b) تحقّق إما عظمى أو صغرى مطلقة باعتبارها القيمة القصوى المحلية الوحيدة في الفترة
- لإيجاد القيم القصوى المطلقة تحليلياً فإنّنا:

1) نجد كل الأعداد الحرجة في الفترة ونحسب قيمها

2) نحسب قيم الدالة عند الأطراف

3) أكبرها هي العظمى المطلقة ـــ أصغرها هي الصغرى المطلقة

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

- توجد القيم القصوى المطلقة على فترات مغلقة (كلاهما) أي عظمى وصغرى. وقد يوجد أي منها على فترة مفتوحة أو نصف مفتوحة

- Absolute Maximum values are defined if f is a function of domain D and $c \in D$

  1) Absolute maximum $f(c) \geq f(x)$ for every (x) in the domain D

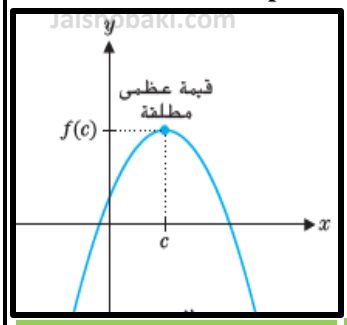
  2) Absolute minimum $f(c) \leq f(x)$ for every (x) in the domain D

Jalshobaki.com

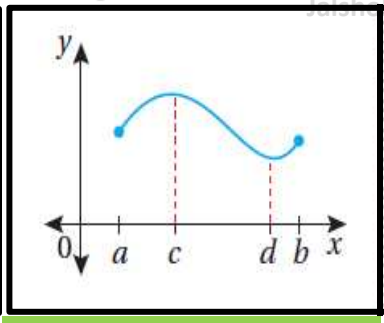
- They are called absolute maximum values, or simply maximum, as it's also local extrema.
- Continuous functions defined on $[a, b]$ are absolute maxima and minima in that interval. Absolute maximum values are found at the end points (a or b endpoints), and at the critical numbers
- Continuous functions defined on (a, b) , has either absolute maximum or absolute minimum as it is the unique local extrema in the interval
- To find Extrema, we:

  1) Find all the critical numbers in the interval and calculate their values
  2) Calculate the values of the function at the ends
  3) The largest of them is the Absolute Maximum - the smallest of them is the Absolute Minimum

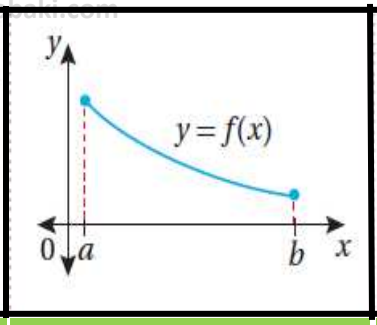
- Absolute maximum values exist over closed intervals (both) maximum and minimum. Any of them may exist on an open or semi-open interval



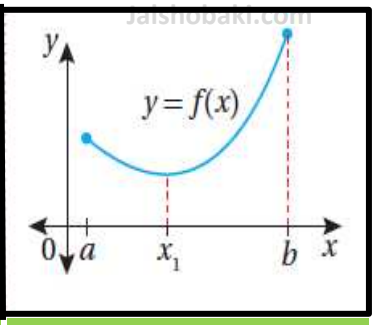
قيمة عظمى مطلقة على فترة مفتوحة



قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة عند نقطتين داخليتين



قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة عند الأطراف



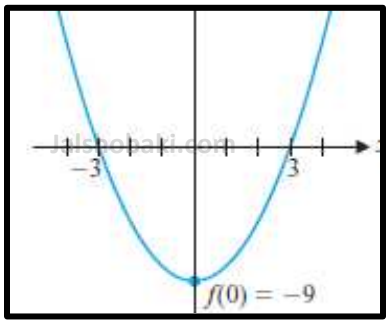
قيمة عظمى مطلقة عند نقطة طرفية
قيمة صغرى مطلقة عند نقطة داخلية

Find the absolute extrema of $f(x) = x^2 - 9$:

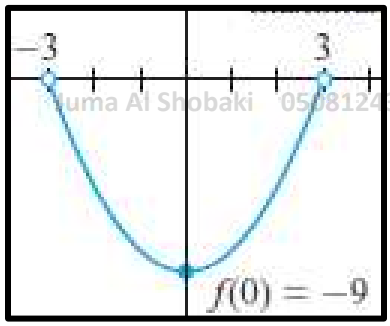
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س1) جد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ ؟

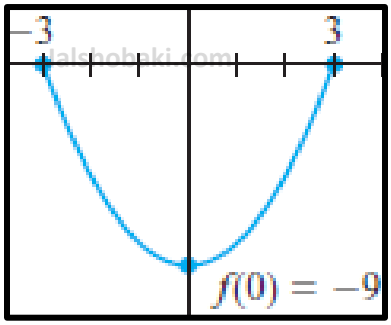
A) في الفترة $(-\infty, \infty)$



B) في الفترة $(-3, 3)$



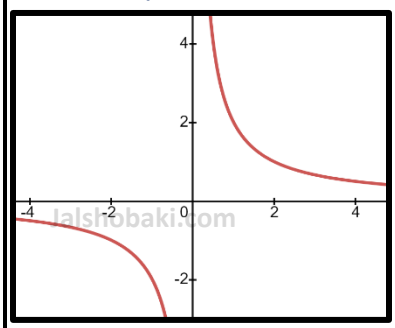
C) في الفترة $[-3, 3]$



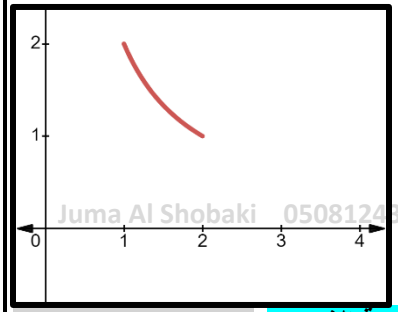
Jalshobaki.com

س2) A) هل للدالة $f(x) = \frac{2}{x}$ قيم قصوى على الفترة $(-\infty, \infty)$ ؟

Locate any absolute extrema of $f(x) = \frac{2}{x}$ on $(-\infty, \infty)$?



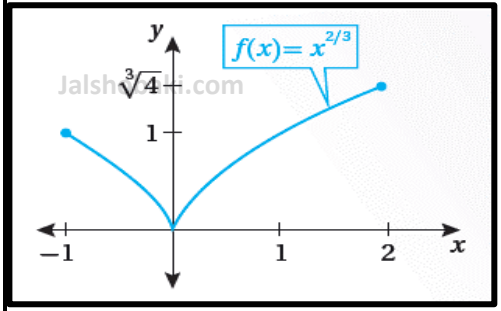
B) على الفترة $[1, 2]$ ؟



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س3) جد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ على الفترة $[-1, 2]$ أكّد بيانياً وتحليلياً؟

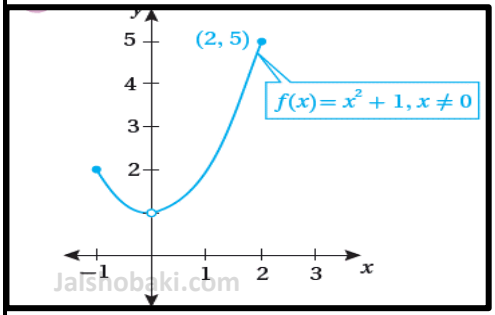
Find the absolute extrema of $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ on the interval $[-1, 2]$? confirm graphically and analytically?



Jalshobaki.com

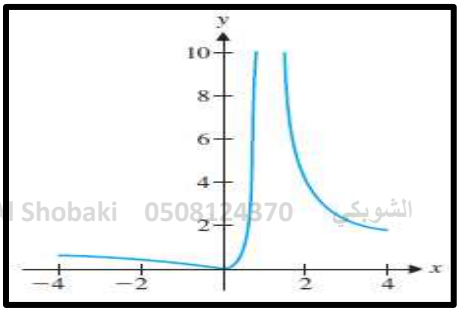
س4) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للدالة المعطى تمثيلها البياني؟

Find the local and absolute extrema (if any) of the given function's graph?



س5) استخدم التمثيل البياني لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة (إذا كانت موجودة) للدالة $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ في الفترات التالية:

Use the graph to locate the absolute extrema (if they exist) of the function on the given interval?



A) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ***B)*** $(-1, 1)$ ***C)*** $(0, 1)$ ***D)*** $[-2, -1]$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Second Derivative Applications $f''(x)$ تطبيقات المشتقة الثانية

4) Concavity Up and Down Intervals — 4) فترات التقعر لأعلى ولأسفل

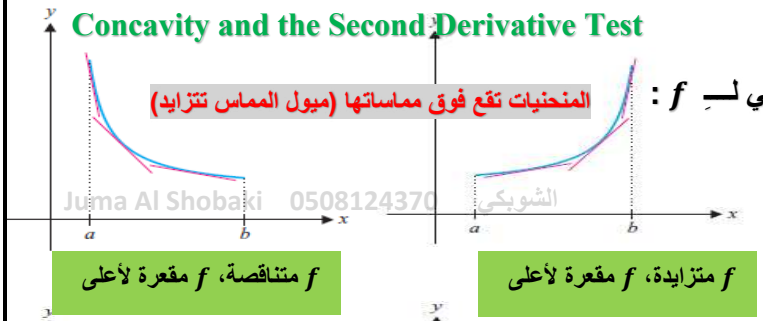
5) Inflection Points — 5) نقاط الانقلاب (الانعطاف)

6) The Second Derivative Test to Find Extrema — 6) اختبار القيم القصوى

Jalshobaki.com

4 Concavity and the Second Derivative Test التقعر واختبار المشتقة الثانية

- لكل f قابلة للاشتقاق في الفترة L يكون التمثيل البياني لـــ f :
  1) مقعّراً لأعلى في L إذا كانت f' متزايدة في L
  2) مقعّراً لأسفل في L إذا كانت f' متناقصة في L

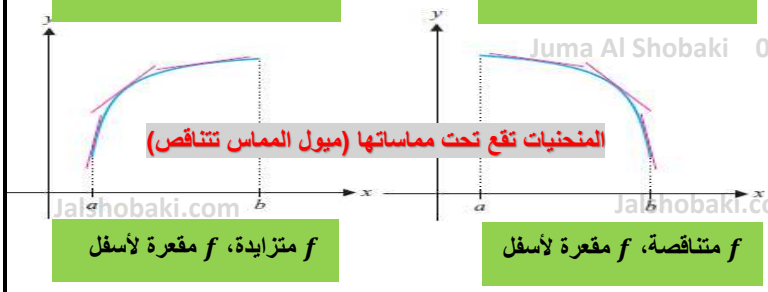


- وإذا وجدت f'' في الفترة (L) وكان:

$f''(x) > 0$ تكون f مقعَّراً لأعلى في L

$f''(x) < 0$ تكون f مقعَّرة للأسفل في L

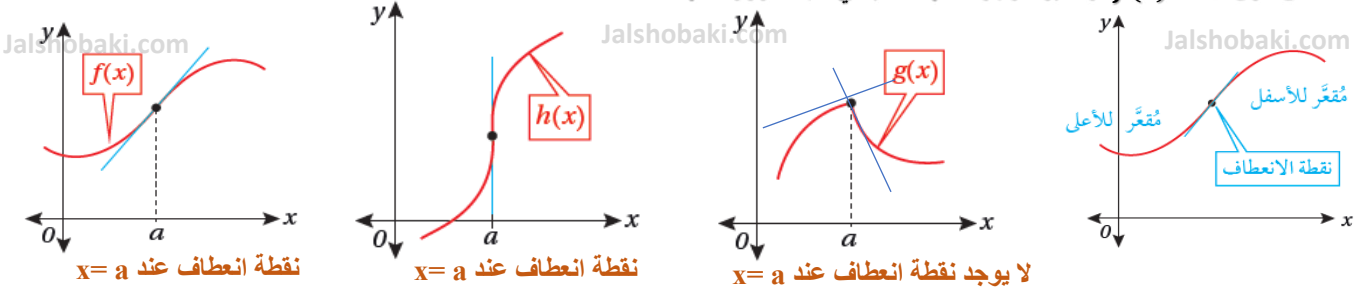
$f''(x) = 0$ لا تقعر



- For each differentiable f on the interval L, the graph of f is:
  1) Concave up in L if f' is increasing in L
  2) Concave down in L if f' is decreasing in L
- If f'' is found in the interval (L) and:
  $f''(x) > 0$, f is concave up in L
  $f''(x) < 0$, f is concave down in L
  $f''(x) = 0$, no *concavity*

5 Infliction Points نقاط الانعطاف

- لتكن (f) متَّصلة في (a,b) والتمثيل البياني يغيّر التقعُّر عند النقطة $c \in (a,b)$ وكان لمنحنى f مماس وحيد عند تلك النقطة، فإن $(c,f(c))$ نقطة انعطاف (انقلاب) وعليه إذا كانت $(c,f(c))$ نقطة انعطاف، فإنَّ $f''(c)=0$ أو $f''(c)$ غير موجودة
- لكن كون $f''(c)=0$ او غير موجودة فهذا لا يعني بالضَّرورة أنَّها نقطة انعطاف.



- Let (f) be continuous at (a,b) and the graph shifts the concavity at point $c \in (a,b)$ and *f has a tangentline at that point*, so point $(c,f(c))$ is an inflection point
- So, if $(c,f(c))$ is an inflection point, then $f''(c)=0$ or $f''(c)=$ does not exist,
- but *not all points where* $f''(c)$ *is zero or undefined correspond to inflection points.*

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س1) حدّد فترات التقعُّر لأعلى ولأسفل وحدّد نقاط الانعطاف للدالة $y = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ ؟

Determine the intervals where the graph of the function $y = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ is concave up and concave down, and identify inflection points?

Jalshobaki.com

س2) جد نقاط الانعطاف للدالة $y = x^4$ ؟

Find the inflection points for $y = x^4$?

6 اختبار المشتقّة الثّانية لإيجاد القيم القصوى — The Second Derivative Test to Find Extrema

- بفرض أنَّ $\bar{f}$ متّصلة في (a, b) و $\bar{f}(c) = 0$ لكل $c \in (a, b)$ ، فإذا كانت:
  1) $\bar{\bar{f}}(c) < 0$ ، فإنَّ $f(c)$ هي عظمى محلية
  2) $\bar{\bar{f}}(c) > 0$ ، فإنَّ $f(c)$ هي صغرى محلية

➢ ملاحظة: إذا كانت $\bar{\bar{f}}(c) = 0$ أو غير معرَّفة ، فإنَّ الاختبار هذا لا يعطي نتائج للقيم القصوى

✓ Assuming that $\bar{f}$ is continuous on (a, b) and $\bar{f}(c) = 0$ for each $c \in (a, b)$, then:

1) $\bar{\bar{f}}(c) < 0$, then $f(c)$ is a local maximum
2) $\bar{\bar{f}}(c) > 0$, then $f(c)$ is a local minimum

✓ Note: If $\bar{\bar{f}}(c) = 0$ or $\bar{\bar{f}}(c) =$ is not defined, this test does not return results for extrema values

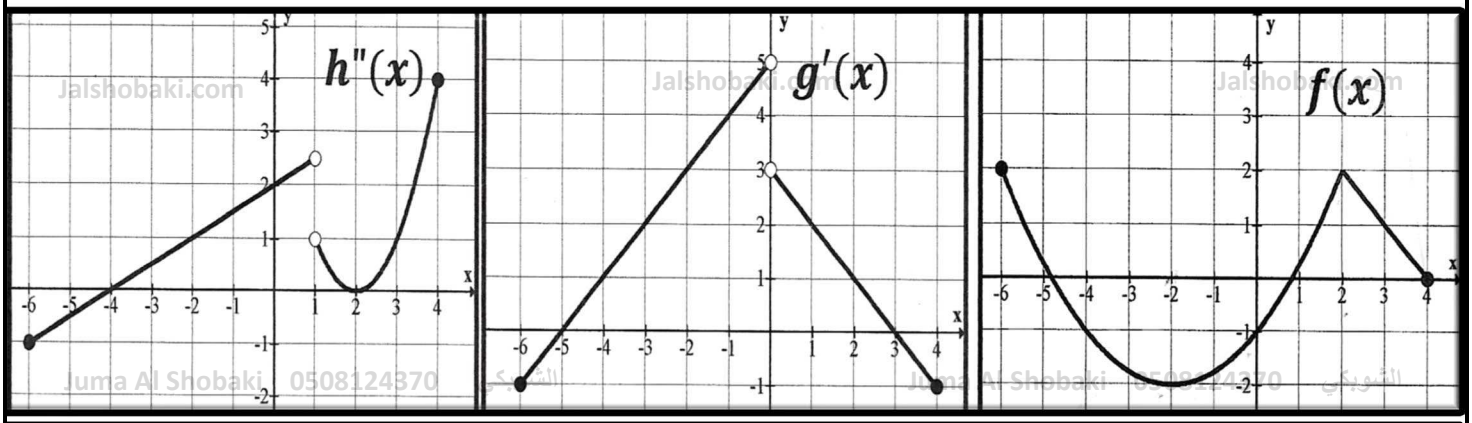
س1) استخدم المشتقّة الثانية لإيجاد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ؟

Use the Second Derivative Test to find the extrema of $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س1) لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ دوال متصلة على الفترة $[-6,4]$

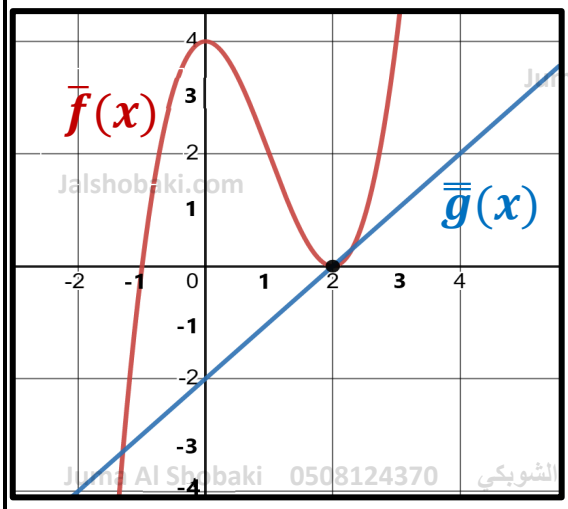
فيما يلي بيان كلاً من $f(x)$ ، $g'(x)$ ، $h''(x)$. من الرَّسم أكمل العبارات التّالية:



النقاط الحرجة للدالة هي: Critical Numbers	النقاط الحرجة للدالة هي: Critical Numbers	فترات تقعُّر منحنى الدالة لأسفل: Concave Down Intervals
الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة Increasing Intervals	الفترات التي تكون عندها الدالة متناقصة Decreasing Intervals	إحدى نقاط الانقلاب للدالة Infliction Point
قيمة x التي يوجد عندها للدالة قيمة صغرى مطلقة Value of x where the function has an Absolute Minimum	قيمة x التي يوجد عندها للدالة قيمة عظمى محلية Value of x where the function has a Local Maximum	فترات تقعُّر منحنى الدالة لأعلى Concave Up Intervals
فترات تقعر منحنى الدالة لأعلى Concave Up Intervals	فترات تقعُّر منحنى الدالة لأعلى Concave Up Intervals	$h'''(2)$ تساوي

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س 2) الرَّسم البياني لـــِ $\bar{f}(x)$ و $\bar{\bar{g}}(x)$. أجب عمّا يلي:



1. النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي

2. القيمة الصغرى المحلية للدالة $f(x)$ عند $x =$

3. فترات التزايد للدالة $f(x)$

4. فترات التناقص للدالة $f(x)$

5. فترات التقعّر للدالة $f(x)$ لأعلى

6. فترات التقعّر للدالة $f(x)$ للأسفل

7. نقاط انقلاب الدالة $f(x)$ هي

8. عند أي قيمة لـــِ (x) يكون للدالّتان $g(x)$ ، $f(x)$ نقطة انقلاب؟ $\mathrm{x} =$

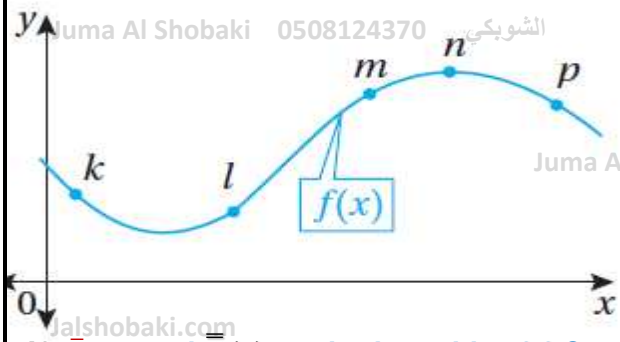
9. إذا كانت النقاط $x = 0$ و $x = 4$ النقاط الحرجة للدالة $g(x)$ ، فما نوع القيم القصوى المحلية عند هذه النقاط الحرجة؟

10. فترات تقعّر الدالة $g(x)$ لأعلى

11. فترات تقعّر الدالة $g(x)$ لأسفل

الربط بين اشارتي المشتقة الأولى والثانية

س3) يبين الشكل المجاور منحنى $f(x)$, حدد النقطة (النقاط) من بين {k,l,m,n,p}التي تحقق الشروط التالية:



Use $f(x)$ to find the point (points) from {k,l,m,n,p }

Which satisfy conditions below:

A) ان تكون إشارة كل من $\bar{f}(x)$ و $\bar{\bar{f}}(x)$ موجبة (+) ؟

A) $\bar{f}(x)$ and $\bar{\bar{f}}(x)$ are both positive (+) ?

B) ان تكون إشارة كل من $\bar{f}(x)$ و $\bar{\bar{f}}(x)$ سالبة (-)؟

B) $\bar{f}(x)$ and $\bar{\bar{f}}(x)$ are both negative (-) ?

C) ان تكون إشارة $\bar{f}(x)$ سالبة (-) و إشارة $\bar{\bar{f}}(x)$ موجبة (+) ؟

C) $\bar{f}(x)$ is negative and $\bar{\bar{f}}(x)$ is positive?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

سؤال شامل للميزات كاملة جبريا

س1) إذا كانت $f(x) = sin2x$ لكل $x \in [0, \pi]$ فجد:

A) Critical numbers

B) Increasing and Decreasing Intervals

C) The Extrema, Local and Absolute

D) Concave Up and Down Intervals

E) Infliction Points

A) النقاط الحرجة

B) مجالات التزايد والتناقص

C) القيم القصوى المحلية و المطلقة

D) مجالات التقعّر لأعلى ولأسفل

E) نقاط الانعطاف

Jalshobaki.com

ثم ننتقل لاهم تمارين الكتاب التفصيلية والاسئلة الوزارية السابقة والمقترحة على الدروس (الثالث والرابع والخامس) على الترتيب

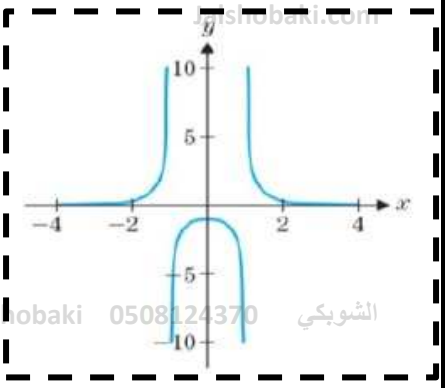
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

من تمارين الدرس (3-4)

س1) استخدم التمثيل البياني لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة إن وجدت للدالة $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ في الفترة المعطاة؟

Use the graph to locate the absolute extrema (if they exist) of the function on the given interval?

A) $(0,1) \cup (1,\infty)$ *B*) $(-1,1)$ *C*) $(0,1)$ *D*) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$



Jalshobaki.com

س2) جد الأعداد الحرجة يدوياً، ثمَّ بمعرفتك للتمثيلات البيانية حدّد هل العدد الحرج يمثّل قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية أو لا يمثّل؟

Find all critical numbers by hand. Use your knowledge of the type of graph to determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither?

A) $y = x^2 + 5x - 1$

B) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

C) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

Jalshobaki.com

D) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}}$

E) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

F) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

مهم جداً في الدوال المتفرعة معرفة إذا ما كانت متصلة أم لا عند نقطة التفرع

G) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & , \quad x<0 \\ x^2-4x+3 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

H) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x & , \quad x<2 \\ 4x^3 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$

I) $f(x)=\begin{cases} sinx & , \quad -\pi<x<\pi \\ -tanx & , \quad |x|\geq \pi \end{cases}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval? **س3) جد القيم القصوى المطلقة في الفترة المعطاة؟**

A) $f(x) = sinx + cosx$, $[0\,, 2\pi]$, $\left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right]$

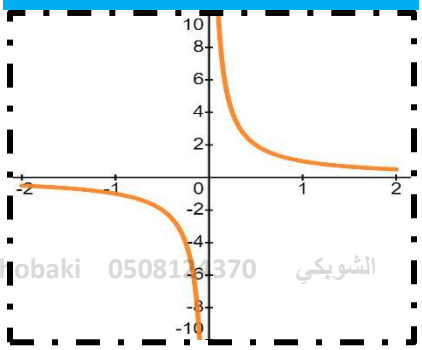
Jalshobaki.com

B) $f(x) = e^{-x^2}$, في الفترة بين $[0\,, 2]$, $[-3, 2]$

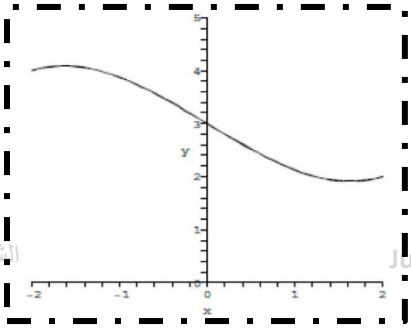
C) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$, $[0\,, 1]$, $[-3\,, 4]$

Sketch a graph of a function f such that: **س4) أرسم تمثيل بياني للدالة (f) بحيث تكون:**

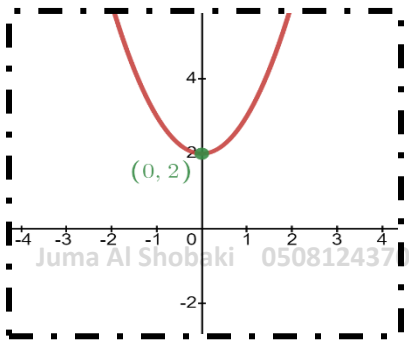
القيمة العظمى المطلقة غير موجودة في الفترة $[-2\,, 2]$ ولا الصغرى المطلقة



العظمى المطلقة في الفترة $4 = (-2, 2)$ والصغرى المطلقة هي 2



القيمة العظمى المطلقة في الفترة $(-2\,, 2)$ غير موجودة والصغرى المطلقة هي 2



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س5) الدالة $f(x)=ax^3-bx^2-9x+15$ لها قيمة عظمى محلية عند $x=1$ وقيمة صغرى محلية عند $x=3$ فما قيمة $a\,,b$ ؟

The function $f(x)=ax^3-bx^2-9x+15$ has a local maximum at $x=1$, and a local minimum at $x=3$, find a and b ?

Jalshobaki.com

س6) $f(x)=x^3+cx+1$ حيث (c) ثابت، ما عدد القيم القصوى المحلية الموجودة وما أنواعها؟

$f(x)=x^3+cx+1$, where c is constant. How many and what types of local extrema are there? (Your answer will depend on the value of c)

(إرشاد: ستعتمد إجابتك على قيمة c)

س7) س10) إذا كان $f(2)=8$ ، $\bar{f}(2)=0$ ، $\bar{\bar{f}}(2)=-5$ ، فهل للدالة (f) قيمة عظمى وما هي؟

If $f(2)=8$, $\bar{f}(2)=0$, $\bar{\bar{f}}(2)=-5$, does the function (f) have a maximum value and what is it?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س8) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في الفترة $[a\,,b]$ وكان $\bar{f}(a) < 0 < \bar{f}(b)$. أثبت أنَّ هناك قيمة لـِ c تحقّق $a < c < b$ بحيث $\bar{f}(c) = 0$ ؟ (إرشاد: استخدم نظرية القيمة المتوسطة ونظرية فيرمات)

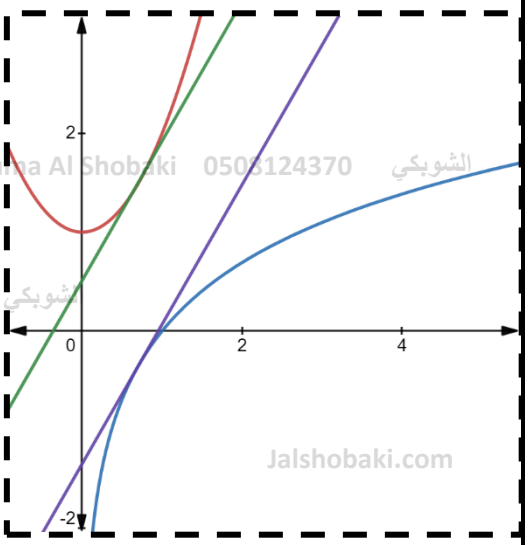
If f is differentiable on the interval $[a, b]$ and $\bar{f}(a) < 0 < \bar{f}(b)$, prove that there is a c with $a < c < b$ for which $\bar{f}(c) = 0$. (Hint: Use the Extreme Value Theorem and Fermat's Theorem)

Jalshobaki.com

س9) أرسم تمثيلاً بيانياً يوضّح أنَّ $\begin{cases} y = f(x) = x^2 + 1 \\ y = g(x) = \ln x \end{cases}$ لا يتقاطعان، ثمَّ جد (x) التي تحقّق القيمة الصغرى لـِ $f(x) - g(x)$. عند هذه القيمة لـِ (x) وضّح أنَّ المماسّان على $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ أنَّهما متوازيان

وضّح بيانياً لماذا يعد من المنطقي أن يكون المماسّان متوازيان؟

Sketch a graph showing that $\begin{cases} y = f(x) = x^2 + 1 \\ y = g(x) = ln\, x \end{cases}$ do not intersect. Find x to minimize $f(x) - g(x)$. At this value of x, show that the tangent lines to $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ are parallel. Explain graphically why it makes sense that the tangent lines are parallel?

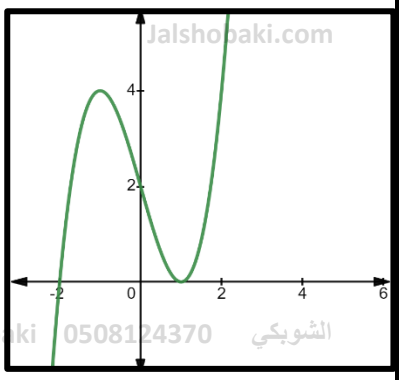


من تمارين الدرس (4-4)

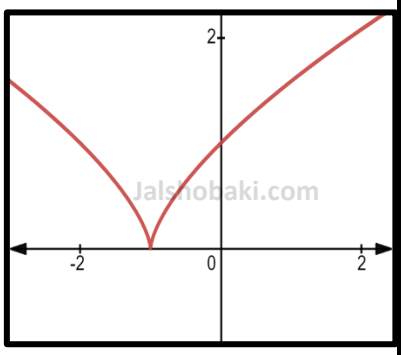
س1) جد يدوياً الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة، استخدم هذه المعلومات في تحديد جميع القيم القصوى المحلية وارسم الدالة إن أمكن؟

Find (by hand) the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema and sketch a graph?

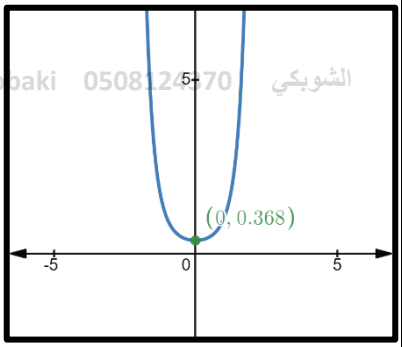
A) $y = x^3 - 3x + 2$



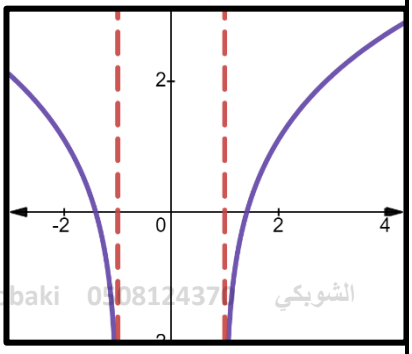
B) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$



C) $y = e^{x^2-1}$



D) $y = \ln(x^2 - 1)$



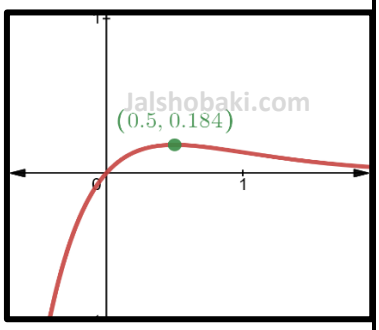
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س2) جد جميع الأعداد الحرجة واستخدم اختبار المشتقة الأولى لتصنيف كل واحدة على أنَّها عظمى أو صغرى محلية أو غير ذلك؟

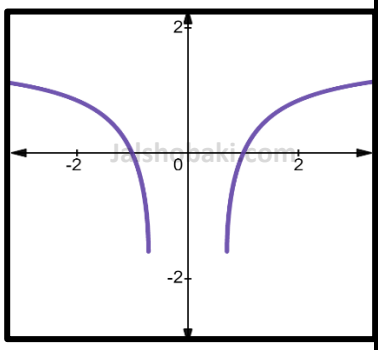
Find (by hand) all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither?

A) $y = x\,e^{-2x}$

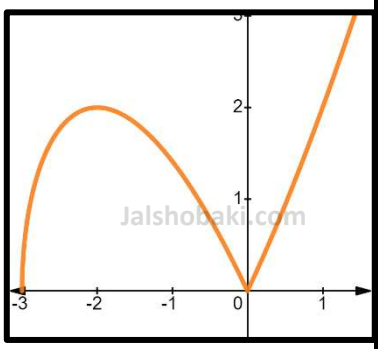
Jalshobaki.com



B) $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$



C) $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$



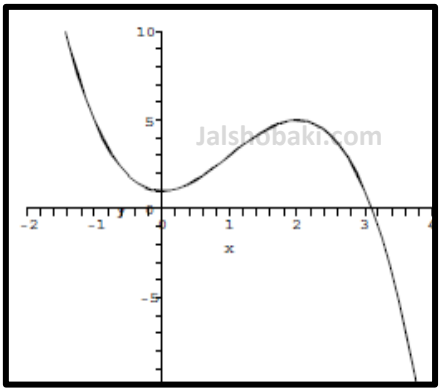
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

Sketch a graph of a function with the given properties: **س3) أرسم تمثيلاً بيانياً للدالة بالخصائص التالية:**

A) $f(0)=1$, $f(2)=5$

$\bar{f}(x)<0$ لكل $\begin{cases} x<0 \\ x>2 \end{cases}$

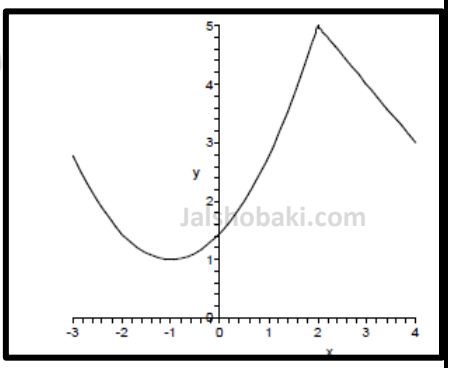
$\bar{f}(x)>0$ لكل $0<x<2$



B) $f(-1)=1$, $f(2)=5$, $\bar{f}(-1)=0$, $\bar{f}(2)=$ غير موجودة

$\bar{f}(x)<0$ لكل $\begin{cases} x<-1 \\ x>2 \end{cases}$

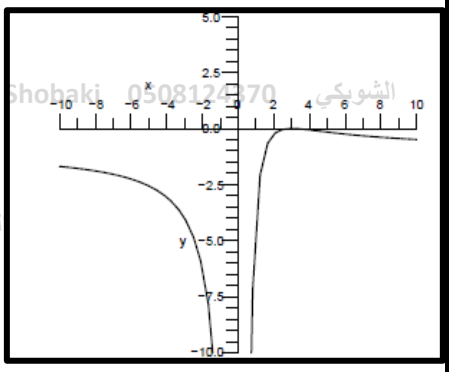
$\bar{f}(x)>0$ لكل $-1<x<2$



C) $f(3)=0$, $f(0)$ غير معرَّفة , $\bar{f}(3)=0$, $\bar{f}(0)$ غير موجودة

$\bar{f}(x)<0$ لكل $\begin{cases} x<0 \\ x>3 \end{cases}$

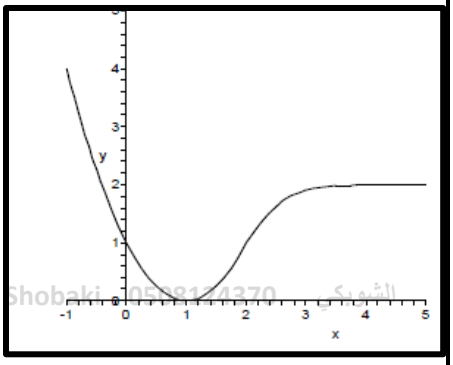
$\bar{f}(x)>0$ لكل $0<x<3$



D) $f(1)=0$, $\bar{f}(1)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$

$\bar{f}(x)<0$ لكل $x<1$

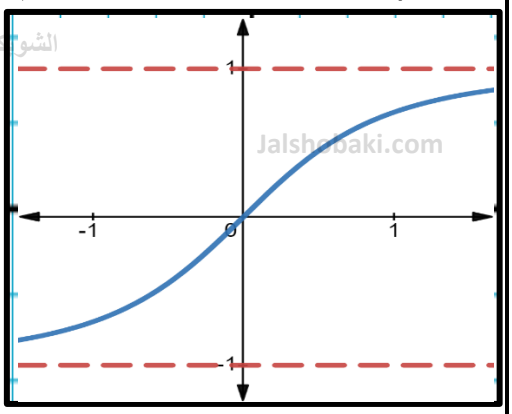
$\bar{f}(x)>0$ لكل $x>1$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س4) جد يدوياً كافَّة خطوط التَّقارب والقيم القصوى ثمَّ ارسم Find (by hand) all asymptotes and extrema, and sketch a graph

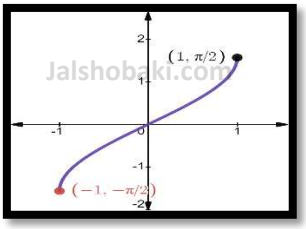
$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$



Jalshobaki.com

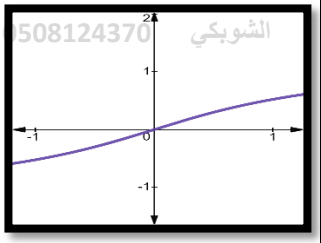
س5) أذكر مجال الدالة $\sin^{-1} x$ ، وحدّد أين تكون متزايدة أم متناقصة؟

State the domain for $\sin^{-1} x$ and determine where it is increasing and decreasing?



س6) أذكر مجال $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1} x\right)$ ، وحدّد أين تكون متزايدة أم متناقصة؟

State the domain for $sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}tan^{-1} x\right)$ and determine where it is increasing and decreasing?



س7) على فرض أنَّ f و g دالتان قابلتان للتفاضل (الاشتقاق) وأنَّ $x = c$ عدد حرج للدالتين. أثبت أنَّ تركيب الدالة $f \circ g$ يوجد به كذلك عدد حرج عند $x = c$ ؟

Suppose that f and g are differentiable functions and $x = c$ is a critical number of both functions. prove that the composition $f \circ g$ also has a critical number at $x = c$?

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

من تمارين الدرس (5-4)

س1) حدّد فترات التقعُّر لأعلى ولأسفل وحدّد نقاط الانعطاف؟

Determine the intervals where the graph of the given function is concave up and concave down, and identify inflection points?

A) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

Jalshobaki.com

B) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

C) $f(x) = xe^{-4x}$

Jalshobaki.com

س2) جد الأعداد الحرجة، واستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية؟

Find all critical numbers and use the Second Derivative Test to determine all local extrema?

A) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

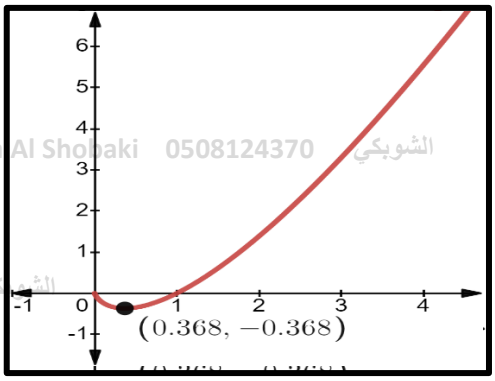
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

B) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com

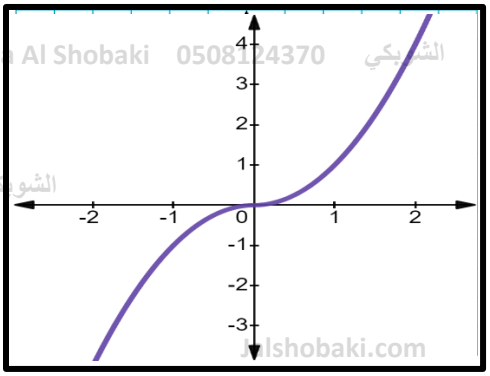
Determine all significant features by hand and sketch a graph? **س3) حدّد جميع المميزات المهمة يدوياً، ثمَّ ارسم تمثيل بياني؟**

A) $f(x) = x \ln x$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com

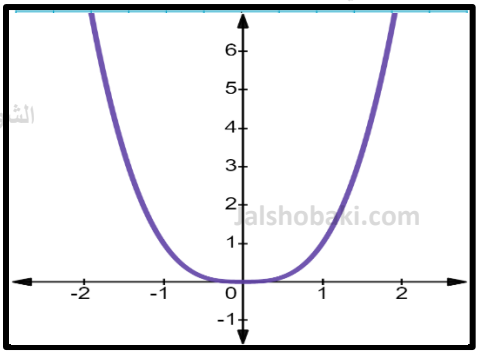
B) $f(x) = x|x|$



Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي
Jalshobaki.com Jalshobaki.com Jalshobaki.com

Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

C) $f(x) = x^2|x|$



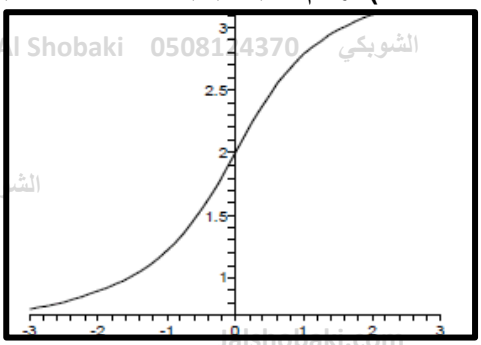
Jalshobaki.com

س4) ارسم تمثيلاً بيانياً بالخصائص التالية:

A) $f(0) = 2$, $\bar{f}(0) = 1$, $\bar{f}(x) > 0$ لكل x

$\bar{\bar{f}}(x) > 0 \ , \forall\, x < 0$

$\bar{\bar{f}}(x) < 0 \ , \forall\, x > 0$

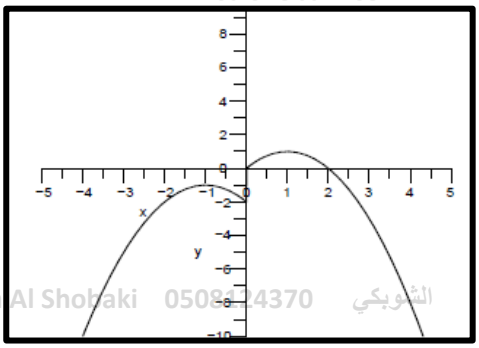


B) $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$ $f(1) = 1$

$\bar{f}(x) > 0$ لكل $x < -1$, $0 < x < 1$

$\bar{f}(x) < 0$ لكل $x > 1$, $-1 < x < 0$

$\bar{\bar{f}}(x) < 0$ لكل $x < 0$, $x > 0$



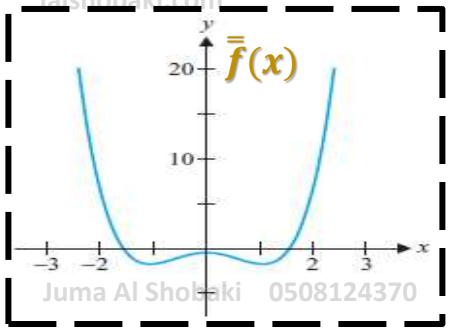
س5) دالتان f و g ، مشتقتان لكل قيم (x) . $f(0) = g(0) = \bar{f}(0) = \bar{g}(0) = 0$ و $\bar{\bar{f}}(0) > 0$ ، $\bar{\bar{g}}(0) < 0$
فاكتب بالتفصيل قدر الإمكان ما يمكن قوله حول ما إذا كانت $f(x) > g(x)$ أم $f(x) < g(x)$ ؟

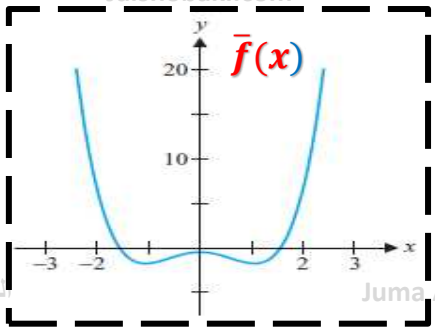
If f and g are functions with two derivatives for all x, $f(0) = g(0) = \bar{f}(0) = \bar{g}(0) = 0$ and $\bar{\bar{f}}(0) > 0$, $\bar{\bar{g}}(0) < 0$. State as completely as possible what can be said about whether $f(x) > g(x)$ or $f(x) < g(x)$?

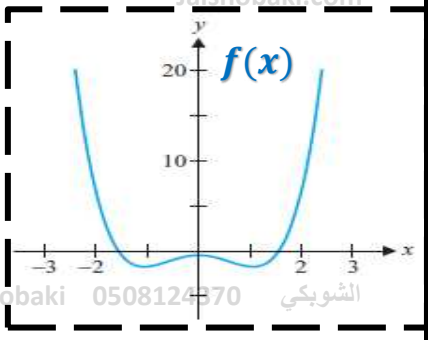
Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

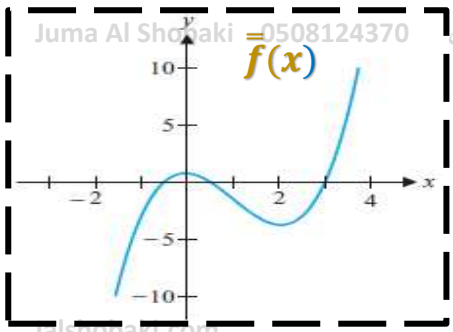
س6) قدّر فترات التزايد والتناقص ومواقع القيم القصوى المحلية وفترات التقعر ونقاط الانعطاف إذا كان:

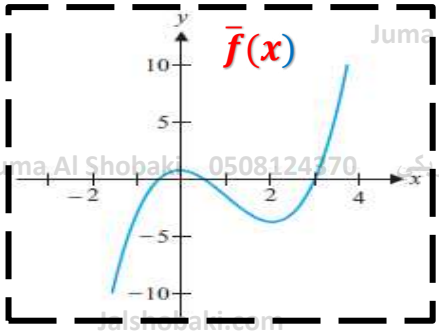
Estimate the intervals of increase and decrease, the locations of local extrema, intervals of concavity and locations of inflection points?

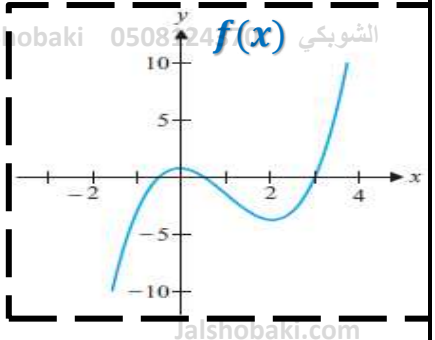








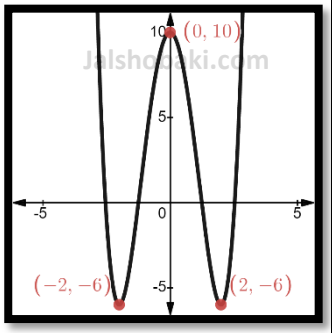




Juma Al Shobaki 0508124370 الشوبكي

س7) وضّح أنَّ الدالة $x^4 - 8x^2 + 10$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 6$ ، واستنتج أنَّ القيمة الصغرى المطلقة لـــِ f هي -6 ، وتقع عند $x = \pm 2$ ؟

Show that the function $x^4 - 8x^2 + 10$ can be written as $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 6$. Conclude that the absolute minimum of f is -6, occurring at $x = \pm 2$?



Jalshobaki.com

س8) استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد النقاط التي يكون عندها لمنحنى f :

A) عظمى محلية B) صغرى محلية C) نقاط انقلاب؟ $\bar{y} = (x-1)^2(x-2)$

Use the derivative of the function $y = f(x)$ to find the points at which the curve of f has:

A) Local Maximum B) Local Minimum C) Infliction Points $\bar{y} = (x-1)^2(x-2)$

س9) إذا كان لمنحنى الدالة $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ صغرى محلية عند $x = 4$ ونقطة انقلاب عند $x = 1$ ، فجد عندها a, b

If the function curve $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ has a local minimum at $x = 4$ and an inflection point at $x = 1$, then find a, b ?