حل نموذج أسئلة امتحان وفق الهيكل الوزاري

موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني ⇦ الملف

Alpha
Education Center

الإمـــارات
THE EMIRATES

هيكل

مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثاني

2023/2022

اسم الطالب : ....

المدرســـة : ....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

Khateebacademy.com

Academic Year العام الدراسي	2022/2023
Term الفصل	3
Subject المادة	Mathematics/Bridge الرياضيات/ بريدج
Grade الصف	11
Stream المسار	Advanced المتقدم
Number of Main Questions عدد الأسئلة الأساسية	Part (1) - 10 Part (2) - 12 Part (3) - 3
Marks per Main Question الدرجات لكل سؤال أساسي	Part (1) - 3 Part (2) - (4-5) Part (3) - (6-7)
****Number of Bonus Questions عدد الأسئلة الإضافية	2
Marks per Bonus Question الدرجات لكل سؤال إضافي	6
*** Type of All Questions نوع كافة الأسئلة	Part(1 and 2) MCQ Part (3) FRQ
* Maximum Overall Grade الدرجة القصوى الممكنة*	110
Exam Duration مدة الامتحان	120 minutes
Mode of Implementation طريقة التطبيق	SwiftAssess & Paper-Based
Calculator الآلة الحاسبة	Allowed مسموحة

	Question** السؤال**	Learning Outcome*** ناتج التعلم***	Reference(s) in the Student Book (Arabic Version) المرجع في كتاب الطالب (النسخة العربية) Example/Exercise مثال/تمرين	Page الصفحة
Main Questions الأسئلة الأساسية Part 1	1	Find the critical points of a given function إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة	Exercises (3-6)	P258
	2	Find the critical points of a given function إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة	Exercises (7-22)	P258
	3	Find the critical points of a given function إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة	Exercises (7-22)	P258
	4	Determine the concavity of a function using the first and second derivatives تحديد فترات التقعر إلى أعلى وإلى أسفل لدالة معطاة باستخدام المشتقتين الأولى والثانية	Exercises (9-14)	P276
	5	Sketch the graph of a given function using its properties and its first and second derivative تمثيل الدوال بيانيا اعتمادا على خواصها والمشتقتين الأولى والثانية	Exercises (11-21)	P286
	6	Sketch the graph of a given function using its properties and its first and second derivative تمثيل الدوال بيانيا اعتمادا على خواصها والمشتقتين الأولى والثانية	Exercises (1-10)	P286
	7	Find the antiderivative of a given function إيجاد عكس المشتقة لدالة معطاة	Exercises (5-20)	P329
	8	Find the antiderivative of a given function إيجاد عكس المشتقة لدالة معطاة	Exercises (5-20)	P329
	9	Find the antiderivative of a given function إيجاد عكس المشتقة لدالة معطاة	Exercises (21-29)	P329
	10	Learn the properties of definite integrals التعرف على خصائص التكامل المحدود	Exercises (9-14)	P356
Part 2	11	Find the critical points of a given function إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة	Exercises (3-6)	P258
	12	Find the absolute extrema of a given function إيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة معطاة	Exercises (7-12)	P258
	13	Identify increasing and decreasing functions التعرف على مفهومي الدالة المتناقصة والدالة المتزايدة	Exercises (11-20)	P267
	14	Learn the notion of an inflection Point and find one التعريف على مفهوم نقطة الانعطاف وإيجادها	Exercises (1-8)	P276
	15	Use the sigma notation to compute basic summation استخدام رمز المجموع سيجما لإيجاد المجاميع البسيطة	Exercises (19-22)	P337
	16	Estimate the area under a curve on a given interval using rectangles تقدير المساحة تحت المنحنى لدالة في فترة محددة باستخدام المستطيلات	Exercises (15-18)	P345
	17	Understand the notion of a definite integral التعرف على مفهوم التكامل المحدود	Exercises (15-20)	P356
	18	Apply the Integral Mean Value Theorem تطبيق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل	Exercises (29-34)	P356
	19	Learn the properties of definite integrals التعرف على خصائص التكامل المحدود	Exercises (37-38)	P356
	20	Learn the Fundamental Theorem of Calculus (Part I) and use it to compute various definite integrals التعرف على النظرية الأساسية الأولى للتفاضل والتكامل وتطبيقها على دوال متنوعة لإيجاد تكاملات محدودة	Exercises (5-18)	P366
	21	Compute integrals using substitution استخدام طريقة التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات	Exercises (5-14)	P376
	22	Compute integrals using substitution استخدام طريقة التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات	Exercises (17-26)	P376
Part 3	23	Solve mathematical and real-life optimization problems حل مسائل رياضية وحياتية على القيم القصوى لإيجاد القيم المثلى	Exercises (1-7)	P296
	24	Understand the notion of indefinite integral as an finding an antiderivative التعرف على مفهوم التكامل غير المحدود بوصفه عكس المشتقة	Exercises (45-49)	P330
	25	Solve mathematical and real-life problems on related rates حل مسائل رياضية وحياتية على المعدلات المرتبطة	Exercises (19-26)	P304
Bonus Questions الأسئلة الإضافية	26	A learning outcome from the SoW ناتج من الخطة الفصلية	Undisclosed غير معلن	Undisclosed غير معلن
	27	A learning outcome from the SoW ناتج من الخطة الفصلية	Undisclosed غير معلن	Undisclosed غير معلن

* While the overall number of marks is 110, the student's final grade will be out of 100.
Example: if a student scores 75 on the exam, the mark will be 75 and if (s)he scores 107, it will be reported as 100 (maximum possible grade).

* مع أن مجموع العلامات الكاملة هو 110، فإن درجة الطالب(ة) النهائية تحتسب من 100.
مثال: إذا كانت درجة الامتحان 75 ستبقى كما هي بينما إذا كانت درجة الامتحان 107 ستكون الدرجة 100 (الدرجة القصوى الممكنة).

** Questions might appear in a different order in the actual exam, and bonus questions will be clearly marked on the system (or on the exam paper in the case of G3 and G4).

** قد تظهر الأسئلة بترتيب مختلف في الامتحان الفعلي، وسيتم تحديد الأسئلة الإضافية بشكل واضح على النظام (أو على ورقة الامتحان في حالة الصفين G3 وG4).

*** As it appears in the textbook, LMS, and scheme of work (SoW).

*** كما وردت في كتاب الطالب وLMS والخطة الفصلية.

**** The 2 bonus questions will target LOs from the SoW. These LOs can be within the ones used for the main questions or any other ones listed in the SoW.

**** ستستهدف الأسئلة الإضافية نواتج التعلم من الخطة الدراسية. يمكن أن تكون النواتج التعليمية هذه ضمن تلك المستخدمة للأسئلة الرئيسية أو أي أسئلة أخرى مدرجة في الخطة الدرسية.

تمارين [3-22] صفحة 258 من الكتاب **عدد الأسئلة في الامتحان 5**

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

ممكن استخدام اختبار المشتقة الأولى او اختبار المشتقة

(1) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

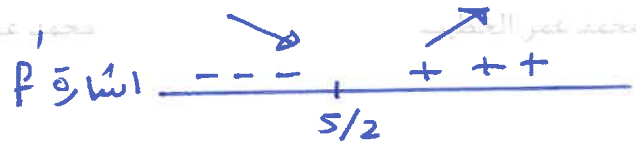
$f'(x) = 2x + 5$

$f'(x) = 0.$

$2x + 5 = 0$

$x = -5/2$

العدد الحرج هو $x = -5/2$



للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{5}{2}$

وهذا قطع مكافئ مفتوح للاعلى.

---

(2) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

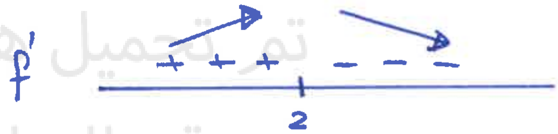
$f'(x) = -2x + 4.$

$f'(x) = 0$

$-2x + 4 = 0$

$x = 2$

العدد الحرج هو $x = 2$



للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

وهذا قطع مكافئ مفتوح للاسفل

---

(3) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3.$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = -1, 1$

الاعداد الحرجة هي $x = -1, 1$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -1$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$

---

(4) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$

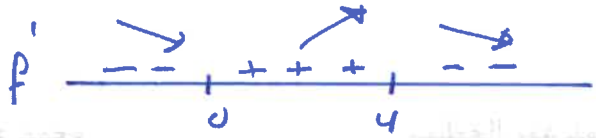
$f'(x) = -3x^2 + 12x.$

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 12x = 0$

$x = 0, x = 4$

الاعداد الحرجة هي $x = 0, 4$



قيمة صغرى محلية عند $x = 0$

قيمة عظمى محلية عند $x = 4$

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x)=x^3-3x^2+6x$

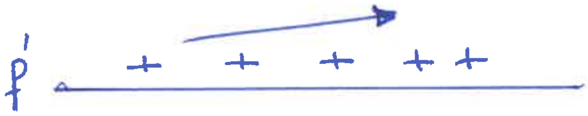
$f'(x) = 3x^2-6x+6$

$f'(x) = 0$

$3x^2-6x+6$

$x = 1\pm i$

لايوجد اعداد حرجة



لا يوجد قيم قصوى محلية للدالة:

الدالة متزايدة على $(-\infty,\infty)$

(2) $f(x)=-x^3+3x^2-3x$

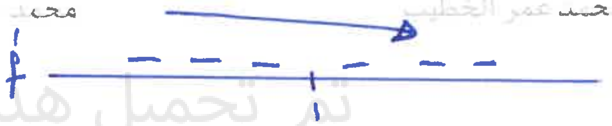
$f'(x) = -3x^2+6x-3$

$f'(x) = 0$

$-3x^2+6x-3=0$

$x = 1$

العدد الحرج هو $x=1$



ليس للدالة قيم قصوى محلية عند $x=1$

وانما مماس افقي.

(3) $f(x)=x^4-2x^2+1$

$f'(x) = 4x^3-4x$

$f'(x) = 0$

$4x^3-4x=0$

$x = 0$, $x=-1$ و 1

الاعداد الحرجة هي $x=0, \pm1$

قيمة صغرى محلية عند $x=-1$ و 1

قيمة عظمى محلية عند $x=0$.

(4) $f(x)=x^4-3x^3+2$

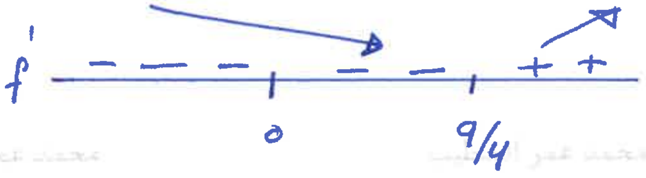
$f'(x) = 4x^3-9x^2$

$f'(x) = 0$

$4x^3-9x^2=0$

$x=0$, $x=\frac{9}{4}$

الاعداد الحرجة هي $x=0, \frac{9}{4}$.



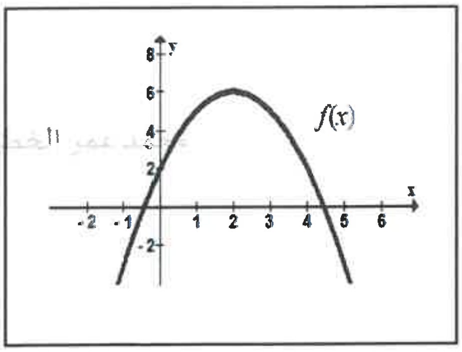
قيمة صغرى محلية عند $x=\frac{9}{4}$

ليس للدالة قيم قصوى محلية عند $X=0$

وانما مماس افقي

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

اولاً:

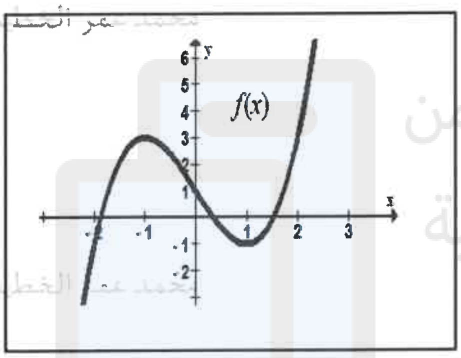


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .... $x = 2$ ....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .... 6 عند $x=2$

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ لا يوجد

ثانياً:

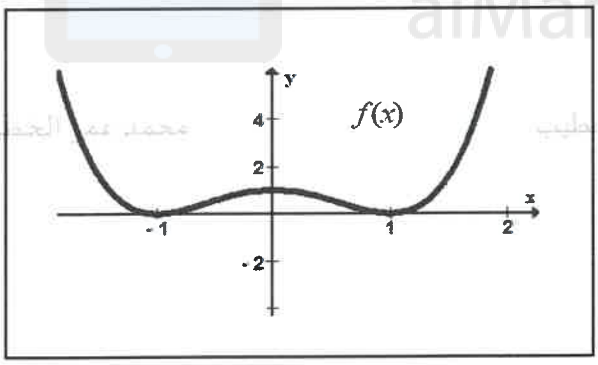


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .... $x = -١ , ١$

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .... 3 عند $x=-١$

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ -١ عند $x=١$

ثالثاً:

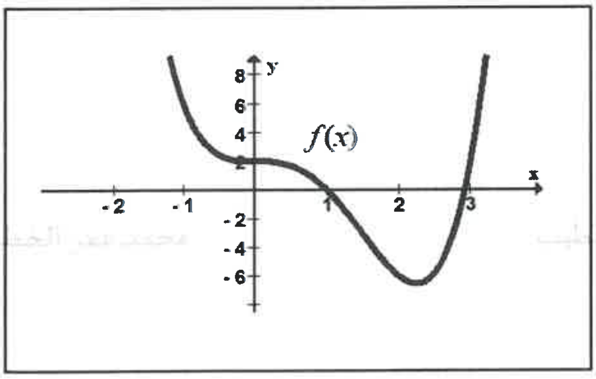


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .... $x = -١ , ٠ , ١$

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .... ١ عند $x=٠$

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ ٠ عند $X=\pm 1$

رابعاً:



(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .... $x = ٠ , 2$

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .... لا يوجد

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت)........ 6 عند $X=2$

وهي مطلقة.

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

ممكن استخدام اختبار المشتقة الأولى او المشتقة الثانية او **ممكن استخدام برنامج الرسم Desmos**

(1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2.$

$f'(x) = 0$

$4x^3 - 9x^2 = 0$

$x = 0, \frac{9}{4}$

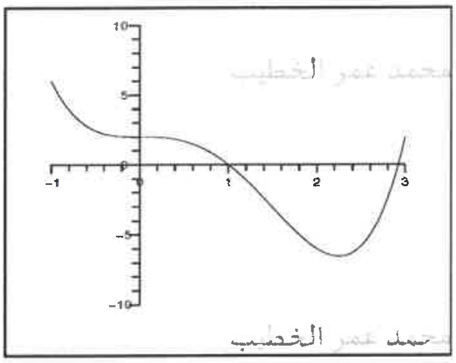
الاعداد الحرجة هي $x = 0, \frac{9}{4}.$

من الرسم

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = \frac{9}{4}$

وهي صغرى مطلقة.

ليس للدالة اي قيم قصوى عند $x=0$



(2) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$

$f'(x) = 4x^3 + 12x$

$f'(x) = 0$

$4x^3 + 12x = 0$

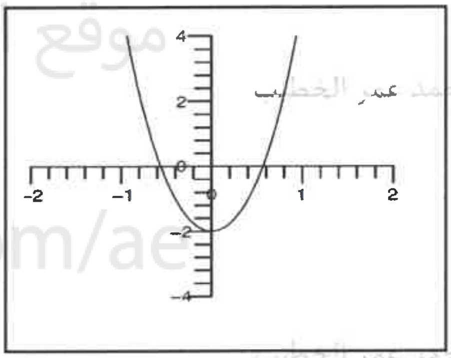
$x = 0$

العدد الحرج هو $x = 0$

من الرسم

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=0$

وهي صغرى مطلقة.



(3) $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$

$D = [0, \infty)$. م

$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4} - x^{-3/4}.$

$= x^{-3/4}\left(\frac{3}{4}x^{1/2} - 4\right)$

$= x^{-3/4}\left(\frac{3\sqrt{x} - 4}{4}\right)$

$= \frac{3\sqrt{x} - 4}{4x^{3/4}}.$

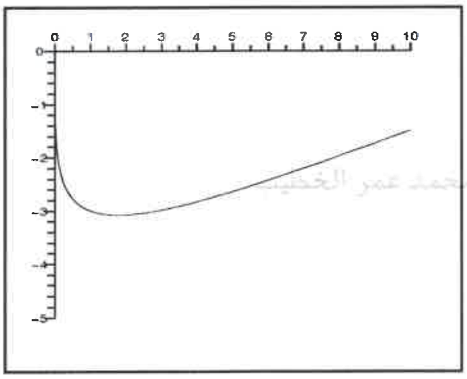
$f'(x) = 0 \rightarrow 3\sqrt{x} - 4 = 0$

$3\sqrt{x} = 4.$

$\sqrt{x} = 4/3 \rightarrow x = 16/9.$

f' غ.م $\rightarrow x = 0$

الاعداد الحرجة هي $x = 0, \frac{16}{9}.$

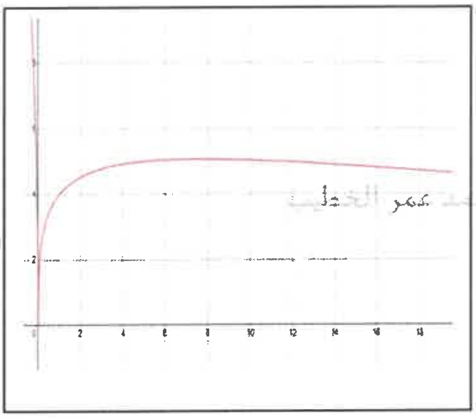


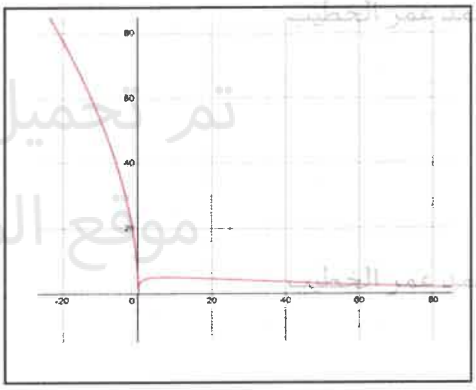
من الرسم للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 0$.

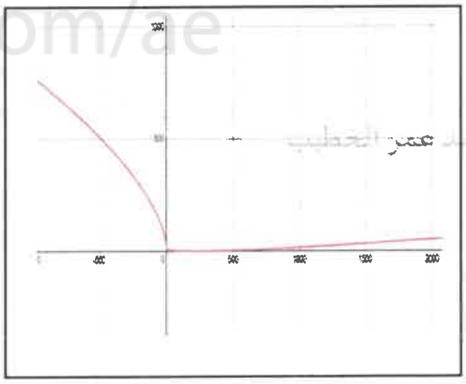
وقيمة صغرى محلية عند $x = \frac{16}{9}$

اوجد الأعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

$f(x) = (x^{2/5} - 3x^{1/5})^2$







$D = (-\infty, \infty)$.

$f'(x) = 2(x^{2/5} - 3x^{1/5})\left(\frac{2}{5}x^{-3/5} - \frac{3}{5}x^{-4/5}\right)$

$= 2x^{1/5}(x^{1/5} - 3)\,\frac{1}{5}x^{-4/5}(2x^{1/5} - 3)$

$= \frac{2}{5}x^{-3/4}(x^{1/5} - 3)(2x^{1/5} - 3)$

$= \frac{2(x^{1/5} - 3)(2x^{1/5} - 3)}{5x^{3/4}}$

$f'(x) = 0$

(1) $x^{1/5} - 3 = 0$

$x^{1/5} = 3 \rightarrow x = 3^5 = 243.$

(2) $2x^{1/5} - 3 = 0 \rightarrow x^{1/5} = \frac{3}{2}$

$x = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x^{3/4} = 0 \rightarrow x = 0$

الاعداد الحرجة هي

$x = 0, \left(\frac{3}{2}\right)^5, 3^5$

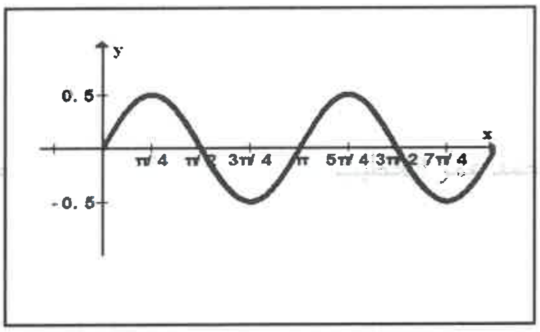
f' : $- -$ | 0 | $+ + +$ | $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ | $- - -$ | 3^5 | $+ +$

قيمة صغرى محلية عند $x = 0, x = 3^5$

قيمة عظمى محلية عند $x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صفرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x) = \sin x \cos x \qquad [0, 2\pi]$



$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$f'(x) = 0$

$\sin^2 x = \cos^2 x$

$\sin x = \cos x \quad , \quad \sin x = -\cos x$

$\tan x = 1 \qquad \tan x = -1$

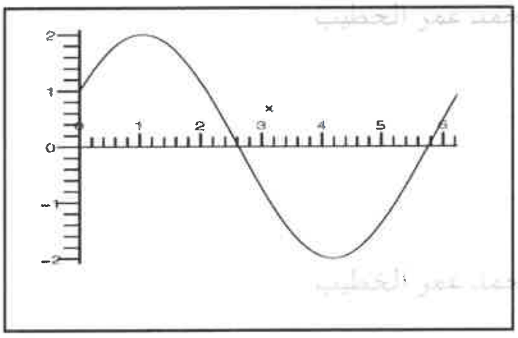
$x \begin{cases} Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ \pi/4 \\ Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad x \begin{cases} Q_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} \\ \pi/4 \\ Q_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ الاعداد الحرجة هي

عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, صغرى محلية عند $\frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ انظر مختلفة.

---

(2) $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$



$f'(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x.$

$f'(x) = 0$

$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$

$\sin x = \sqrt{3} \cos x$

$\tan x = \sqrt{3}$

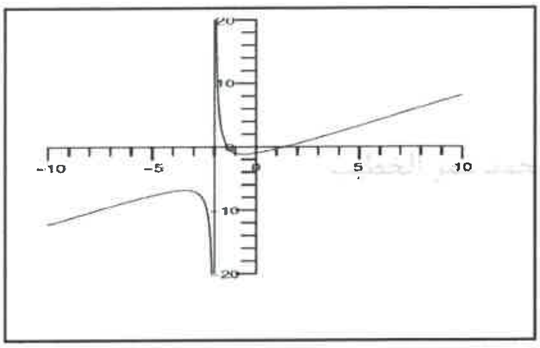
$x \begin{cases} Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ \pi/3 \\ Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}. \end{cases} \Bigg\}$ الفرق بينهم π.

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$ الاعداد الحرجة هي

عظمى محلية عند $x = \frac{\pi}{3} \pm k\pi$ حيث k عدد زوجي , صغرى عندما k عدد فردي

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+2}$



$D = R/\{-2\}.$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1(x^2-2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}.$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2+4x+2=0$

$x = -2\pm\sqrt{2}.$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x+2=0$

$x=-2$

خارج المجال

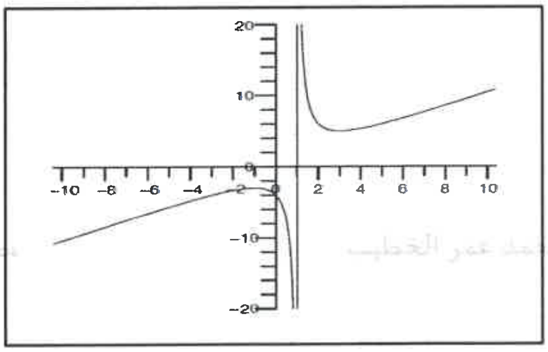
الاعداد الحرجة هي $x=-2\pm\sqrt{2}$

من الرسم:

عظمى محلية عند $x=-2-\sqrt{2}$

صغرى محلية عند $x=-2+\sqrt{2}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$



$D = R|\{1\}.$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(1) - (x^2-x+4)(1)}{(x-1)^2}.$$

$$= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$x=-1 , 3.$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x=1$

خارج المجال.

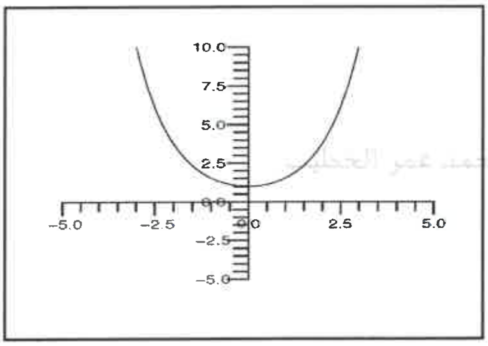
الاعداد الحرجة هي $x=-1, 3$

صغرى محلية عند $x=3$

عظمى محلية عند $x=-1$

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$



$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}(-1))$

$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$= \frac{1}{2} e^{-x}(e^{2x} - 1)$

$= \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}.$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^{2x}-1=0$

$e^{2x}=1$

$\ln e^{2x} = \ln 1$

$2x = 0 \rightarrow x = 0$

$f'(x)$ م.غ $\rightarrow e^{x}=0$

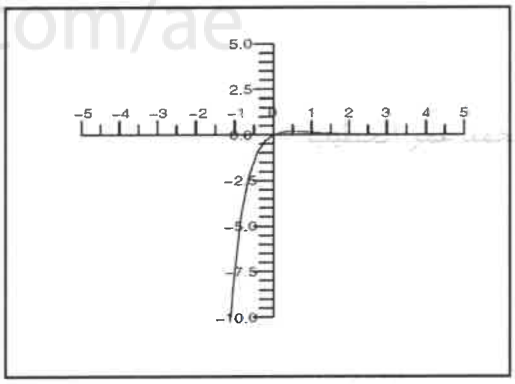
لا يوجد حل

الاعداد الحرجة $x = 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ وهي صغرى مطلقة.

---

(2) $f(x)=x e^{-2x}$



$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x}(-2)$

$= e^{-2x}(1-2x)$

$= \frac{1-2x}{e^{2x}}.$

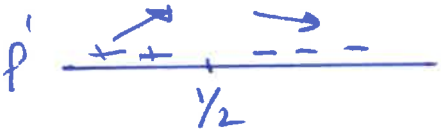
$f'(x) = 0 \rightarrow 1-2x=0$

$x = 1/2$

$f'(x)$ م.غ $\rightarrow e^{2x}=0$

لايوجد حل

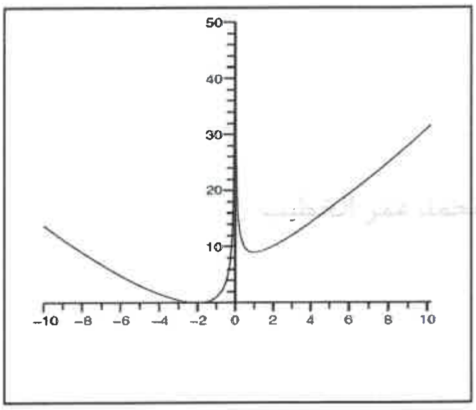
العدد الحرج $x = 1/2.$



للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 1/2.$

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}+4x^{-2/3}$



$D = R | \{0\}$.

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{8}{3}x^{-5/3}$.

$= \frac{4}{3}x^{-5/3}\left[x^2+x-2\right]$

$= \frac{4(x^2+x-2)}{3x^{5/3}}$.

$f'(x)=0 \rightarrow x^2+x-2=0$

$x=-2,\ x=1$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x=0$

خارج المجال

الاعداد الحرجة ه $x=-2, 1$

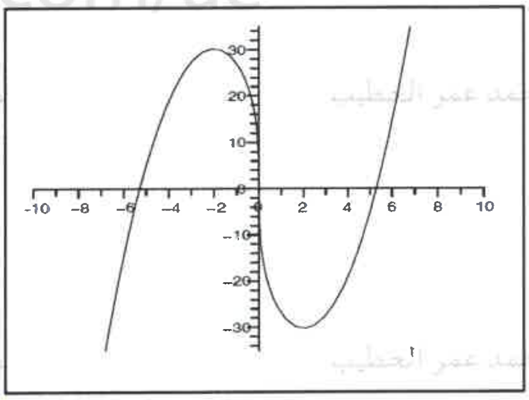
$- -$ ↘		$+ +$ ↗	×	$- -$ ↘		$+ +$ ↗
	-2		0		1	

صغرى محلية عند $x=-2, 1$

ليس للدالة قيم قصوى عند $x=0$

---

(2) $f(x)=x^{7/3}-28x^{1/3}$



$f'(x) = \frac{7}{3}x^{4/3} - \frac{28}{3}x^{-2/3}$.

$= \frac{7}{3}x^{-2/3}(x^2-4)$

$= \frac{7(x^2-4)}{3x^{2/3}}$.

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-4=0$

$x=\pm 2$.

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x=0$

الاعداد الحرجة.

$x=-2, 0, 2$

$+ +$ ↗		$- -$ ↘		$- -$		$+ +$ ↗
	-2		0		2	

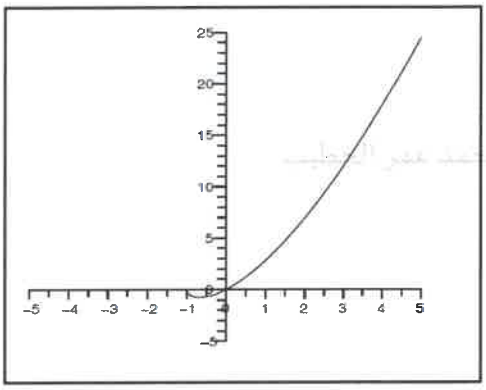
عظمى محلية عند $x=-2$

صغرى محلية عند $x=2$

ليس للدالة قيم قصوى عند $x=0$

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$



$D = [-1, \infty)$

$f'(x) = 2\sqrt{x+1} + \cancel{2}x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}}$

$= \frac{2(x+1) + x}{\sqrt{x+1}}$

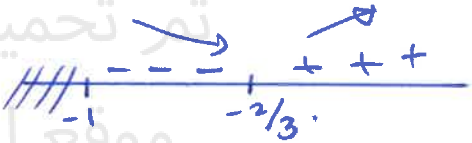
$= \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x+2 = 0$

$x = -2/3 .$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = -1$

الاعداد الحرجة هي -1 ، $x = -\frac{2}{3}$

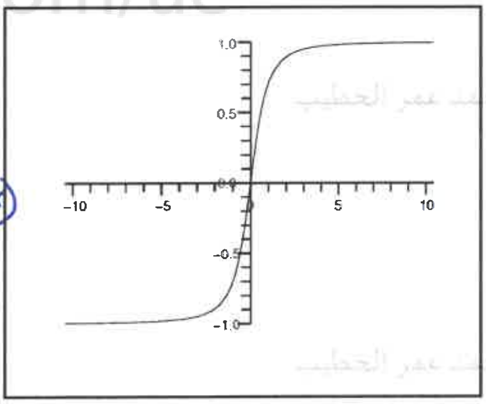


عظمى محلية عند $x = -1$

صغرى محلية عند $x = -2/3$.

---

(2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x(x^2+1)^{-1/2}.$



$f'(x) = 1 \cdot (x^2+1)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-3/2}(2x)$

$= (x^2+1)^{-3/2}\left[(x^2+1) - x^2\right].$

$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} .$

$f'(x) = 0$ لايوجد حل.

$f'(x)$ غ.م $x^2+1 = 0$

لايوجد حل

لايوجد اعداد حرجة

f' + + + +

لايوجد قيم قصوى محلية .

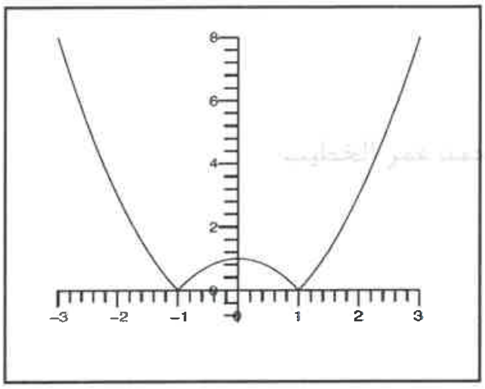
الدالة متزايدة على R .

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $f(x)=\left|x^2-1\right|$

$x^2-1=0$

$x=\pm 1$



f: x^2-1 | -1 | $1-x^2$ | 1 | x^2-1

f': $2x$ | -1 | $-2x$ | 1 | $2x$.

$f'=0$ $\quad 2x=0$, $x=0$ ✗ $\quad -2x=0$, $x=0$ ✓ $\quad 2x=0$, $x=0$ ✗

f' غ.م $\quad x=-1, 1.$

الاعداد الحرجة هي $-1, 0, 1$

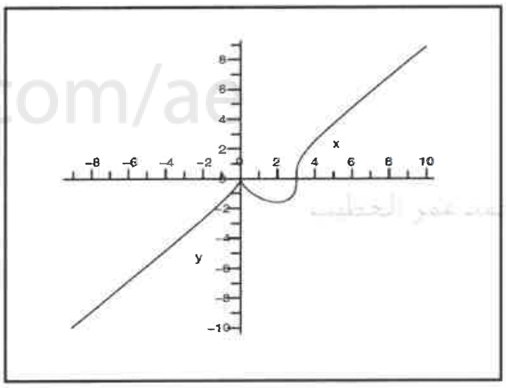
إشارة f': $--$ | -1 | $++$ | 0 | $--$ | 1 | $+$

صغرى محلية عند $x=\pm 1$

عظمى محلية عند $x=0$

---

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}=\left(x^3-3x^2\right)^{1/3}.$



$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-3x^2\right)^{-2/3}.\left(3x^2-6x\right)$$

$$=\frac{3x^2-6x}{3\left(x^3-3x^2\right)^{2/3}}.$$

$f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-6x=0$

$x=0,\ x=2.$

$f(x)$ غ.م $\rightarrow x^3-3x^2=0$

$x=0,\ x=3.$

الاعداد الحرجة هي

$x=0,\ 2,\ 3.$

$++$ | 0 | $--$ | 2 | $++$ | 3 | $++$

عظمى محلية عند $x=0,$

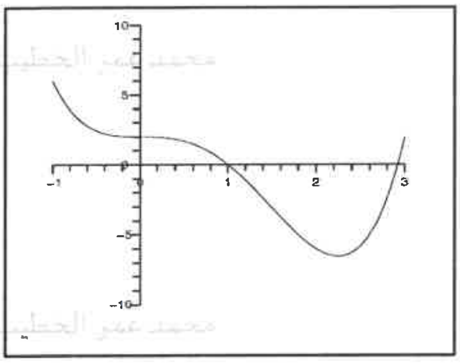
صغرى محلية عند $x=2$

ليس للدالة قيم قصوى محلية عند $x=3$

وانما مماس رأسي.

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

(1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$



(أ) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) هي .... لا يوجد

(ب) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) هي .... عند $x = \frac{9}{4}$.

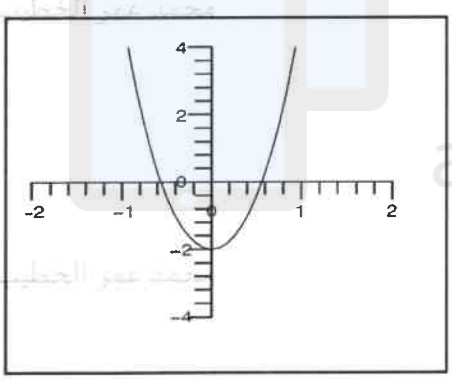
$f'(x) = 4x^3 - 9x^2.$

$f'(x) = 0$

$x = 0,\ x = \frac{9}{4}.$

---

(2) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 2$



(أ) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) هي .... لا يوجد

(ب) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) هي .... عند $x = 0$

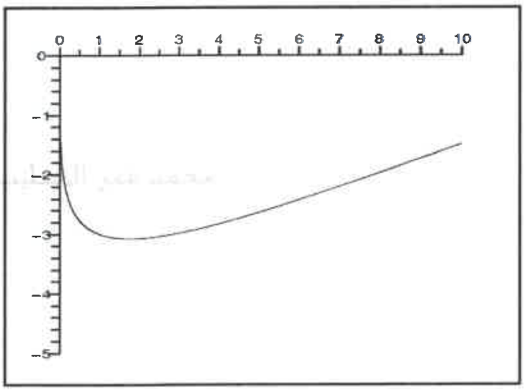
$f'(x) = 4x^3 + 8x.$

$f'(x) = 0$

$x = 0$

---

(3) $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$



(أ) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) هي .... لا يوجد

(ب) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) هي .... عند $x = \frac{16}{9}$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4} - x^{-3/4}.$

$= \frac{3}{4}x^{-3/4}\left(x^{2/4} - \frac{4}{3}\right)$

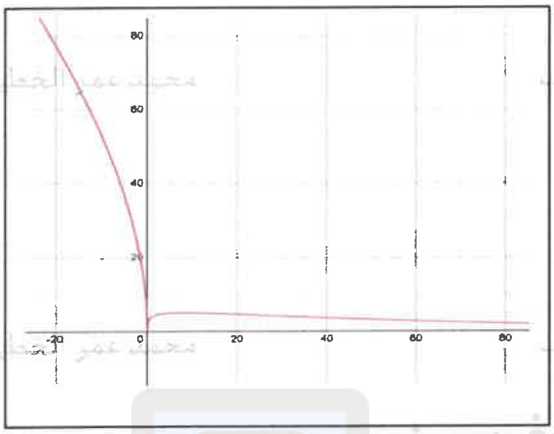
$= \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{x} - \frac{4}{3}}{x^{3/4}}$

$f' = 0 \to x = \frac{16}{9}$

f' م غ $\to x = 0$

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

(1) $f(x) = (x^{2/5} - 3x^{1/5})^2$



(أ) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) هي ....عند $x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

(ب) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) هي ....عند

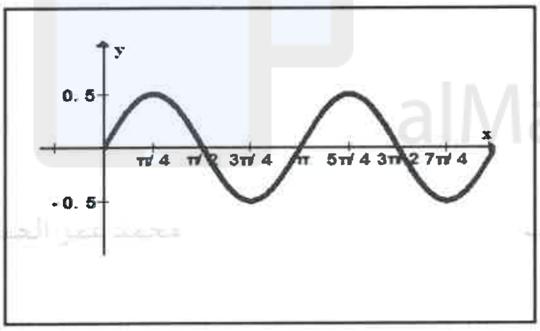
$x = 0 \,,\, x = 3^5$.

"محلول سابقاً".

س^{1} ص^{5}

---

(2) $f(x) = \sin x \cos x \qquad [0, 2\pi]$



(أ) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) هي ....عند $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

(ب) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) هي ....عند

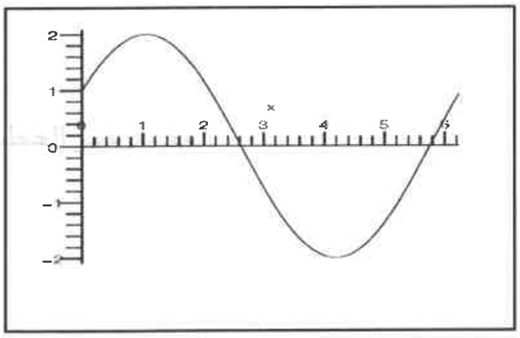
$x = \frac{3\pi}{4} \,,\, x = \frac{7\pi}{4}$.

"محلول سابقاً".

س^{1} ص^{6}.

---

(3) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$



(أ) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) هي ....$x = \frac{\pi}{3} \pm K\pi$

عدد زوجي K

(ب) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) هي ....

$x = \frac{\pi}{3} \pm K\pi$ ،

عدد فردي K

محلول سابقاً

س^{2} ص^{6}

أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة من الدوال التالية على الفترة المعطى

من خارج الهيكل

(1) $f(x)=x^4-3x^3+2 \qquad [-1,3]$

$f'(x)=4x^3-9x^2.$

$f'(x)=0$

$x=0,\quad x=\frac{9}{4}.$

الاعداد الحرجة هي

$x=0,\quad x=\frac{9}{4}$

اختبار القيم

$f(-1)=6$

$f(3)=2$

$f(0)=2$

$f\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{1675}{256}=-6.54.$

عظمى مطلقة 6 عند $x=-1$

صغرى مطلقة -6.54 عند $x=\frac{9}{4}.$

---

(2) $f(x)=x^4+4x^2-2 \qquad [-1,2]$

$f'(x)=4x^3+8x.$

$f'(x)=0$

$x=0$

الاعداد الحرجة

$x=0$

$f(-1)=15$

$f(2)=30$

$f(0)=-2$

عظمى مطلقة 30 عند $x=2$

صغرى مطلقة -2 عند $x=0$

---

(3) $f(x)=x^{3/4}-4x^{1/4} \qquad [0,16]$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^{-1/4}-x^{-3/4}$

$=\frac{3}{4}x^{-3/4}\left(x^{1/2}-\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{x}-4/3.}{x^{3/4}.}$

$f'(x)=0 \rightarrow \sqrt{x}=\frac{4}{3} \rightarrow x=\frac{16}{9}.$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x=0$

الاعداد الحرجة هي

$x=0,\ \frac{16}{9}$

$f(0)=0$

$f(16)=0$

$f\left(\frac{16}{9}\right)=-3.07$

عظمى مطلقة 0 عند $x=0,16$

صغرى مطلقة -3.07 عند $x=\frac{16}{9}.$

من خارج الهيكل

اوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة من الدوال التالية على الفترة المعطى

(1) $f(x)=\frac{\;}{x^2+1}$ $[-3,2]$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \rightarrow x=0$

$f'(x)$ غ.م $x^2+1=0$

لا يوجد حل

الاعداد الحرجة هي $x=0$

$f(0)=1$

$f(-3)=\frac{1}{10}$

$f(2)=\frac{1}{5}$

عظمى مطلقة 1 عند $x=0$

صغرى مطلقة $\frac{1}{10}$ عند $x=-3$

---

(2) $f(x)=\sin x\cos x$ $[0,2\pi]$

محلول سابقاً.

الاعداد الحرجة هي

$x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$

$f(0)=0$

$f(2\pi)=0$

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2}$

عظمى مطلقة

$f(\frac{5\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

$f(\frac{7\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

صغرى مطلقة

---

(3) $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ $[0,2\pi]$

محلول سابقاً.

الاعداد الحرجة هي

$x=\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$f(0)=1$

$f(2\pi)=1$

$f(\frac{\pi}{3})=2$

$f(\frac{4\pi}{3})=-2$

عظمى مطلقة 2 عند $x=\pi/3$

صغرى مطلقة -2 عند $x=\frac{4\pi}{3}$

تمارين [11-20] صفحة 267 من الكتاب عدد الأسئلة في الامتحان 1

اوجد الاعداد الحرجة وحدد اي منها يمثل قيمة عظمى محلية او قيمة صغرى محلية او لا يمثل اياً منها

(1) $y = x^4 + 4x^3 - 2$

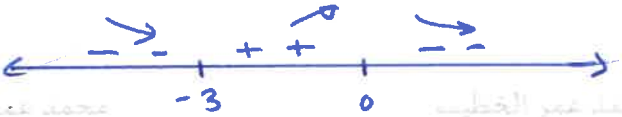
$y' = 4x^3 + 12x^2.$

$y' = 0$

$x = 0 \ , x = -3.$

الاعداد الحرجة هي

$x = 0, \ -3$



قيمة صغرى محلية عند $x = -3$

قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

(2) $y = x^5 - 5x^2 + 1$

$y' = 5x^4 - 10x.$

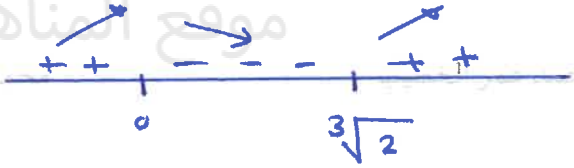
$y' = 0$

$5x(x^3 - 2) = 0$

$x = 0, \quad x = \sqrt[3]{2}.$

الاعداد الحرجة هي

$x = 0, \quad x = \sqrt[3]{2}$



قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

قيمة صغرى محلية عند $x = \sqrt[3]{2}$

(3) $y = xe^{-2x}$

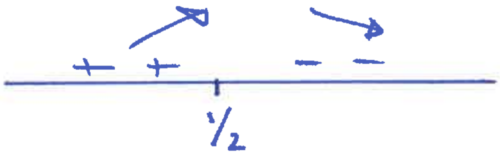
$y' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

$= e^{-2x}(1 - 2x)$

$= \frac{1 - 2x}{e^{2x}}.$

$y' = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

y' غ.م لايوجد حل



قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{1}{2}.$

اوجد القيم القصوى المحلية لكل دالة من الدوال التالية

(1) $y = x^2 e^{-x}$

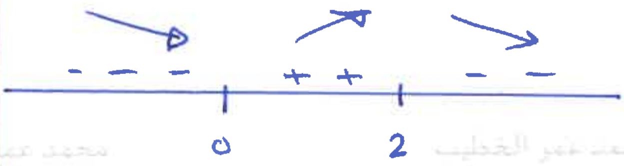
$y' = 2x\,e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(2x - x^2).$

$= \frac{2x - x^2}{e^x}.$

$y' = 0 \rightarrow x = 0, 2$

y' غ.م → لايوجد ص



صغرى محلية عند $x = 0$

عظمى محلية عند $x = 2$

---

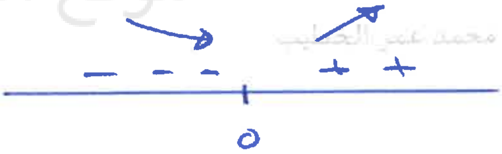
(2) $y = \tan^{-1}(x^2)$

$y' = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x$

$= \frac{2x}{1 + x^4}.$

$y' = 0 \rightarrow x = 0$

y' غ.م لايوجدهـ



صغرى محلية عند $x = 0$

---

(3) $y = \sin^{-1}(1 - \frac{1}{x^2})$

$D = (-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \frac{1}{x^2})^2}} \cdot \frac{2}{x^3}.$

$= \frac{2}{x^3 \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{x^2})^2}}$

$y' = 0 \rightarrow$ لايوجد ص

y' غ.م $\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - (1 - \frac{1}{x^2})^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ هم الاعداد الحرجة

صغرى محلية وهي مطلقة عند $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

اوجد القيم القصوى المحلية لكل دالة من الدوال التالية

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^3}$ $D=R/\{-1\}$

$$y'=\frac{1(1+x^3)-x(3x^2)}{(1+x^3)^2}$$

$$=\frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$

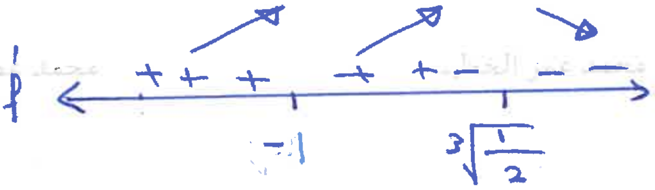
$y'=0 \rightarrow 1-2x^3=0$

$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

y' غ.م $\rightarrow 1+x^3=0$

$x=-1$ خارج المجال

الأعداد الحرجة $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$



قيمة عظمى محلية عند $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

(2) $y=\dfrac{x}{1+x^4}$

$$y'=\frac{(1)(1+x^4)-x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

$$=\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$$

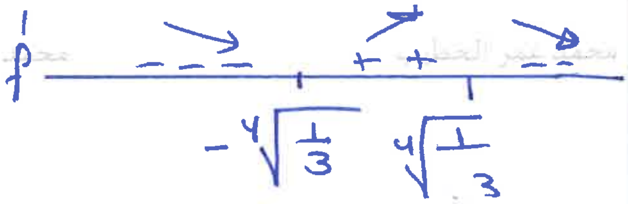
$y'=0 \rightarrow 1-3x^4=0$

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

y' غ.م $\rightarrow 1+x^4=0$

لايوجد حل.

الأعداد الحرجة هي $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$



صغرى محلية عند $x=-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

عظمى محلية عند $x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

اوجد القيم القصوى المحلية لكل دالة من الدوال التالية

(1) $y=\sqrt{x^3+3x^2}$ $= (x^3+3x^2)^{1/3}$

$D = [-3, \infty).$

$y' = \frac{1}{2}(x^3+3x^2)^{-2/3}\cdot(3x^2+6x)$

$= \frac{3x^2+6x}{2(x^3+3x^2)^{1/2}}$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2+6x=0$

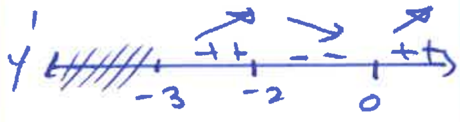
$x=0,\ x=-2$

y' غ.م $\rightarrow x^3+3x^2=0$

$x=0,\ x=-3$

الاعداد الحرجة هي

$x = 0, -2, -3$



صغرى محلية عند

$x = -3$ ، 0

عظمى محلية عند

$x = -2.$

---

(2) $y = x^{4/3}+4x^{1/3}$

$y' = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}$

$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$

$= \frac{4}{3}\frac{x+1}{x^{2/3}}$

$y' = 0 \rightarrow x+1=0$

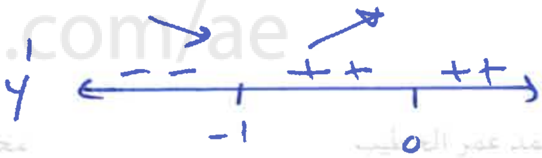
$x=-1$

y' غ.م $\rightarrow x^{2/3}=0$

$x=0$

الاعداد الحرجة هي

$x = -1 , 0$



قيمة صغرى محلية عند $x=-1$

ليس للدالة قيمة قصوى

محلية عند $x=0$

انما مماس رأسي

تمارين [1-14] صفحة 276 من الكتاب　　　　عدد الأسئلة في الامتحان 2

اوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل دالة من الدوال التالية

(1) $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$

$f'(x) = 3x^2-6x+4.$

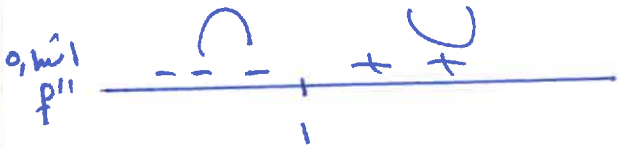
$f''(x) = 6x-6.$

$f''(x) = 0$

$6x-6=0$

$x=1.$

$x=1$ نقاط الشك



فتره التقعر للاسفل $(-\infty,1)$

فتره التقعر للاعلى $(1,\infty)$

نقطه الانعطاف عند $x=1$

وهي $(1,1)$

---

(2) $f(x)=x^4-6x^2+2x+3$

$f'(x) = 4x^3-12x+2.$

$f''(x) = 12x^2-12$

$f''(x) = 0$

$12x^2-12=0$

$x=-1,1$

نقاط الشك

$x=\pm1$

فتره التقعر للاعلى هي

$(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$

فتره التقعر للاسفل هي

$(-1,1)$

نقاط الانعطاف عند

$x=-1,1$

أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل دالة من الدوال التالية

(1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$D = \mathbb{R} | \{0\}.$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$

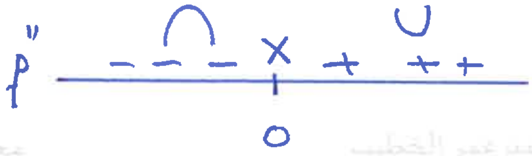
$f''(x) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}.$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ لايوجد حل

$f''(x)$ غ.م $\rightarrow x^3 = 0$

$x = 0$

نقطة الشك $x = 0$ وهي خارج المجال



للاسفل $(-\infty, 0)$

للاعلى $(0, \infty)$

لايوجد نقاط انعطاف.

لان الدالة غير متصلة

عند $x = 0$.

---

(2) $f(x) = x + 3(1-x)^{1/3}$

$f'(x) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3} (-1)$

$= 1 - (1-x)^{-2/3}.$

$f''(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{-5/3}(-1)$

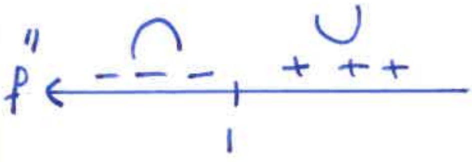
$= \dfrac{-2}{3(1-x)^{5/3}}.$

$f'(x) = 0 \rightarrow$ لايوجد حل

$f''(x)$ غ.م $\rightarrow 1 - x = 0$

$x = 1$

نقاط الشك $x = 1$



للاسفل $(-\infty, 1)$

للاعلى $(1, \infty)$

نقطة الانعطاف عند

$x = 1$

اوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل دالة من الدوال التالية

(1) $f(x) = \sin x - \cos x$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

$f''(x) = -\sin x + \cos x.$

$f''(x) = 0$

$-\sin x + \cos x = 0$

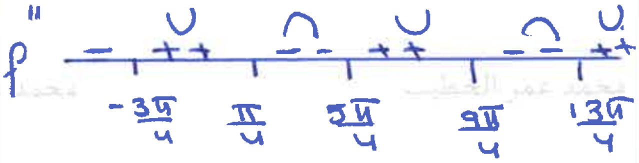
$\sin x = \cos x$

$\cos x$ ↶ بالقسمة

$\tan x = 1$

$$x \left\langle \begin{array}{l} Q_1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} \\ Q_3 \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}. \quad \rightarrow \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

الفرق بينهم π.



للاعلى

$\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right), \ldots$

او

$\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k\pi.$

للاسفل

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right), \ldots$

نقاط الانعطاف هي $\frac{\pi}{4} + k\pi.$

---

(2) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x$

$= \frac{2x}{1 + x^4}.$

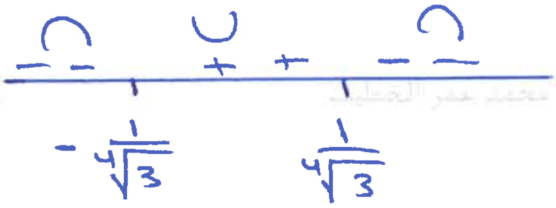
$f''(x) = \frac{2(1 + x^4) - 2x(4x^3)}{(1 + x^4)^2}$

$= \frac{2 - 6x^4}{(1 + x^4)^2}.$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 - 6x^4 = 0.$

$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$

$f''(x)$ غ.م → لا يوجد حل



للاسفل

$\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty\right)$

للاعلى

$\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$

نقطة الانعطاف عند

$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$

اوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل دالة من الدوال التالية

(1) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3} + \frac{4}{3} x^{-2/3}$$

$$f''(x) = \frac{4}{9} x^{-2/3} - \frac{8}{9} x^{-5/3}$$

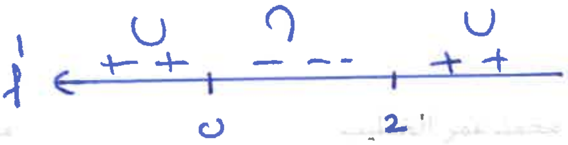
$$= \frac{4}{9} x^{-5/3} (x - 2)$$

$$= \frac{4}{3} \frac{x-2}{x^{2/3}}$$

$f'' = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2.$

f'' غ.م $\rightarrow x^{2/3} = 0$

$x = 0$



للأعلى

$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

للأسفل

$(0, 2)$

نقاط الانعطاف عند

$x = 0 , 2.$

(2) $f(x) = x e^{-4x}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-4x} + x \cdot e^{-4x}(-4)$$

$$= e^{-4x} (1 - 4x).$$

$$f''(x) = e^{-4x}(-4) \cdot (1 - 4x) + e^{-4x}(-4)$$

$$= -4 e^{-4x} (1 - 4x + 1)$$

$$= -4 e^{-4x} (2 - 4x).$$

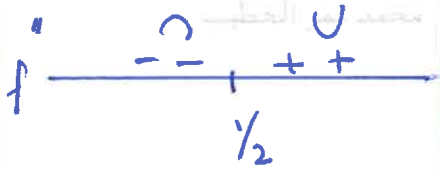
$$= -4 \frac{2 - 4x}{e^{4x}}.$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 2 - 4x = 0$

$x = 1/2 .$

$f''(x)$ غ.م $\rightarrow e^{4x} = 0$

لا يوجد حل.



للأسفل $(-\infty, 1/2)$

للأعلى $(\frac{1}{2}, \infty)$

نقطة الانعطاف عند

$x = 1/2.$

أوجد الاعداد الحرجة واستخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

(1) $f(x)=x^4+4x^3-1$

$f'(x) = 4x^3+12x^2.$

$f'(x) = 0$

$x = 0 \ , \ x=-3$

هذه الاعداد الحرجة .

$f''(x) = 12x^2+24x.$

$f''(0) = 0$

يفشل اختبار المشتقة الثانية لهذه النقطة

$f''(-3) = 36 > 0$

للدالة قيمة صغرى محلية عند

$x=-3$

(2) $f(x)=x^4+4x^2+1$

$f'(x) = 4x^3+8x.$

$f'(x) = 0$

$4x^3+8x=0$

$x = 0$ العدد الحرج

$f''(x) = 12x^2+8.$

$f''(0) = 1 > 0$

للدالة قيمة صغرى

محلية عند $x=0$

(3) $f(x)=xe^{-x}$

$f'(x) = 1\cdot e^{-x}+x e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(1-x)$

$= \dfrac{1-x}{e^x}.$

$f'=0 \rightarrow x=1$

f' غ.م $\rightarrow e^x=0$

لا يوجد حل

$x=1$ العدد الحرج هو

$f''(x) = e^{-x}(-1)(1-x)+e^{-x}(-1)$

$= e^{-x}(-1+x-1)$

$= e^{-x}(x-2)$

$f''(1) = e^{-1}(1-2) < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند

$x=1$

اوجد الاعداد الحرجة واستخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد جميع القيم القصوى المحلية

(1) $f(x)=e^{-x^2}$

$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$

$= \frac{-2x}{e^{x^2}}$

$f'(x)=0 \rightarrow -2x=0$

$x=0$

$f'(x)$ غ م $\rightarrow e^{x^2}=0$

لا يوجد حل

العدد الحرجة هو $x=0$

$f''(x) = -2e^{-x^2}+(-2x)e^{-x^2}(-2)$

$= e^{-x^2}(-2+4x)$

$f''(0) = -2 < 0$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=0$.

---

(2) $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x} = x-4+\frac{4}{x}$.

$D = R \setminus \{0\}$.

$f'(x) = 1-\frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x}$.

$f'=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$.

f' غ.م $\rightarrow x=0$. خارج المجال

الأعداد الحرجة $x=\pm 2$

$f'(x)=1-4x^{-2}$

$f''(x) = 8x^{-3}$.

$= \frac{8}{x^3}$

$f''(2) = 1$

قيمة صغرى محلية عند $x=2$

$f''(-2) = -1$

قيمة عظمى محلية عند $x=-2$.

---

(3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x} = x-\frac{1}{x}$.

$D = R \setminus \{0\}$

$f'(x) = 1+\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$.

$f'=0 \rightarrow x^2+1=0$

. لا يوجد حل

f' غ.م $\rightarrow x=0$

خارج المجال

لا يوجد اعداد حرجة

لا يوجد قيم قصوى محلية

تمارين [21-1] صفحة 286 من الكتاب عدد الأسئلة في الامتحان 2

ارسم بيانياً الدالة $f(x)=x^4+4x^3-1$ موضحا جميع الميزات المهمة

(1) $f(x)=3x^3-3x^2+3x$

(3) $f(x)=x^4-3x^2+2$

(2) $f(x)=x^5-2x^3+1$

ممكن رسم الدوال

بنفس الطريقة

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0, -3.$

$f''(x) = 12x^2 + 24x.$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, -2.$

$f' \quad - - - \underset{-3}{|} + + + + + \underset{0}{|}$

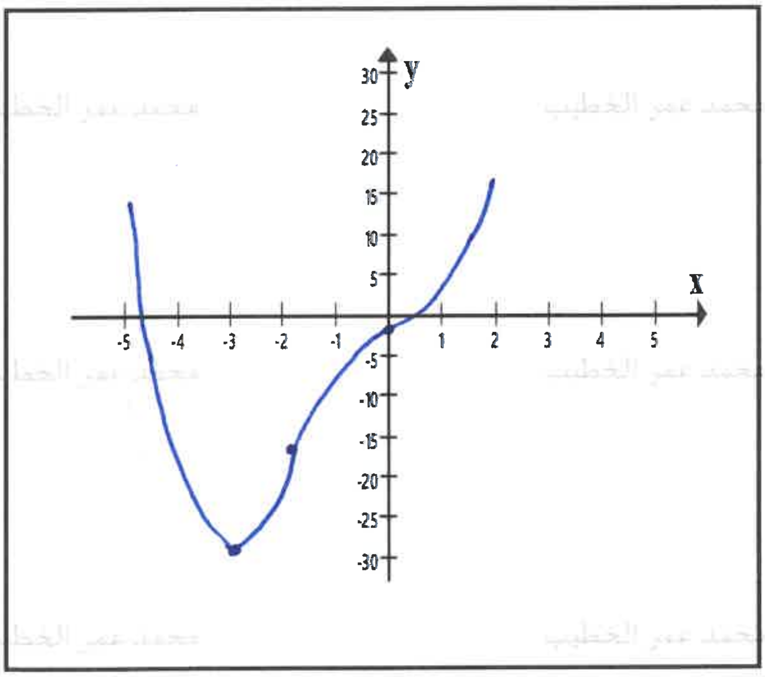
$f'' \quad + + \underset{-2}{|} - - - \underset{0}{|} + +$

* الخط المزدوج

$f' \quad - - - \;|\; + + \;|\; + \;|\; + + +$

$f'' \quad + + \; -3 \; + + \; -2 \; - - \; 0 \; + +$

$\boxed{-28} \quad \boxed{-17} \quad \boxed{-1}$



ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ مع تحديد جميع الميزات المهمة

ممكن رسم الدوال التالية بنفس الطريقة

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^3}=x+\dfrac{4}{x^3}$

خطوط التقارب الرأسية $x = 0$

الأفقية لا يوجد

المائلة $y = x$

$f(x) = x+\frac{4}{x}$

$= \frac{x^2+4}{x}$.

اشارة الدالة $f(x)$

اصفار البسط —

اصفار المقام $x=0$

اشارة f $- \; - \; - \; \overset{\times}{\underset{0}{|}} \; + \; + \; +$

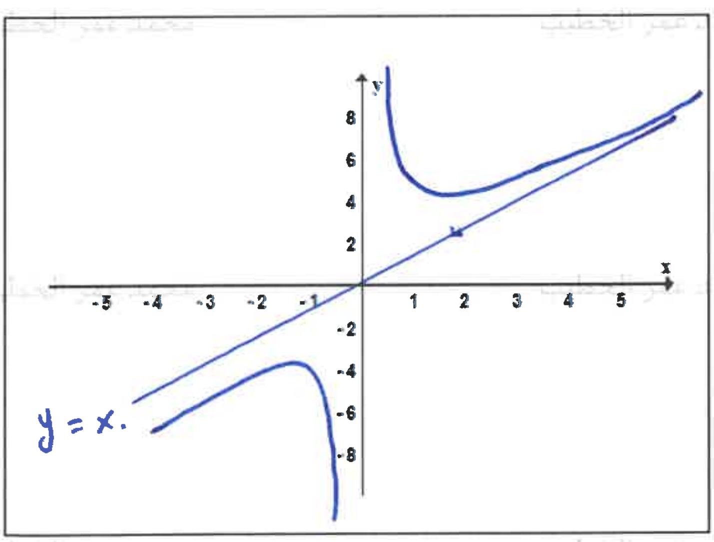
مرحلة ايجاد القيم القصوى المحلية

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$

الاعداد الحرجة 0 $x = \pm 2$.

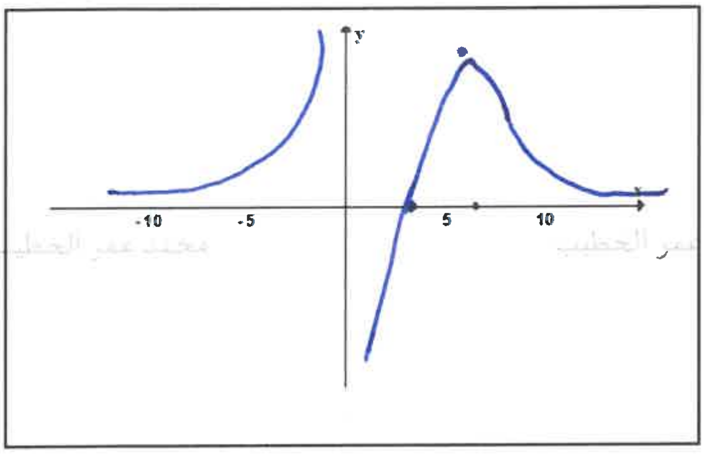
f' $+ \; + \; \underset{-2}{|} \; - \; - \; \overset{\times}{\underset{0}{\bullet}} \; - \; - \; \underset{2}{|} \; + \; + \; +$

$\boxed{-4}$ $\boxed{4}$



ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{x^3}$

مع تحديد جميع الميزات المهمة



$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$
$$= x^{-2} - 4x^{-3}.$$

خطوط التقارب

الرأسية $x=0$

الأفقية $y=0$.

اشارة الدالة

اصفار البسط 4

اصفار المقام 0 .

اشارة f   + + + x − − − 0 + +

0   4

$$f'(x) = -2x^{-3} + 12x^{-4}.$$
$$= -\frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^4}$$
$$= \frac{-2x+12}{x^4}.$$

$f'(x)=0 \rightarrow x=6$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x=0$ خارج المجال

$$f''(x) = 6x^{-4} - 48x^{-5}$$
$$= \frac{6}{x^4} - \frac{48}{x^5}$$
$$= \frac{6x-48}{x^5}$$

$f''(x)=0 \rightarrow x=8$

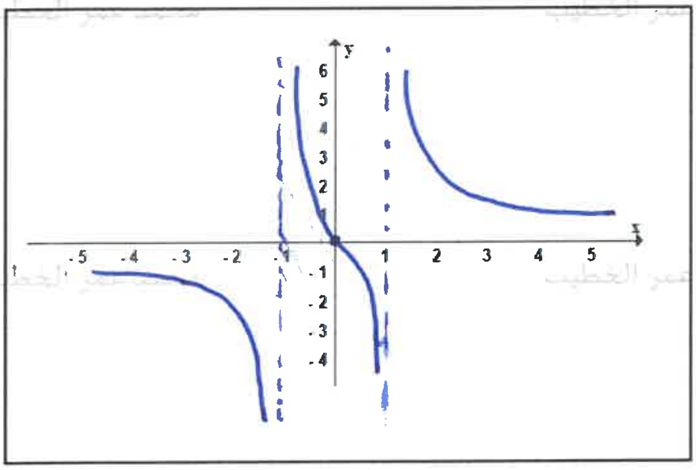
$f''(x)$ غ.م $\rightarrow x=0$ خارج المجال

الخط المزدوج

+ + + x + + − − − − −

+ + + 0 − − − 6 − − − 8 + + +

0 ← $\boxed{X}$ $\boxed{1/108}$ $\boxed{128}$ → 0



(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

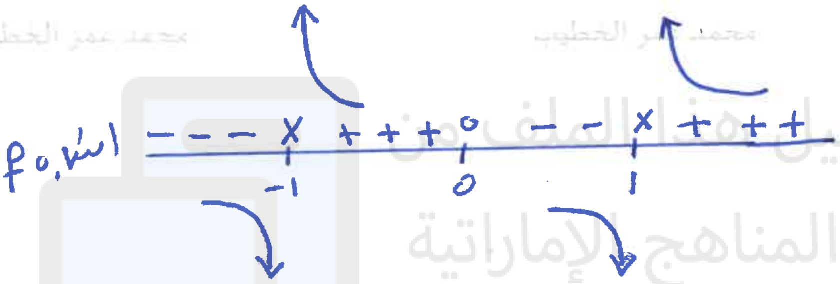
الرأسية $x=\pm 1$

الأفقية $y=0$

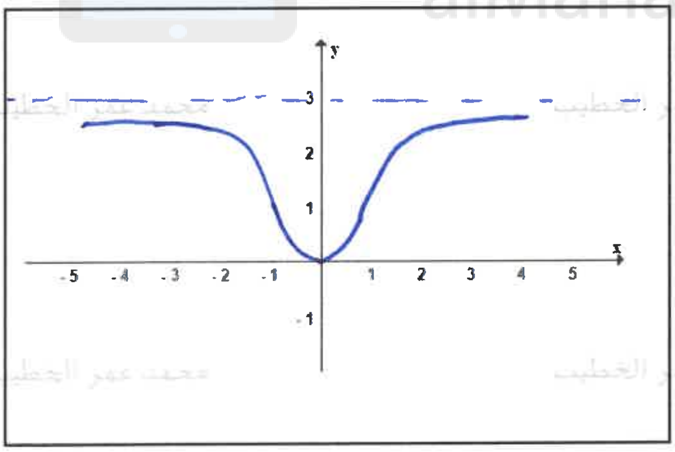
اشارة f

اصفار البسط $x=0$

اصفار المقام $x=\pm 1$



* يكفي خطوط التقارب



(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

الرأسية لا يوجد

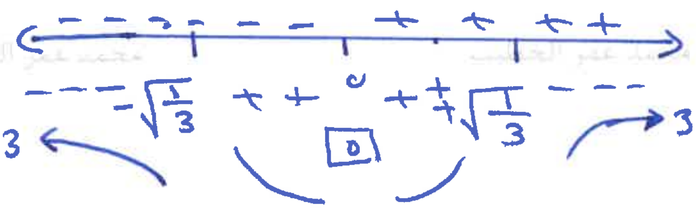
الأفقية $y=3.$

$$f'(x)=\frac{6x}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x=0$$

$$f''(x)=\frac{6-18x^2}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(x)=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$



ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\sin x$ مع تحديد جميع المميزات المهمة

$f'(x) = 1 + \cos x$.

$f'(x) = 0$

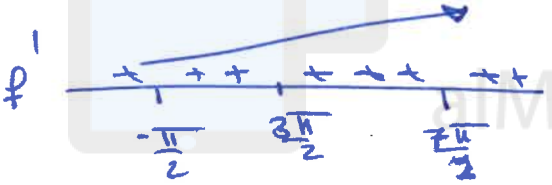
$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$x \left< \begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\ \times \\ \frac{3\pi}{2}\ \checkmark \end{array} \right.$

الاعداد حرجة ∞

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.



$f''(x) = -\sin x$

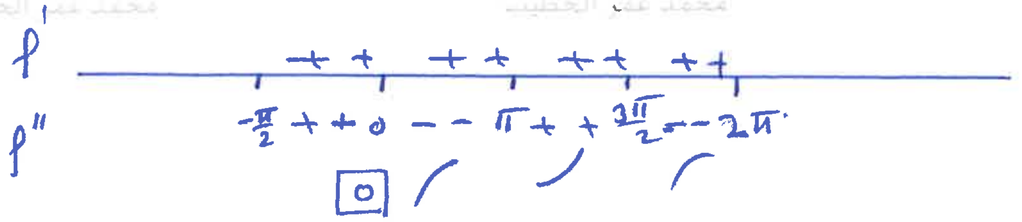
$f''(x) = 0$

$-\sin x = 0$

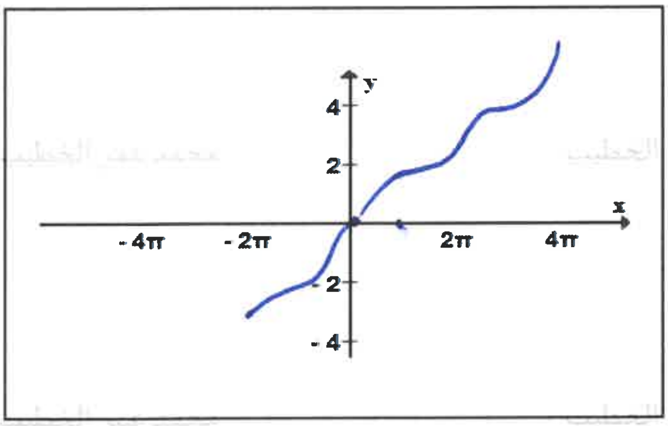
$\sin x = 0$

$x = \left< \begin{array}{l} 0\ \checkmark \\ \pi\ \checkmark \end{array} \right.$ الفرق بينهم π.

$x = 0 + k\pi = k\pi$



الخط المزدوج



ارسم منحنى الدالة $f(x)=\sin x-\cos x$ مع تحديد جميع الميزات المهمة

$f'(x) = \cos x + \sin x.$

$f'(x) = 0$

$\cos x + \sin x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$\tan x = -1$

x $\pi/4$

$\varphi_2 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\varphi_4 \rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$

الوفشم $\pi.$

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$

$f''(x) = -\sin x + \cos x$

$f''(x) = 0$

$-\sin x = -\cos x.$

$\tan x = 1.$

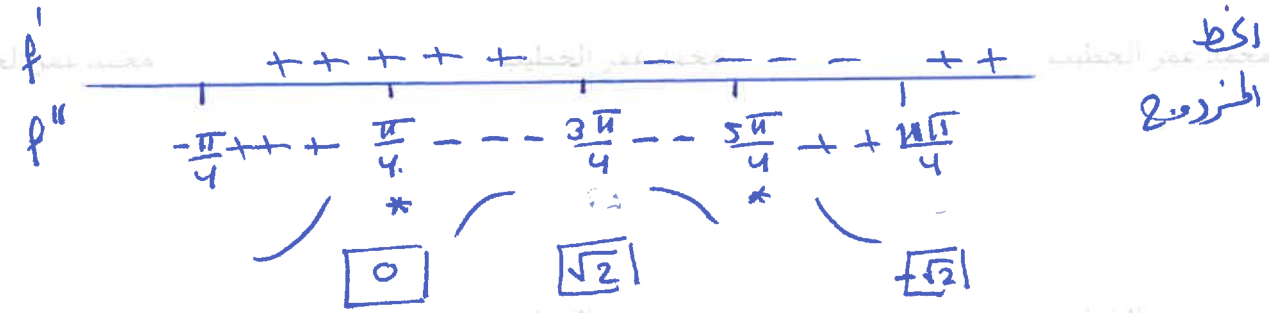
x $\pi/4$

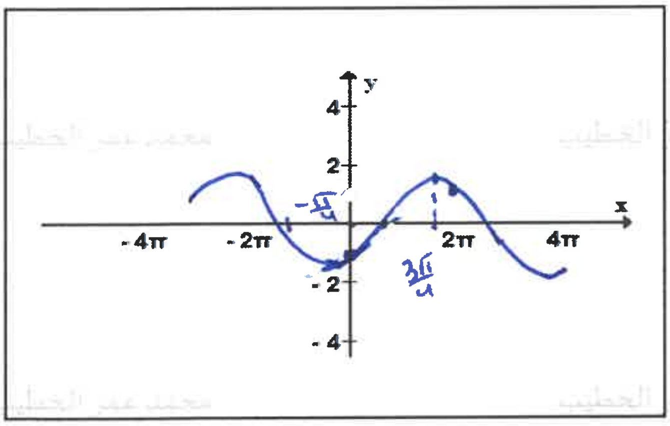
$\varphi_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

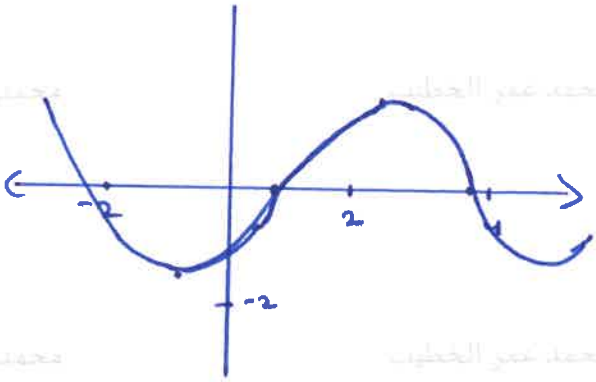
$\varphi_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4}.$

الوفشم $\pi.$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$







ارسم منحنى الدالة $f(x) = x\ln x$ مع تحديد جميع المميزات المهمة

$D = (0, \infty)$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1 .$

$f'(x) = 0$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

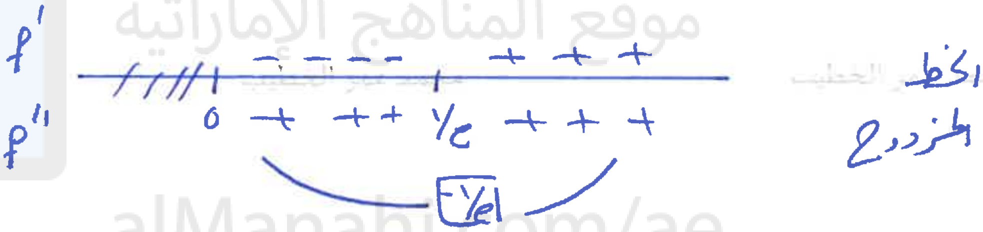
$x = e^{-1} = 1/e$

$f''(x) = \frac{1}{x} .$

$f''(x) = 0$ لا يوجد حل

$f''(x) =$ غ.م $\rightarrow x = 0$

خارج المجال



نقاط التقاطع مع محور x

$x \ln x = 0$

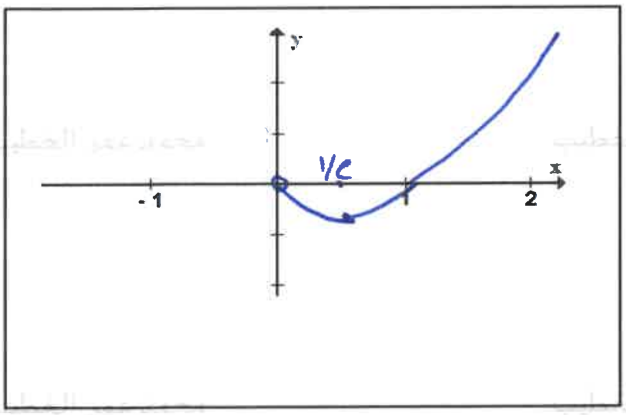
$x = 0 \quad , \quad \ln x = 0$

$x = 1$

$\lim_{x \to 0^+} x \ln x .$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} -x = 0$



ارسم منحنى الدالة $f(x) = x \ln x^2$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

$D = R / \{0\}.$

$f(x) = x \, Ln \, x^2.$

$f'(x) = 1 \cdot Ln \, x^2 + x \cdot \frac{2x}{x^2}$

$= Ln \, x^2 + 2 .$

$f'(x) = 0$

$Ln x^2 + 2 = 0$

$Ln x^2 = -2$

$x^2 = e^{-2} = 1/e^2$

$x = \pm \sqrt{1/e^2} = \pm 1/e.$

$f''(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{1}{x}.$

f' + + + - - - x - - - + + +

f'' - - - - - $-1/e$ - - - 0 + + $1/e$ + +

الخط المزدوج

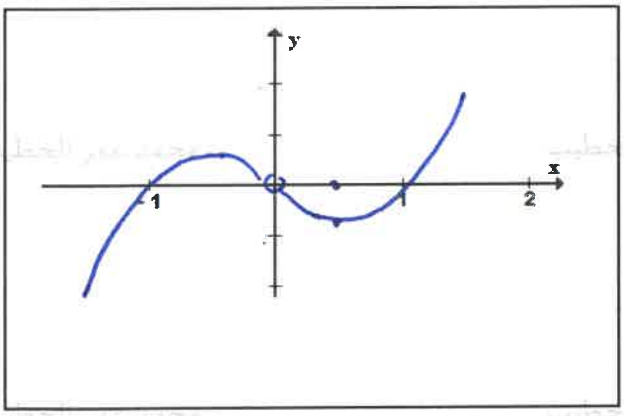
نقاط إلتقاطع مع محور x

$x \, Ln \, x^2 = 0$

$x = 0 , \quad Ln \, x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1.$



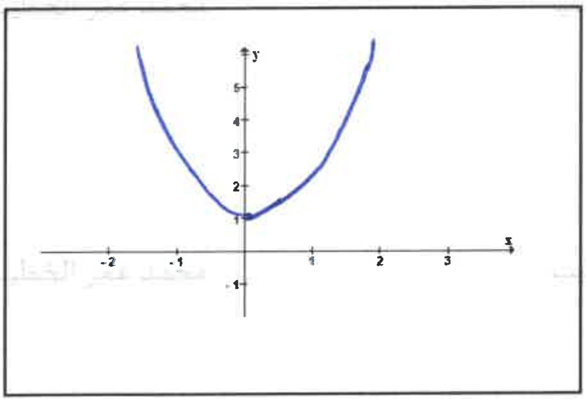
$\lim\limits_{x \to 0} x \, Ln \, x^2 = Lim \frac{Ln \, x^2}{1/x.}$

$= Lim \frac{2x/x^2}{-1/x.}$

$= \lim\limits_{x \to 0} -2x = 0$

(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



f

$$f(x) = (x^2+1)^{1/2}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}.\cdot 2x$$

$$= x(x^2+1)^{-1/2}.$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{1/2}}.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0.$$

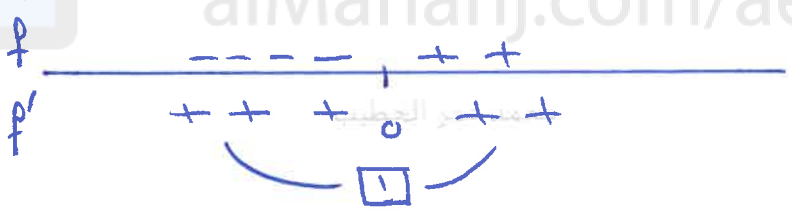
$$f''(x) = 1\cdot(x^2+1)^{-1/2} - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2}\cdot 2x.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}.}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}.}$$

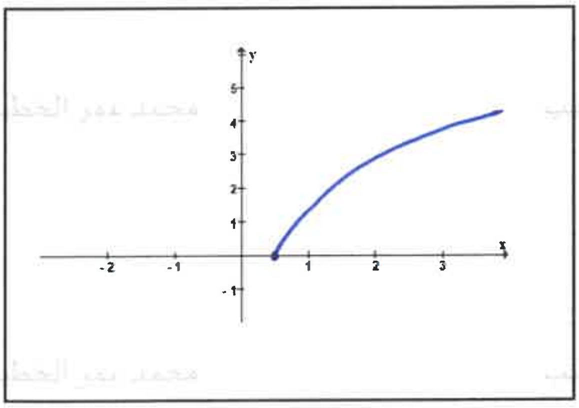
$f''(x)=0$ لا يوجد حل، لا يوجد ع.م f''
من



---

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{2x-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة



$$D = [\tfrac{1}{2}, \infty)$$

ارسم منحنى الدالة $f(x)=x^{5/3}-5x^{2/3}$ مع تحديد جميع المميزات المهمة

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{10}{3}x^{-1/3}$$

$$=\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$$

$$=\frac{5}{3}\,\frac{x-2}{x^{1/3}}$$

$f'(x)=0 \rightarrow x=2.$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x=0$

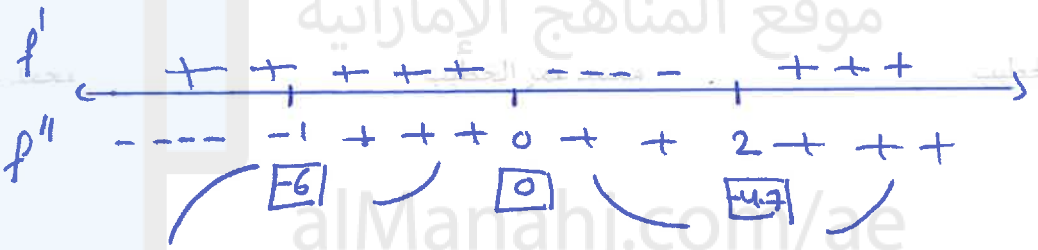
$$f''(x)=\frac{-10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}$$

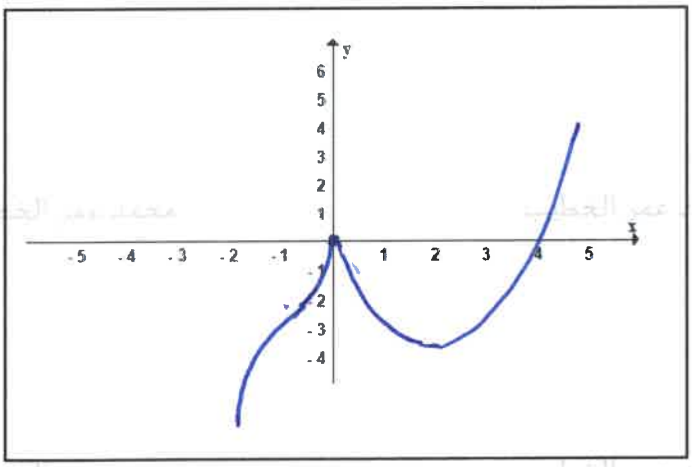
$$=\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1).$$

$$=\frac{10}{9}\,\frac{x+1}{x^{4/3}}$$

$f''=0 \Rightarrow x=-1$

f'' غ.م $\rightarrow x=0$





ارسم منحنى الدالة $f(x)=x^3-\frac{3}{400}x$ مع تحديد جميع الميزات المهمة

$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{400}$

$f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0$

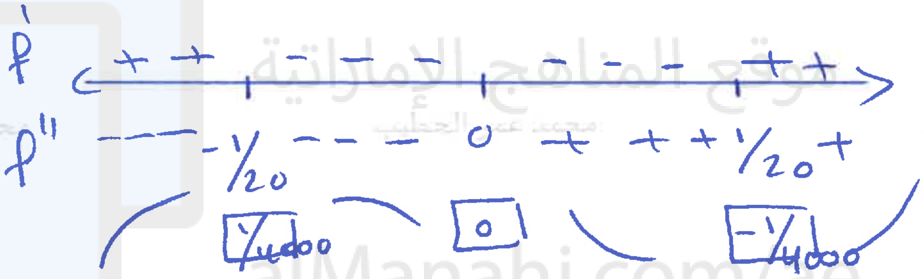
$3x^2 - \frac{3}{400} = 0$

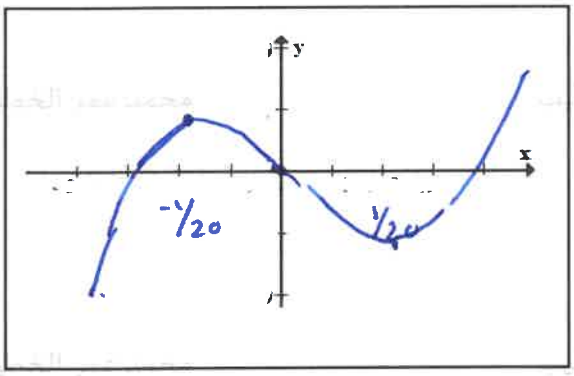
$x^2 = \frac{1}{400}$

$x = \pm\frac{1}{20}$

$f''(x) = 0$

$x = 0$





ارسم منحنى الدالة $f(x)=e^{-2/x}$ **مع تحديد جميع المميزات المهمة**

$f'(x) = 2x^{-2}e^{-2/x}.$

$f''(x) = -4x^{-3}e^{-2/x} + 2x^{-2}\cdot e^{-2/x}\cdot\frac{2}{x^2}$

$= \frac{4}{x^4}e^{-2/x} - \frac{4}{x^3}e^{-2/x}.$

$= \frac{4}{x^4}e^{-2x}(1-x)$

$= \frac{4(1-x)}{x^4 e^{2x}}.$

$f''(x)=0 \rightarrow x=1$

f'' غ.م $\rightarrow x=0$
خارج المجال

$D = \mathbb{R}|\{0\}$

$f'(x) = e^{-2/x}\cdot\frac{2}{x^2}.$

$= \frac{2}{x^2}e^{-2/x}.$

$= \frac{2}{x^2 e^{2/x}}.$

$f'(x)=0$ لايوجد حل

$f''(x) =$ غ.م .

$x=0$ خارج المجال

خطوط التقارب

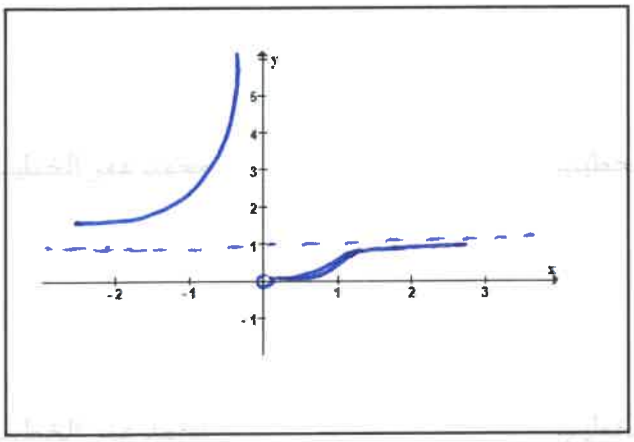
$x=0$ الرأسي

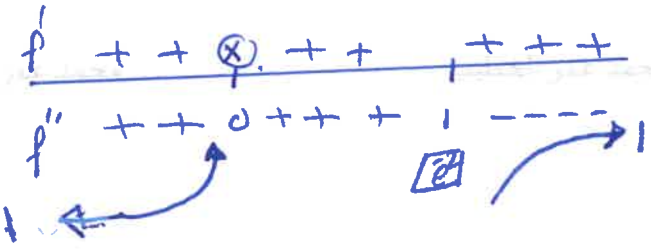
$\lim_{x\to\infty} e^{-2/x} = 1.$

الأفقي

$\lim_{x\to-\infty} e^{-2/x}. = 1.$

$\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x} = 0$, $\lim_{x\to 0^-} e^{-2/x} = e^{\infty} = \infty.$





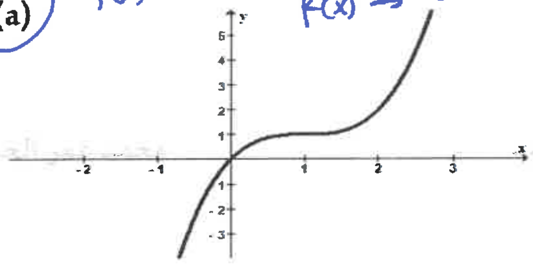
$f(0)=0$

(1) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=x^3-3x^2+3x$

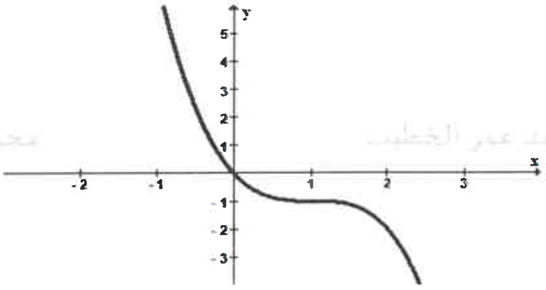
$x \to \infty$
$f(x) \to \infty$

$x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$

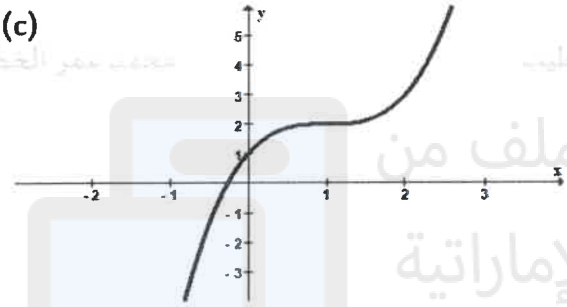
(a)



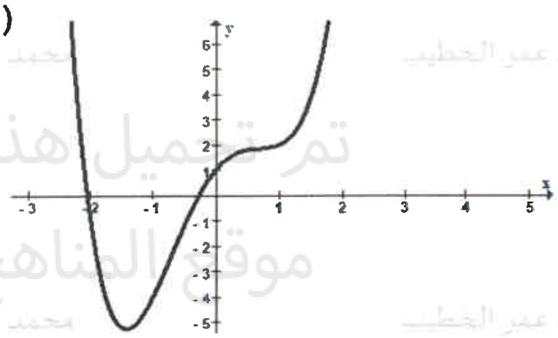
(b)



(c)



(d)



---

(2) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\frac{x-4}{x^3}$

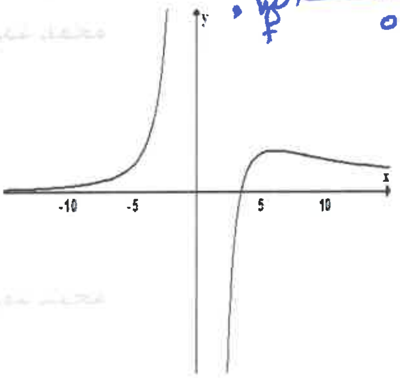
يقطع محور x عند x=4

رأسي x=0

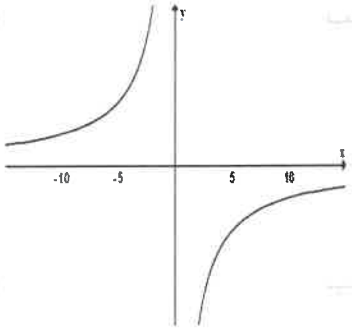
أفقي y=0

إشارة + + | - - - |
0 4

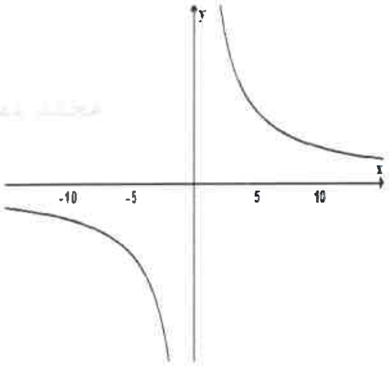
(a)



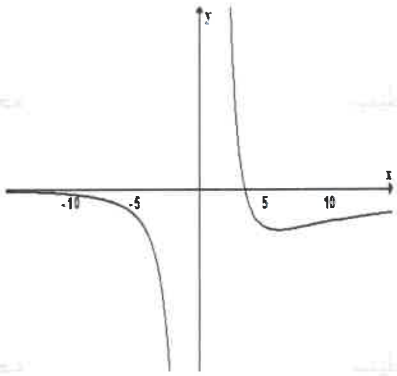
(b)



(c)



(d)



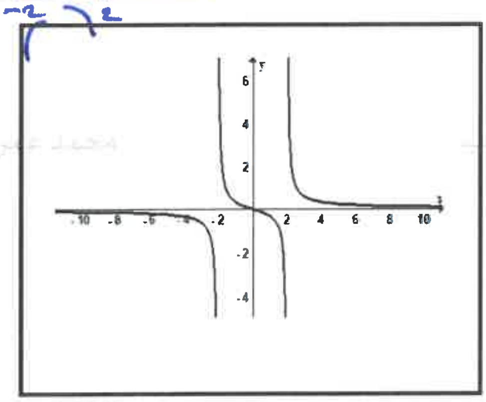
$x = \pm 2$ رأسي

$y = 2$ أفقي

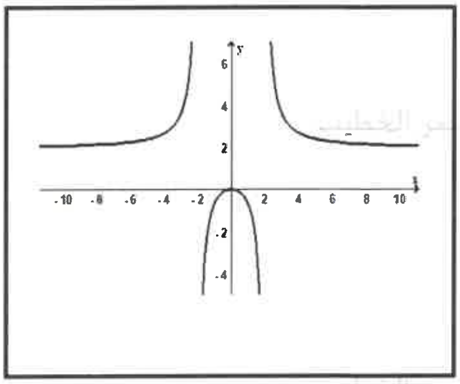
f, ind + - - - - +
-2 2

(1) الشكل الذي يمثل بيان الدالة $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$ هو

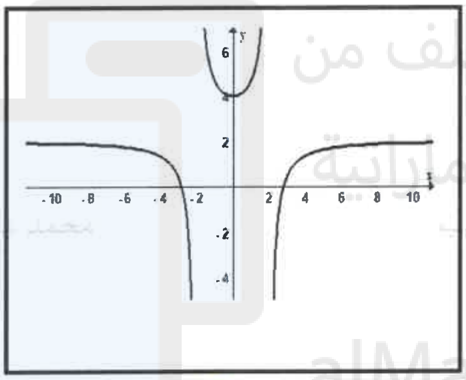
(a)



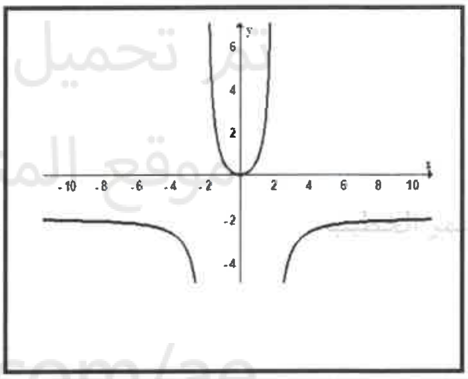
[✓ (b)]



(c)



(d)



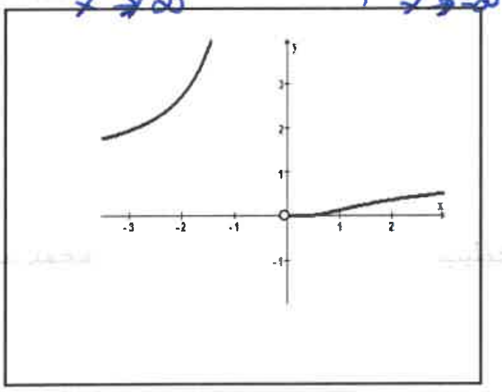
---

* الدالة دائماً موجبة .

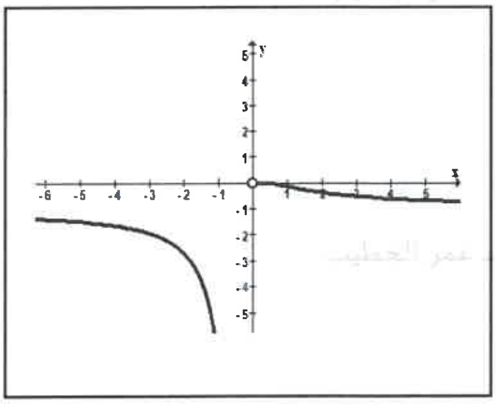
$\lim_{x \to \infty} = 1$, $\lim_{x \to -\infty} = 1$

(2) الشكل الذي يمثل بيان الدالة $f(x) = e^{-2/x}$ هو

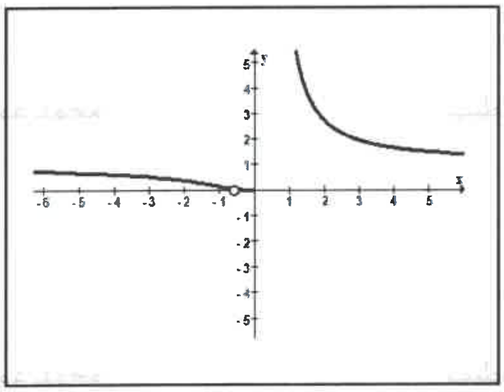
[✓ (a)]



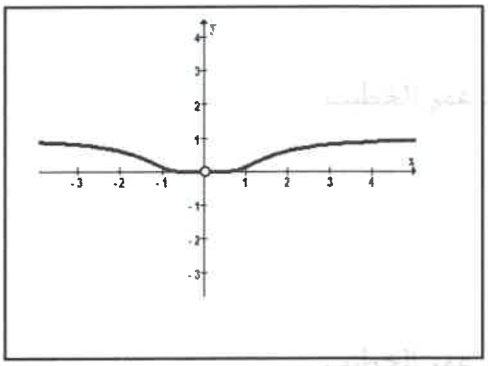
(b)



(c)

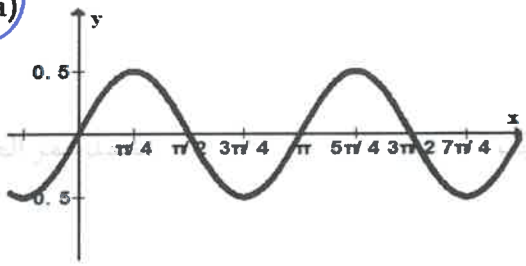


(d)

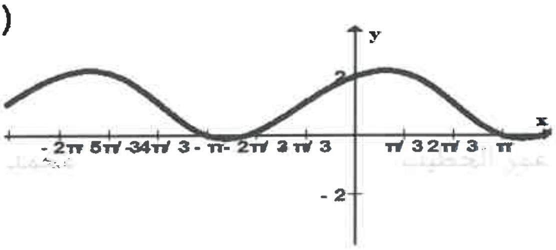


(1) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\sin x\cos x$

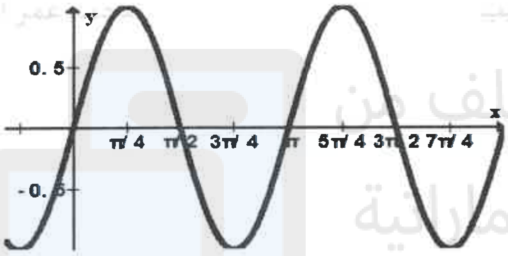
[✓ (a)]



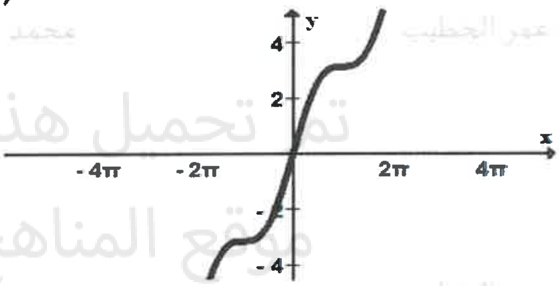
(b)



(c)



(d)

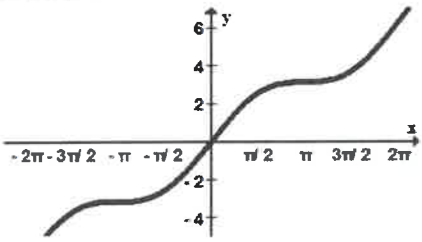


الدالة تقطع محور x عند الصفر

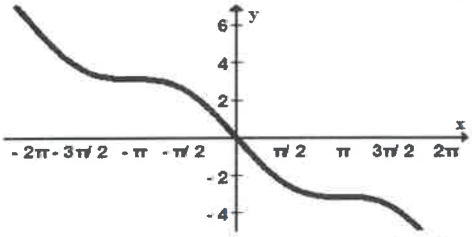
الدالة متزايدة .

(2) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=x+\sin x$

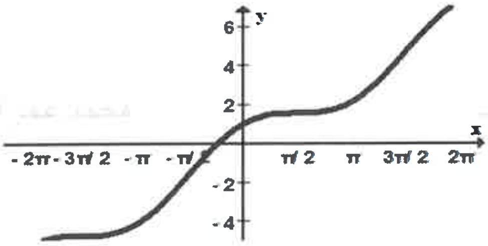
[✓ (a)]



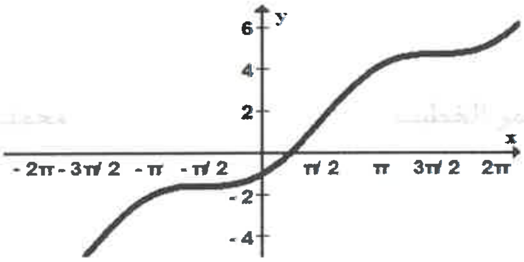
(b)



(c)

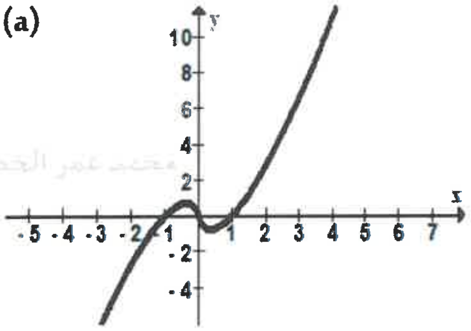


(d)

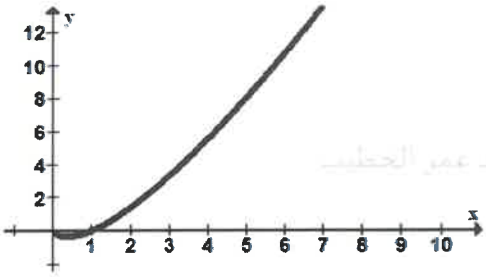


(1) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x) = x \ln x$

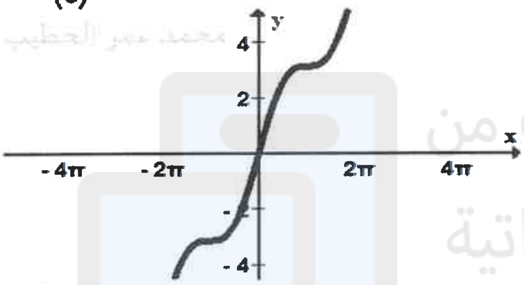
(a)



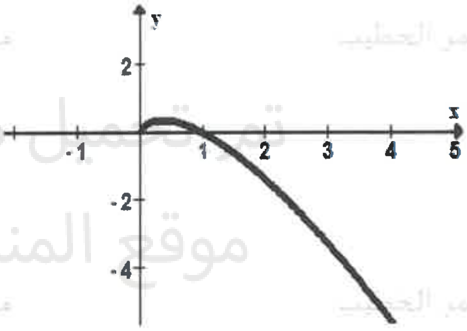
[✓ (b)]



(c)



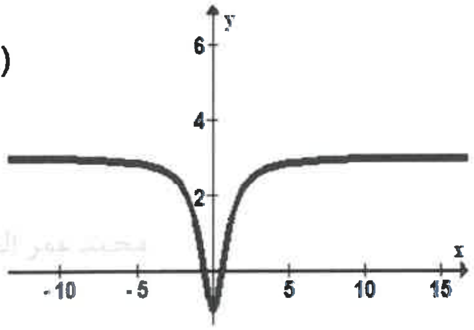
(d)



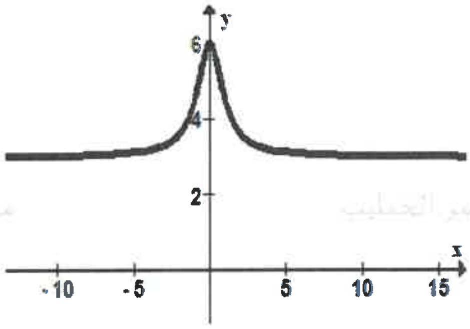
---

(2) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$

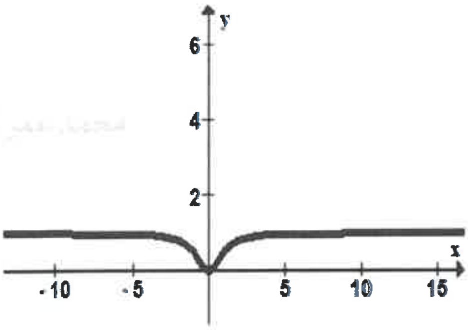
(a)



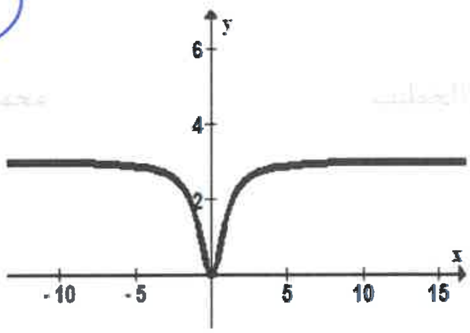
(b)



(c)

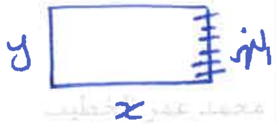


[✓ (d)]



(1) قطعة ارض مستطيلة الشكل بجوار نهر مستقيم مساحتها $1800\ ft^2$ ، اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الثلاث (القيمة الصغرى للمحيط) ثم اوجد ابعاد قطعة الارض

السؤال كتابي



$xy = 1800$

$y = \frac{1800}{x}$

$P = 2x + y$

$= 2x + \frac{1800}{x}$

$= 2 - \frac{1800}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - 1800}{x^2}.$

$P' = 0 \rightarrow 2x^2 - 1800 = 0$

$x = -30$, $x = 30$

مرفوض

P' غ . م $\rightarrow x = 0$

خارج المجال

عند $x = 30$ للدالة قيمة صغرى محلية وحدة فهي مطلقة

$y = \frac{1800}{x} = \frac{1800}{50}$

$= \frac{1800}{630} = 60$

الابعاد 30,60 اصغر محيط

$P = 120$

---

(2) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله $96\,ft$ على الجوانب الثلاث الاخرى ما اكبر مساحة يمكن احاطتها (القيمة العظمى للمساحة) ثم اوجد ابعاد القطعة.

السؤال كتابي

$2x + y = 96$

$y = 96 - 2x$

$A = xy$

$= x(96 - 2x)$

$= 96x - 2x^2$

$A' = 96 - 4x$

$A' = 0 \rightarrow 96 - 4x = 0$

$x = 24$

$A'' = -4 < 0$

عند $x = 24$ للدالة قيمة عظمى محلية وحدة فهي مطلقة

الابعاد :

$x = 24$

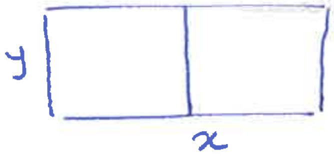
$y = 96 - 48 = 48$

أكبر مساحة

$A = 24 \times 48 = 1152$

(1) يراد عمل سياج حول اسطبل مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة اذا كان طول السياج $120\ ft$ اوجد ابعاد الاسطبل لتكون مساحتة اكبر ما يمكن

السؤال كتابي



$2x + 3y = 120$

$y = \frac{120 - 2x}{3}$

$= 40 - \frac{2}{3}x$

$A = xy$

$= x\left(40 - \frac{2}{3}x\right)$

$= 40x - \frac{2}{3}x^2$

$A' = 40 - \frac{4}{3}x$

$A' = 0$

$40 - \frac{4}{3}x = 0$

$40 = \frac{4}{3}x$

$x = 30$

$A'' = -\frac{4}{3} < 0$

عند $x=30$ للدالة

قيمة عظمى محلية

وحيدة فهي مطلقة

الابعاد :

$x = 30$

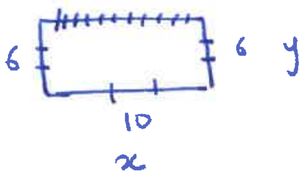
$y = \frac{120 - 60}{3} = 20$

الابعاد 30,20

---

(2) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$ ، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\ ft$ ، ومن الجهتين الباقية بابيين بعرض $6\ ft$ لكل منهم ، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب)

السؤال كتابي



$xy = 800$

$y = \frac{800}{x}$

$P = x - 10 + y - 6 + y - 6$

$= x + 2y - 22$

$= x + 2\left(\frac{800}{x}\right) - 22$

$P' = 1 - \frac{1600}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 1600}{x^2}$

$P' = 0$

$x^2 - 1600 = 0$

$x = -40 \quad , \quad x = 40$

مرفوض

$P'' = \frac{3200}{x^3}$

$P''(40) > 0$

عند $x=40$ قيمة

صغرى محلية

وحيدة فهي مطلقة

$y = \frac{800}{40}$

$= 20$

الابعاد هي 40,20

$P = 40 + 2(20) - 22$

$= 58$

(1) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة p يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$

السؤال كتابي

$2x + 2y = p$

$y = \frac{p}{2} - x$

$A = xy$

$= x\left(\frac{p}{2} - x\right)$

$= \frac{p}{2}x - x^2$

$A' = \frac{p}{2} - 2x$

$A' = 0 \rightarrow \frac{p}{2} = 2x$

$x = \frac{p}{4}$

$A'' = -2 < 0$

عند $x = \frac{p}{4}$

قيمة عظمى محلية

وحيدة فهي مطلقة

$y = \frac{p}{2} - \frac{p}{4} = \frac{p}{4}$

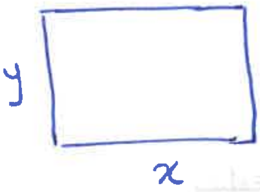
الشكل مربع لأن

$x = y = \frac{p}{4}$

---

(2) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحتة قيمة ثابتة A يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$

السؤال كتابي



$xy = A$

$y = \frac{A}{x}$

$P = 2x + 2y$

$= 2x + 2\frac{A}{x}$

$P' = 2 - \frac{2A}{x^2}$

$= \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$

$P' = 0 \rightarrow 2x^2 - 2A = 0$

$x^2 = A$

$x = -\sqrt{A}$, $x = \sqrt{A}$

مرفوض

$P'' = \frac{4A}{x^3} > 0$

عند $x = \sqrt{A}$

للدالة قيمة صغرى

محلية وحيدة فهي مطلقة

$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}}$

$= \sqrt{A}$

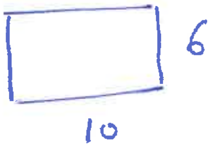
الشكل مربع طول

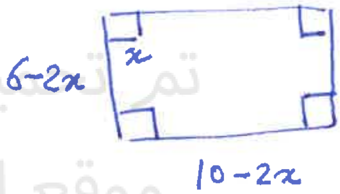
ضلعه $\sqrt{A}$

يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مستطيلة الشكل ابعادها $6in,10in$ وذلك بقص 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس طول ضلعه x . اوجدقيمة x التي تجعل حجم الصندوق اكبر ما يمكن

السؤال كتابي

$$V = (10-2x)(6-2x)\,x$$
$$= (10-2x)(6x-2x^2)$$
$$= 60x - 20x^2 - 12x^2 + 4x^3$$
$$= 4x^3 - 32x^2 + 60x$$





$$V' = 12x^2 - 64x + 60$$

$$V' = 0 \longrightarrow 12x^2 - 64x + 60 = 0$$

$$x = \frac{8}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3} \quad , \quad x = \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}$$

مرفوض

$$V'' = 24x - 64$$

$$V''\left(\frac{8}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}\right) < 0$$

عند $x = \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}$ للدالة قيمة

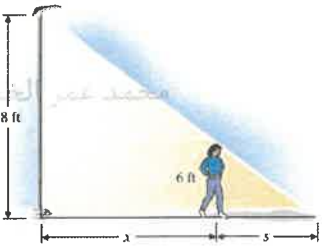
عظمى محلية وحيدة فهي مطلقة

تمارين [26-19] صفحة 304 من الكتاب عدد الأسئلة في الامتحان 1

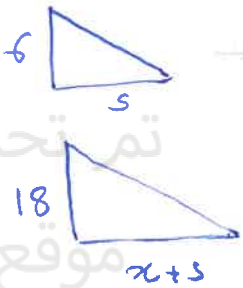
(1) رجل طوله $6\,ft$ ويبعد $12\,ft$ عن عمود انارة ارتفاعه $18\,ft$

ويمشي مبتعداً عن العمود بمعدل $2\,ft/s$

أوجد معدل تغير طول ظل الرجل



السؤال كتابي



$$\frac{x+s}{s} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x+s = 3s$$

$$x = 2s \rightarrow s = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(2) = 1\ ft/s$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

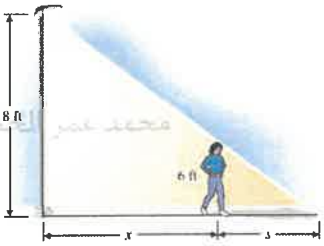
$$\frac{ds}{dt} = ?$$

---

(2) رجل طوله $6\,ft$ ويبعد $12\,ft$ عن عمود انارة ارتفاعه $18\,ft$

ويمشي نحو العمود بمعدل $3\,ft/s$

أوجد معدل تغير طول ظل الرجل



السؤال كتابي

$$\frac{dx}{dt} = -3$$

$$s = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}(-3) = -1.5\ ft/s$$

$$\frac{ds}{dt} = ?$$

قانون بويل للغازات في درجة حرارة ثابتة هو $PV = c$ حيث أن P هو ضغط الغاز و V حجم الغاز

والعدد c ثابت الغازات على اعتبار ان P و V دوال مترابطة بالزمن

السؤال كتابي

(أ) بين ان $\frac{P'(t)}{V'(t)} = \frac{-c}{V^2}$

$PV = c \longrightarrow P = c/V$

$P'(t) \cdot V(t) + P(t)\,V'(t) = 0$

$P'(t)\,V(t) = -P(t)\,V'(t)$

$\frac{P'(t)}{V'(t)} = \frac{-P(t)}{V(t)} = -\frac{c/V(t)}{V(t)} = -\frac{c}{V^2(t)}$

#

(ب) اكتب P كدالة في V ثم اوجد $P'(V)$

$P = \frac{c}{V}$

$P(V) = \frac{c}{V}$

$P'(V) = -\frac{c}{V^2}$

(ج) قارن بين $P'(V)$ و $\frac{P'(t)}{V'(t)}$ من الفقرتين أ و ب

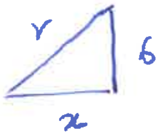
$P'(V) = \frac{P'(t)}{V'(t)}$ متساوية اي ان

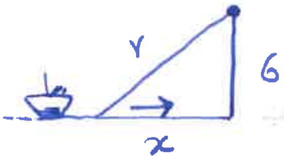
$\frac{dP}{dV} = \frac{dP/dt}{dV/dt}$

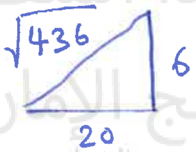
(1) حوض (منصة) ارتفاعه $6\,ft$ عن منسوب الماء ، سحب رجل مركب بواسطة حبل بمعدل $2\,ft/s$ ويبقى القارب على مستوى سطح الماء

اوجد سرعة اقتراب المركب عندما يكون على بعد $20\,ft$ من اسفل الحوض

السؤال كتابي







$\frac{dr}{dt} = -2$

$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{x=20} = ?$

$x = \sqrt{r^2-36}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2r}{2\sqrt{r^2-36}} \cdot \frac{dr}{dt}$

$= \frac{\sqrt{436}}{20} (-2)$

$= -2.088$

---

(2) ينسكب الرمل بمعدل $5m^3/s$ ويشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي قطرها اوجد معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين

$h = 2r$

$\frac{dV}{dt} = 5$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = ??$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$= \frac{1}{12} \pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$

$5 = \frac{1}{4} \pi (2)^2 \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{\pi}$

(1) يرتبط f تردد اهتزاز اوتار الجيتار بالتوتر T (ثابت) الذي يشد به الوتر بالعلاقة $f=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

حيث ρ تمثل الكثافة (ثابت) و L طول الوتر

السؤال كتابي

(أ) اوجد $f'(t)$ عندما يكون $L=\frac{1}{2}$ و $\sqrt{\frac{T}{\rho}}=220$ و $L'(t)=-4$

$f(t) = \frac{1}{2L}(220) = \frac{110}{L}$

$f'(t) = \frac{-110}{L^2}\ \frac{dL}{dt}$

$P'(t) = \frac{-110}{(1/2)^2}\ (-4)$

$= 1760$

(ب) اوجدالزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت اوكتاف واحد (ضعف f)

في الثانية الواحدة يرتفع من 220 إلى 1760 اي 8 أضعاف

لذلك يحتاج $1/8$ من الثانية ليصل إلى الضعف 440

---

(2) على فرض انك تملأ بالون كروي بالهواء بمعدل $1f^3/s$ ويحافظ على شكله

السؤال كتابي

(أ) اوجد معدل تغير نصف قطره عنما يكون نصف القطر $r=0.01ft$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

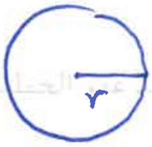
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\ \frac{dr}{dt}$

$1 = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(0.01)^2}$

$= \frac{2500}{\pi}$



$\frac{dV}{dt} = 1$

$\frac{dr}{dt} = ?$

(ب) اوجد معدل تغير نصف قطره عنما يكون نصف القطر $r=0.1ft$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(0.1)^2} = \frac{25}{\pi}$

(ج) قارن بين معدل تغير نصف القطر في الحالتين

يكون معدل تغير نصف القطر سريع جداً ثم يبدأ يقل بتدرج

السؤال كتابي

ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\,ft$ بمعدل ثابت $10\,f^3/s$

(أ) اوجد معدل تغير نصف قطر اعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلى الخزان الى النصف

(ب) اوجد الارتفاع الذي عنده معدل التغير في الارتفاع يساوي معدل التغير في نصف القطر

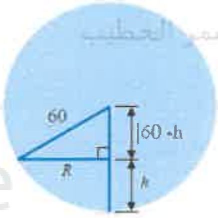
يعطى حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $60\,ft$ ونصف قطر مستوى سطح الماء R بالعلاقة

$$V(R)=\pi\left[60^2(60-R^2)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{1}{3}(60^2-R^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\times 60^3$$

وتعطى العلاقة بين ارتفاع الماء h ونصف قطر سطح الماء R عندما يكون الماء نصف الخزان اواكثر بالعلاقة

$$h(t)=60+\sqrt{60^2-R^2}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\times\frac{dR}{dt}\rightarrow \frac{dR}{dt}=\frac{dV/dt}{dV/dR}$$



$$\frac{dV}{dR}=\pi\left[60^2\cdot\frac{1}{2}(60^2-R^2)^{-1/2}\cdot(-2R)-\frac{1}{2}(60^2-R^2)^{1/2}(-2R)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-60^2R}{\sqrt{60^2-R^2}}+R\sqrt{60^2-R^2}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-60^2R+R(60^2-R^2)}{\sqrt{60^2-R^2}}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}\right]=\frac{-\pi R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}$$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{dV/dt}{dV/dR}=\frac{10}{\frac{-\pi R^3}{\sqrt{60^2-R^2}}}=\frac{-10\sqrt{60^2-R^2}}{\pi R^3}$$

$$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=0}=\frac{-10\sqrt{60^2-60^2}}{\pi(60)^3}=0$$

ينسكب الرمل بمعدل $20 ft^3 / s$ ويشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي ضعف نصف القطر

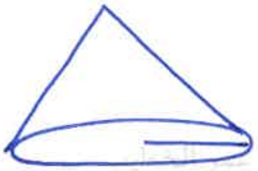
السؤال كتابي

(1) اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومة عندما يصل الارتفاع $6 ft$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

$= \frac{1}{3}\pi r^2.(2r)$

$= \frac{2}{3}\pi r^3.$



$\frac{dv}{dt} = 20$

$\frac{dr}{dt} \Big|$

$h = 6.$

$r = 3.$

$h = 2r.$

$\frac{dv}{dt} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$

$20 = 2\pi (3)^2 \frac{dr}{dt}.$

$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{18\pi} = \frac{10}{9\pi}.$

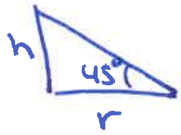
(2) اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومة عندما تشكل كومة الرمل زاوية قياسها $45°$ مع المستوى الافقي

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 . r$

$= \frac{1}{3}\pi r^3.$

$\frac{dr}{dt} = ?$



الزاوية 45^0 يعني مثلث متساوي الساقين

$h = r$

$h = 6 \rightarrow r = 6$

$\frac{dv}{dt} = \pi r^2 \frac{dr}{dt}.$

$20 = \pi (6)^2 \frac{dr}{dt}.$

$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{36\pi} = \frac{5}{9\pi}.$

تمارين [5-29] صفحة 329 من الكتاب عدد الأسئلة في الامتحان 3

اوجد الدالة الاصلية

(1) $\int (3x^4 - 3x)\, dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + c$

(2) $\int (x^3 - 2)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x + c$

(3) $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4})\, dx = \int 3x^{1/2} - x^{-4}\, dx$

$= 3 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^{-3}}{-3} + c = 2x^{3/2} + \frac{1}{3x^3} + c$

(4) $\int (2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx = \int 2x^{-2} + x^{-1/2}\, dx$

$= \frac{2}{-1}x^{-1} + 2x^{1/2} + c = -\frac{2}{x} + 2\sqrt{x} + c$

(5) $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}}\, dx = \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3}\, dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3 \cdot \frac{3}{1}x^{1/3} + c = \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$

(6) $\int \frac{x + 2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}}\, dx = \int \frac{x}{x^{5/4}} + \frac{2x}{x^{5/4}}\, dx = \int x^{-1/4} + 2x^{-1/2}\, dx$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 2 \cdot 2x^{1/2} + c = \frac{4}{3}x^{3/4} + 4x^{1/2} + c$

اوجد الدالة الاصلية

(1) $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$ $= -2\cos x + \sin x + c.$

(2) $\int (3\cos x - \sin x)\,dx$ $= 3\sin x + \cos x + c.$

(3) $\int 2\sec x \tan x\,dx$ $= 2\sec x + c.$

(4) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $= 4\sin^{-1} x + c.$

(5) $\int 5\sec^2 x\;dx$ $= 5\tan x + c.$

(6) $\int 4\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ $= \int 4\,\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int 4\csc x \cot x\,dx$

$= -4\csc x + c.$

(7) $\int (3e^x - 2)\,dx$ $= 3e^{x} - 2x + c.$

(8) $\int (4x - 2e^x)\,dx$ $= 4\frac{x^2}{2} - 2e^{x} + c = 2x^2 - 2e^{x} + c.$

(9) $\int (3\cos x - \frac{1}{x})\,dx$ $= 3\sin x - \ln|x| + c.$

(10) $\int (2x^{-1} + \sin x)\,dx$ $= \int (\frac{2}{x} + \sin x)\,dx$

$= 2\ln|x| - \cos x + c.$

(1) اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = 2\ln|x^2+4| + c.$

---

(2) $\int \frac{3x}{4x^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{8}\ln|x^2+1| + c$

---

(3) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c.$

---

(4) $\int (2\cos x - \sqrt{e^{2x}})\,dx = \int 2\cos x - (e^{2x})^{1/2}\,dx.$

$= \int 2\cos x - e^{x}\,dx = 2\sin x - e^{x} + c.$

---

(5) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \ln|e^x+3| + c = \ln(e^x+3) + c$

---

(6) $\int \frac{e^x+3}{e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\,dx = \int 1 + 3e^{-x}\,dx$

$= x - 3e^{-x} + c.$

---

(7) $\int x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{5}{4}} - 4)\,dx = \int x^{3/2} - 4x^{1/4}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} - 4\cdot\frac{4}{5}x^{5/4} + c = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{16}{5}x^{5/4} + c$

---

(8) $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{4}{3}} - 3)\,dx = \int x^{-2/3} - 3x^{2/3}\,dx$

$= 3x^{1/3} - 3\cdot\frac{3}{5}x^{5/3} + c = 3x^{1/3} - \frac{9}{5}x^{5/3} + c$

---

(2) اوجد المشتقة $\frac{d}{dx}\ln|\sec x + \tan x|$

$= \frac{\sec x\tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x\,\cancel{(\tan x + \sec x)}}{\cancel{\sec x + \tan x}} = \sec x$

تمارين [45-49] صفحة 330 من الكتاب   عدد الأسئلة في الامتحان 1

(1 حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3-12t$ والموقع الابتدائي $s(0)=3$

السؤال كتابي

$v(t) = 3-12t. \quad , s(0)=3.$

$s(t) = \int 3-12t \; dt$

$= 3t-6t^2+c.$

$s(0) = 3.$

$c = 3$

$s(t) = 3t-6t^2+3.$

(2 حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

السؤال كتابي

$s(t) = \int 3e^{-t}-2 \; dt$

$= -3e^{-t}-2t+c.$

$s(0) = 0$

$-3+c = 0$

$c = 3.$

$s(t) = -3e^{-t}-2t+3.$

(3 حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=3\sin t+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=0$ والموقع الابتدائي $s(0)=4$

السؤال كتابي

$v(t) = \int 3\sin t+1 \; dt$

$= -3\cos t + t + c_1.$

$v(0) = 0$

$-3+c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 3.$

$v(t) = -3\cos t + t + 3.$

$s(t) = \int(-3\cos t + t + 3)\, dt.$

$= -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + c_2.$

$s(0) = 4 \rightarrow c_2 = 4.$

$s(t) = -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4.$

(1) حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=4$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

السؤال كتابي

$v(t)=\int t^2+1\,dt$

$=\frac{1}{3}t^3+t+c_1.$

$v(0)=4.$

$c_1=4.$

$v(t)=\frac{1}{3}t^3+4.$

$s(t)=\int \frac{1}{3}t^2+4\,dt$

$=\frac{1}{9}t^3+4t+c_2.$

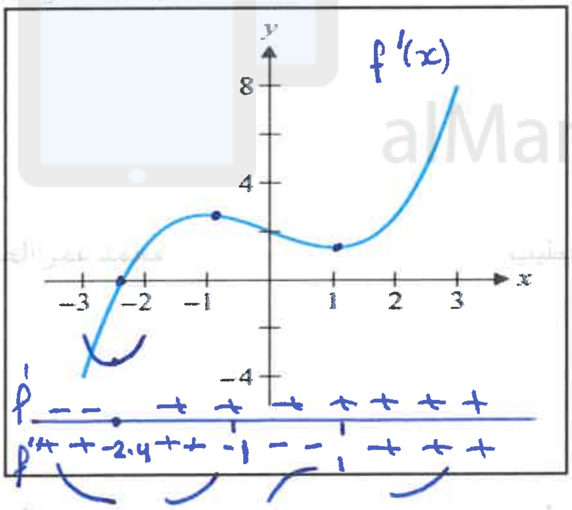
$s(0)=0 \rightarrow c_2=0$

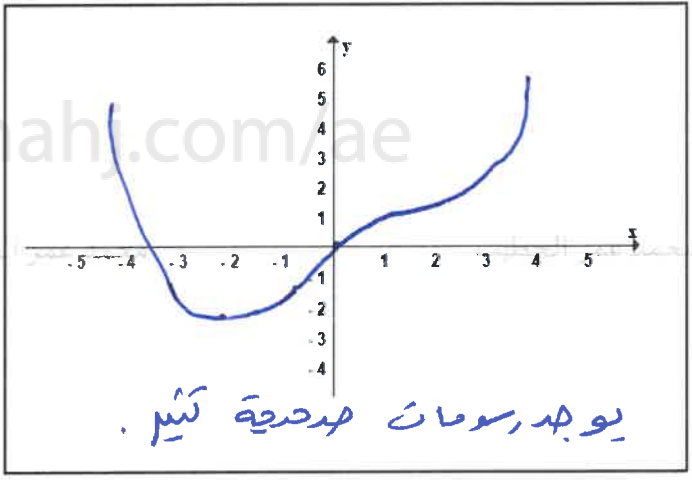
$s(t)=\frac{1}{9}t^3+4t$

---

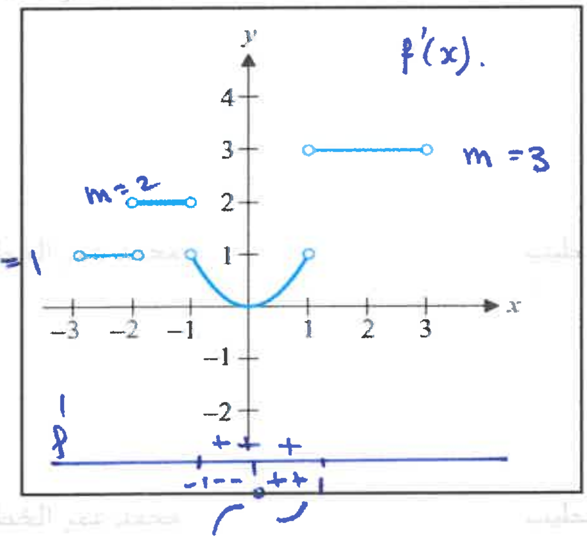
(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة $f(x)$

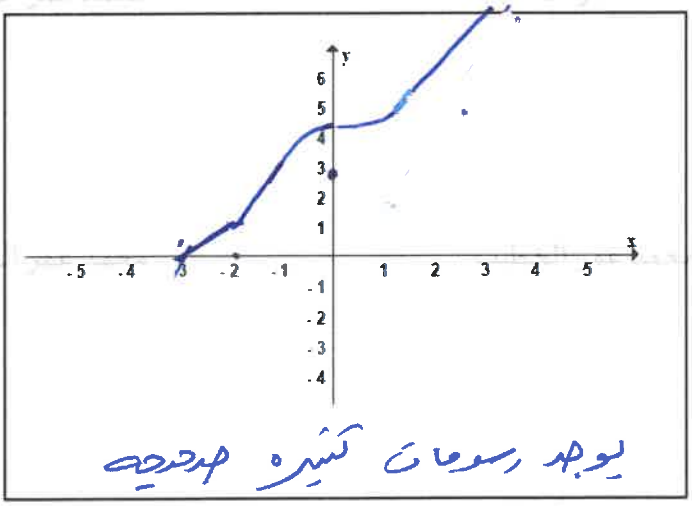
السؤال كتابي





يوجد رسومات مدرجة كثير .





يوجد رسومات كثيره مدرجه

تمارين [22-19] صفحة 337 من الكتاب — عدد الأسئلة في الامتحان 1

(1) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\vartriangle x$ لقيم x_i المعطاة

$$f(x)=x^2+4x \qquad x=0.2\,,0.4\,,0.6\,,0.8\,,1.0 \qquad \Delta x=0.2,\quad n=5$$

حسابية

$a_1 = 0.2 \quad , \quad d = 0.2$

$x_i = a_1 + (i-1)d$

$= 0.2 + (i-1)\,0.2$

$= 0.2 + 0.2i - 0.2$

$= 0.2i$

$f(x_i) = x_i^2 + 4x_i$

$= (0.2i)^2 + 4(0.2i)$

$= (0.2i)^2 + 0.8i$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\quad 0.2$

$= 0.2 \sum_{i=1}^{5} (0.2i)^2 + 0.8i$

من الآلة

$= 2.84$

---

(2) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\vartriangle x$ لقيم x_i المعطاة

$$f(x)=3x+5 \qquad x=0.4\,,0.8\,,1.2\,,1.6\,,2 \qquad \Delta x=0.4,\quad n=5$$

حسابية

$a_1 = 0.4 \quad d = 0.4$

$x_i = 0.4 + (i-1)\,0.4$

$= 0.4 + 0.4i - 0.4$

$= 0.4i$

$f(x_i) = 3x_i + 5$

$= 3(0.4i) + 5$

$= 1.2i + 5$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\quad 0.4$

$= 0.4 \sum_{i=1}^{5} (1.2i + 5)$

من الآلة

$= 17.2$

(1) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ لقيم x_i المعطاة

$f(x)=4x^2-2 \qquad x=2.1\,,\,2.2\,,\,2.3\,,\,\ldots\,,\,3.0 \qquad \Delta x=0.1, \quad n=10$

حسابية .

$a_1 = 2.1 \qquad d = 0.1$

$x_i = a_1 + (i-1)\,d$

$= 2.1 + (i-1)\,0.1$

$= 2.1 + 0.1i - 0.1$

$= 2 + 0.1i$

$f(x_i) = 4x_i^2 - 2\,,$

$= 4(2+0.1i)^2 - 2$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\cdot 0.1$

$= 0.1 \sum_{i=1}^{10} 4(2+0.1i)^2 - 2$

$= 24.34$ من الآلة

---

(2) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ لقيم x_i المعطاة

$f(x)=x^3+4 \qquad x=2.05\,,\,2.15\,,\,2.25\,,\,\ldots\,,\,2.95 \qquad \Delta x=0.1, \quad n=10$

حسابية

$a_1 = 2.05 \quad , \quad d = 0.1$

$x_i = a_1 + (i-1)d.$

$= 2.05 + (i-1)\,0.1$

$= 2.05 + 0.1i - 0.1$

$= 1.95 + 0.1i$

$f(x_i) = x_i^3 + 4$

$= (1.95+0.1i)^3 + 4$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\ \cdot 0.1$

$= 0.1 \sum (1.95 + 0.1\,i)^3 + 4$

$= 20.24$. من الآلة

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

	✓								×
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

$$A_L = \sum_{i=1}^{8} f(c_i)\Delta x$$

$$= 0.1[f(0) + f(0.1) + \cdots + f(0.7)]$$

$$= 0.1[2 + 2.4 + 2.6 + 2.7 + 2.6 + 2.4 + 2 + 1.4]$$

$$= 1.81.$$

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

	×								✓
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

$$A_R = 0.1[f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(0.8)]$$

$$= 0.1[2.4 + 2.6 + 2.7 + 2.6 + 2 + 1.4 + 0.6]$$

$$= 1.67$$

---

(3) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

	✓								×
x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

$$A_L = 0.2[f(0) + f(0.2) + \cdots + f(1.4)]$$

$$= 0.2[2 + 2.2 + 1.6 + 1.4 + 1.6 + 2 + 2.2 + 2.4]$$

$$= 3.08$$

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

$$A_R = 0.2\left[f(0.2)+f(0.4)+\cdots+f(1.6)\right]$$

$$= 0.2\left[2.2+1.6+1.4+1.6+2+2.2+2.4+2\right]$$

$$= 3.08$$

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

$$A_L = 0.1\left[f(1)+f(1.1)+\cdots+f(1.7)\right]$$

$$= 0.1\left[1.8+1.4+1.1+0.7+1.2+1.4+1.8+2.4\right]$$

$$= 1.182$$

---

(3) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

$$A_R = 0.1\left[f(1.1)+f(1.2)+\cdots+f(1.8)\right]$$

$$= 0.1\left[1.4+1.1+0.7+1.2+1.4+1.8+2.4+2.6\right]$$

$$= 1.262$$

تمارين [9-14] صفحة 356 من الكتاب **عدد الأسئلة في الامتحان 1**

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x\, i$$
$$= 0 + \frac{1}{n} i$$
$$= \frac{1}{n} i$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x_i) = 2x_i$$
$$= 2\left(\frac{1}{n} i\right)$$
$$= \frac{2}{n} i$$

(1) $\int_0^1 2x\,dx$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} i \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n+1}{n}.$$

$$\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

$$x_i = 1 + \frac{1}{n} i$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x_i) = 2x_i$$
$$= 2\left(1 + \frac{1}{n} i\right)$$
$$=$$

(2) $\int_1^2 2x\,dx$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(1+\frac{1}{n} i\right) \cdot \frac{1}{n}.$$
$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{n} i$$
$$= \frac{2}{n}\left[n + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= 2 + \frac{n+1}{n}.$$

$$\int_1^2 2x\,dx = \text{Lim}\, R_n = \text{Lim}\, 2 + \frac{n+1}{n}$$
$$= 2 + 1 = 3.$$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

(1) $\int_0^2 x^2\,dx$

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = 0 + \frac{2}{n} i = \frac{2}{n} i$

$f(x) = x^2$

$f(x_i) = x_i^{\,2}$

$= \left(\frac{2}{n} i\right)^2$

$= \frac{4}{n^2} i^2$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} i^2 \cdot \frac{2}{n}$

$= \frac{8}{n^3} \sum i^2$

$= \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{8}{3}$$

---

(2) $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$

$\Delta x = \frac{3}{n}$

$x_i = 0 + \frac{3}{n} i$

$f(x) = x^2 + 1$

$f(x_i) = x_i^{\,2} + 1$

$= \left(\frac{3}{n} i\right)^2 + 1$

$= \frac{9}{n^2} i^2 + 1$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$

$= \sum \left(\frac{9}{n^2} i^2 + 1\right) \frac{3}{n}$

$= \frac{3}{n} \sum \left(\frac{9}{n^2} i^2 + 1\right)$

$= \frac{3}{n} \left[\frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\right]$

$= \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} + 3$

$$\int_0^3 (x^2+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} + 3 = 9 + 3 = 12 .$$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

(1) $\int_{1}^{3} (x^2 - 3)\, dx$

$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = 1 + \frac{2}{n} i$

$f(x) = x^2 - 3$

$f(x_i) = x_i^2 - 3$

$= \left(1 + \frac{2}{n} i\right)^2 - 3$

$= 1 + \frac{4}{n} i + \frac{4}{n^2} i^2 - 3$

$= \frac{4}{n^2} i^2 + \frac{4}{n} i - 2$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$

$= \sum \left(\frac{4}{n^2} i^2 + \frac{4}{n} i - 2\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

$= \frac{2}{n} \sum \left(\frac{4}{n^2} i^2 + \frac{4}{n} i - 2\right)$

$= \frac{2}{n}\left[\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n} \frac{n(n+1)}{2} - 2n\right]$

$= \frac{8(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{4(n+1)}{n} - 4$

$\int_{1}^{3} (x^2 - 3)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{4(n+1)}{n} - 4$

$= \frac{8}{3}$

---

(2) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx$

$\Delta x = \frac{2-(-2)}{n} = \frac{4}{n}$

$x_i = -2 + \frac{4}{n} i$

$f(x) = x^2 - 1$

$f(x_i) = x_i^2 - 1$

$= \left(\frac{4}{n} i - 2\right)^2 - 1$

$= \frac{16}{n^2} i^2 - \frac{16}{n} i + 4 - 1$

$= \frac{16}{n^2} i^2 - \frac{16}{n} i + 3$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$

$= \sum \left(\frac{16}{n^2} i^2 - \frac{16}{n} i + 3\right)\left(\frac{4}{n}\right)$

$= \frac{4}{n} \sum \frac{16}{n^2} i^2 - \frac{16}{n} i + 3$

$= \frac{4}{n}\left[\frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{16}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3n\right]$

$= \frac{64(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{32(n+1)}{n} + 12$

$\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{64(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{32(n+1)}{n} + 12 = \frac{4}{3}.$

(1) اذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$$

$$= \frac{2}{4} = 1/2$$

---

(2) اذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{1}{n^2}[n(n+1)]$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}[n(n+1)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2}$$

$$= 1$$

---

(3) اذا كان $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$ على الفترة $[1,2]$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$R_n = \frac{2}{n}\left[n + \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 2 + \frac{2(n+1)}{2n}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim 2 + \frac{2(n+1)}{n}$$

$$= 2+1$$

$$= 3.$$

---

(4) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x) \ge 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

فاوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

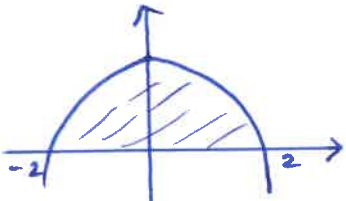
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = 1/3$$

تمارين [15-20] صفحة 356 من الكتاب　　　عدد الأسئلة في الامتحان 1

(1) اكتب التكامل او ناتج جمع تكاملات الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$

$$A=\int_{-2}^{2} 4-x^2\,dx$$



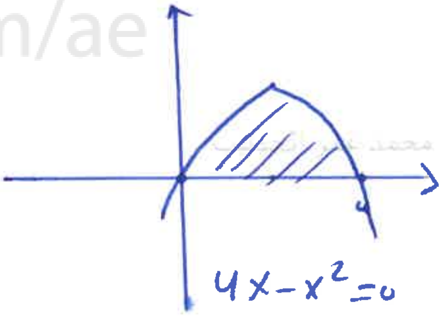
$4-x^2=0$

$x=\pm 2$

---

(2) اكتب التكامل او ناتج جمع تكاملات الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$

$$A=\int_{0}^{4} 4x-x^2\,dx$$



$4x-x^2=0$

$x=0\ ,\ x=4$

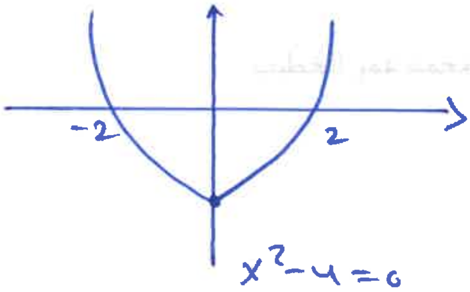
---

(3) اكتب التكامل او ناتج جمع تكاملات الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

$$A=\int_{-2}^{2} 0-(x^2-4)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2} -(x^2-4)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2} 4-x^2\,dx.$$



$x^2-4=0$

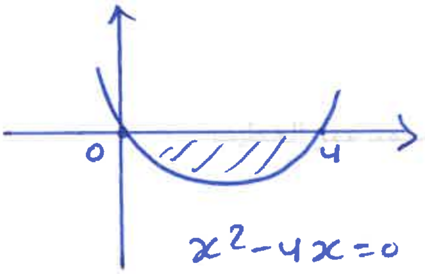
$x=\pm 2$

(1) اكتب التكامل او ناتج جمع تكاملات الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4x$

$$A = \int_0^4 0 - (x^2-4x)\,dx$$

$$= -\int_0^4 x^2-4x\,dx$$

$$= \int_0^4 4x - x^2\,dx.$$



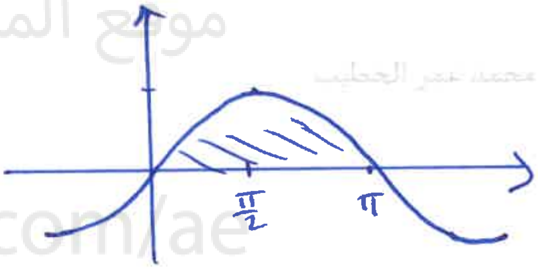
$x^2-4x=0$

$x=0,\ x=4$

---

(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x على الفترة حيث $0 \le x \le \pi$

$$A = \int_0^{\pi} \sin x\,dx.$$

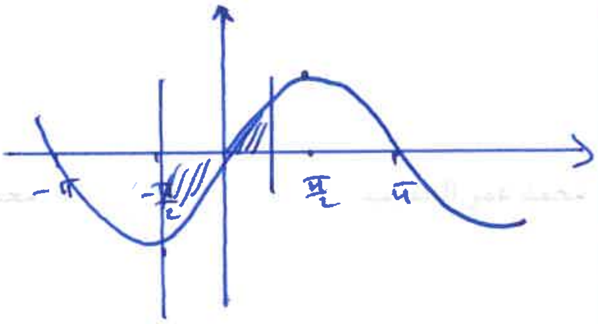


---

(3) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ محور x حيث $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0 - \sin x\,dx + \int_0^{\pi/4} \sin x - 0\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin x\,dx + \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx.$$



تمارين [29-34] صفحة 356 من الكتاب **عدد الأسئلة في الامتحان 1**

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير التكامل

(1) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2 \, dx$

ى

$f(x) = 3\cos x^2$

$f'(x) = -3\sin x^2 \cdot 2x$

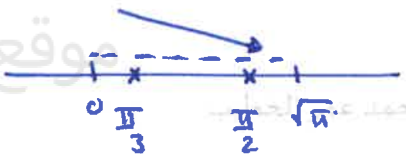
$= -6x \sin x^2$

$f'(x) = 0$

$x = 0$, $\sin x^2 = 0$

$x^2 = \pi$

$x = \pm\sqrt{\pi}$



بما ان الدالة $f(x)$ متناقصة فان

$f(\frac{\pi}{2}) \leq f(x) \leq f(\frac{\pi}{3})$

$3\cos \frac{\pi^2}{4} \leq 3\cos x^2 \leq 3\cos \frac{\pi^2}{9}$

$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos \frac{\pi^2}{4} dx \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2 dx \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos \frac{\pi^2}{9} dx$

$\frac{3\pi}{6}\cos \frac{\pi^2}{4} \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2 dx \leq \frac{3\pi}{6}\cos \frac{\pi^2}{9}$

$-1.23 \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2 dx \leq 0.72$

(2) $\int_{0}^{1/2} e^{-x^2} \, dx$

$0 \leq x \leq 1/2$

$0 \leq x^2 \leq 1/4$

$0 \geq -x^2 \geq -1/4$

$-1/4 \leq -x^2 \leq 0$

$e^{-1/4} \leq e^{-x^2} \leq e^0$

$e^{-1/4} \leq e^{-x^2} \leq 1$

$e^{-1/4} \leq e^{-x^2} \leq 1$

$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-1/4} dx \leq \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{1/2} 1 \, dx$

$\frac{1}{2} e^{-1/4} \leq \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx \leq 1/2$

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير التكامل

(1) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x^2+1}\, dx$

$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq x^2 \leq 4$

$0 \leq 2x^2 \leq 8$

$1 \leq 2x^2+1 \leq 9$

$\sqrt{1} \leq \sqrt{2x^2+1} \leq \sqrt{9}$

$1 \leq \sqrt{2x^2+1} \leq 3$

$$\int_{0}^{2} 1\, dx \leq \int_{0}^{2} \sqrt{2x^2+1}\, dx \leq \int_{0}^{2} 3\, dx$$

$$2 \leq \int_{0}^{2} \sqrt{2x^2+1}\, dx \leq 6$$

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx$

$-1 \leq x \leq 1$

$-1 \leq x^3 \leq 1$

$1 \leq x^3+2 \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x^3+2} \leq 1$

$1 \leq \frac{3}{x^3+2} \leq 3$

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx \leq \int_{-1}^{1} 3\, dx$$

$$1(1-^-1) \leq \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx \leq 3(1-^-1)$$

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx \leq 6$$

(1) جد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$$\int_{0}^{2} 3x^{2}\, dx (=8)$$

او يكون نص السؤال كتالي : اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x^{2}$ على الفترة $[0,2]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$f_{ave} = \frac{1}{2-0}\int_{0}^{2} 3x^{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(8)$$

$$= 4.$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^{2} = 4$$

$$c^{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = -\sqrt{\frac{4}{3}} \quad , \quad c = +\sqrt{\frac{4}{3}} \checkmark$$

مرفوض

---

(2) جد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$$\int_{-1}^{1} (x^{2}-2x)\, dx (=\frac{2}{3})$$

او يكون نص السؤال كتالي : اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^{2}-2x$ على الفترة $[-1,1]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$f_{ave} = \frac{1}{1-^{-}1}\int_{-1}^{1} x^{2}-2x \quad dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$c^{2}-2c = \frac{1}{3} .$$

$$3c^{2}-6c-1=0$$

$$c = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$$ مقبول

$$c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$ مرفوض

اذا كان $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 3$ و $\int_{1}^{3} g(x)\,dx = -2$ فاوجد

(1) $\int_{1}^{3} [f(x)+g(x)]\,dx =$ $\int_{1}^{3} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} g(x)\,dx$

$= 3 + (-2)$

$= 1$

(2) $\int_{1}^{3} [2f(x)-g(x)]\,dx =$ $2(3) - (-2) = 8$

(3) $\int_{1}^{3} [f(x)-g(x)]\,dx =$ $3 - (-2) = 5$

(4) $\int_{1}^{3} [4g(x)-3f(x)]\,dx =$ $4(-2) - 3(3) = -17$

تمارين [5-18] صفحة 366 من الكتاب عدد الأسئلة في الامتحان 1

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int_{1}^{4} (x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx = \int_{1}^{4} x^{3/2} + \frac{3}{x} \; dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x| \Big]_{1}^{4} = \frac{62}{5} + 3\ln 4.$

---

(2) $\int_{1}^{2} (4x-\frac{2}{x^{2}})\,dx = \int_{1}^{2} 4x - 2x^{-2} \; dx$

$= 2x^{2} + 2x^{-1} \Big]_{1}^{2}$

$= 2x^{2} + \frac{2}{x} \Big]_{1}^{2}$

$= 5$

---

(3) $\int_{0}^{1} (6e^{-3x}+4)\,dx = 6\frac{e^{-3x}}{-3} + 4x \Big]_{0}^{1}$

$= \frac{-2}{e^{3}} + 6.$

---

(4) $\int_{0}^{2} (\frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}})\,dx = \int_{0}^{2} \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - 2\frac{e^{3x}}{e^{3x}} \; dx$

$= \int_{0}^{2} e^{-x} - 2 \; dx$

$= -e^{-x} - 2x \Big]_{0}^{2}$

$= -1/e^{2} - 3$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin x - \cos x)\,dx = -2\cos x - \sin x \Big]_{\pi/2}^{\pi}$

$= 3$

---

(2) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 3\csc x \cot x\,dx = -3\csc x \Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= -3 + 3\sqrt{2}$

---

(3) $\int_{0}^{\pi/4} \sec t \tan t\,dt = \sec x \Big]_{0}^{\pi/4}$

$= \sqrt{2} - 1$

---

(4) $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt = \tan x \Big]_{0}^{\pi/4}$

$= 1$

---

(5) $\int_{0}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\sin^{-1} x \Big]_{0}^{1/2}$

$= 3\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$.

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2} dx = 4\tan^{-1} x \Big]_{-1}^{1} = 2\pi .$

---

(2) $\int_{1}^{4} \frac{t-3}{t} dt = \int_{1}^{4} \frac{t}{t} - \frac{3}{t} \, dt = \int_{1}^{4} 1 - \frac{3}{t} \, dt$

$= t - 3\text{Ln}|t| \Big]_{1}^{4} = 3 - 3\text{Ln}4.$

---

(3) $\int_{0}^{4} t(t-2) dt = \int_{0}^{4} t^2 - 2t \, dt = \frac{t^3}{3} - t^2 \Big]_{0}^{4}$

$= \frac{16}{3} .$

---

(4) $\int_{0}^{t} (e^{x/2})^2 dx = \int_{0}^{t} e^x dx = e^x \Big]_{0}^{t}$

$= e^t - e^0$

$= e^t - 1$

---

(5) $\int_{0}^{t} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_{0}^{t} 1 \, dx$

$= t.$

تمارين [5-14] و [17-26] صفحة 376 من الكتاب عدد الأسئلة في الامتحان 2

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$

$u = x^4+3$

$\frac{du}{dx} = 4x^3.$

$\frac{du}{4x^3} = dx.$

$= \int x^{\cancel{3}} \sqrt{u}\ \frac{du}{4\cancel{x^3}}$

$= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c.$

$= \frac{1}{6}(x^4+3)^{3/2} + c.$

---

(2) $\int\sqrt{1+10x}\,dx$

$u = 1+10x$

$\frac{du}{dx} = 10$

$\frac{du}{10} = dx$

$= \int\sqrt{u}\ \frac{du}{10}$

$= \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\ u^{3/2} + c$

$= \frac{1}{15}\ (1+10x)^{3/2} + c$

---

(3) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int\frac{\sin x}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{-\sin x}$

$= -\int u^{-1/2}$

$= -2\,u^{1/2} + c = -2\sqrt{\cos x} + c$

---

(4) $\int\sin^3 x\cos x\,dx$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int u^3 \cos x\ \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^3\ du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c$

$= \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int t^2 \cos t^3 \; dt$

$u = t^3$

$\frac{du}{dt} = 3t^2$

$\frac{du}{3t^2} = dt$

$= \int t^2 \operatorname{Cos} u \cdot \frac{du}{3t^2}$

$= \frac{1}{3} \int \operatorname{Cos} u \; du$

$= \frac{1}{3} \operatorname{Sin} u + c$

$= \frac{1}{3} \operatorname{Sin} t^3 + c$

---

(2) $\int \sin t(\cos t + 3)^{3/4} \; dt$

$u = \operatorname{Cost} + 3$

$\frac{du}{dt} = -\operatorname{Sint}$

$\frac{du}{-\operatorname{Sint}} = dt$

$= \int \operatorname{Sint} (u)^{3/4} \cdot \frac{du}{-\operatorname{Sint}}$

$= - \int u^{3/4} \; du$

$= -\frac{4}{7} u^{7/4} + c$

$= -\frac{4}{7} (\operatorname{Cost} + 3)^{7/4} + c$

---

(3) $\int x e^{x^2+1} \; dx$

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x \, e^u \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int e^u \, du$

$= \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c$

---

(4) $\int e^x \sqrt{e^x + 4} \; dx$

$u = e^x + 4$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$= \int e^x \sqrt{u} \cdot \frac{du}{e^x}$

$= \int \sqrt{u} \; du$

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (e^x + 4)^{3/2} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$du \cdot 2\sqrt{x} = dx$

$= \int \frac{e^{u}}{\sqrt{x}} \cdot du \cdot 2\sqrt{x}$

$= 2\int e^{u}\, du$

$= 2e^{u} + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

---

(2) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\, dx$

$u = 1/x$

$\frac{du}{dx} = -1/x^2$

$-du \cdot x^2 = dx$

$= \int \frac{\cos u}{x^2} \cdot -du \cdot x^2$

$= -\int \cos u\, du$

$= -\sin u + c = -\sin 1/x + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{u}\,(\sqrt{u}+1)}\, du$

$t = \sqrt{u} + 1$

$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$dt \cdot 2\sqrt{u} = du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{u} \cdot t}\, dt \cdot 2\sqrt{u}$

$= 2\int \frac{1}{t}\, dt$

$= 2\ln|t| + c = 2\ln|\sqrt{u}+1| + c$

$= 2\ln(\sqrt{u}+1) + c$

---

(4) $\int \frac{v}{v^2+4}\, dv$

$u = v^2 + 4$

$\frac{du}{dv} = 2v$

$\frac{du}{2v} = dv$

$= \int \frac{v}{u}\, \frac{du}{2v}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{2}\ln(v^2+4) + c$

اوجد التكاملات التالية

$$(1)\quad \int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\,dx$$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$du \cdot x = dx$

$= \int \frac{4}{x\ u^2} \cdot du \cdot x$

$= 4\int u^{-2}\,du$

$= -4u^{-1} + c = -4(\ln x + 1)^{-1} + c$

$$(2)\quad \int \tan 2x\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$$

$u = \cos 2x$

$\frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$

$= \int \frac{\sin 2x}{u} \cdot \frac{du}{-2\sin 2x}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$

$$(3)\quad \int \frac{(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$du \cdot \sqrt{1-x^2} = dx$

$= \int \frac{u^3}{\sqrt{1-x^2}}\,du \cdot \sqrt{1-x^2}$

$= \int u^3\,du$

$= \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\sin^{-1}x)^4}{4} + c$

$$(4)\quad \int x^2 \sec^2 x^3\,dx$$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int x^2 \sec^2 u \cdot \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}\int \sec^2 u\,du$

$= \frac{1}{3}\tan u + c$

$= \frac{1}{3}\tan x^3 + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx.$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$= \frac{1}{2} \sin^{-1} u + c = \frac{1}{2} \sin^{-1} x^2 + c$

---

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

$u = 1 - x^4$

$\frac{du}{dx} = -4x^3$

$\frac{du}{-4x^3} = dx$

$= \int \frac{x^3}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-4x^3}$

$= -\frac{1}{4} \int u^{-1/2}\,du$

$= -\frac{1}{4} \cdot 2u^{1/2} + c = -\frac{1}{2}(1-x^4)^{1/2} + c$

---

(3) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx.$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \frac{x^2}{1+u^2} \cdot \frac{du}{3x^2}$

$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+u^2}\,du$

$= \frac{1}{3} \tan^{-1} u + c$

$= \frac{1}{3} \tan^{-1} x^3 + c$

---

(4) $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

$u = 1 + x^6$

$\frac{du}{dx} = 6x^5$

$\frac{du}{6x^5} = dx$

$= \int \frac{x^5}{u} \cdot \frac{du}{6x^5}$

$= \frac{1}{6} \int u^{-1}\,du$

$= \frac{1}{6} \ln|u| + c = \frac{1}{6} \ln|1+x^6| + c$

$= \frac{1}{6} \ln(1+x^6) + c$.

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

---

(2) $\int \frac{1+x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1+x}{(1-x)(1+x)}\,dx$

$= \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + c$

---

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx = \int \frac{3\sqrt{x}}{1+(x^{3/2})^2}\,dx$

$u = x^{3/2}$

$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$\frac{2}{3}\frac{du}{x^{1/2}} = dx$

$= \int \frac{3\sqrt{x}}{1+u^2}\cdot\frac{2}{3}\frac{du}{x^{1/2}}$

$= 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du$

$= 2\tan^{-1} u + c$

$= 2\tan^{-1} x^{3/2} + c$

---

(4) $\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5}\,dx = \int \frac{x\sqrt{x}}{1+(x^{5/2})^2}\,dx$

$u = x^{5/2}$

$\frac{du}{dx} = \frac{5}{2}x^{3/2}$

$\frac{2}{5}\frac{du}{x^{3/2}} = dx$

$= \int \frac{x^{3/2}}{1+u^2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{du}{x^{3/2}}$

$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$

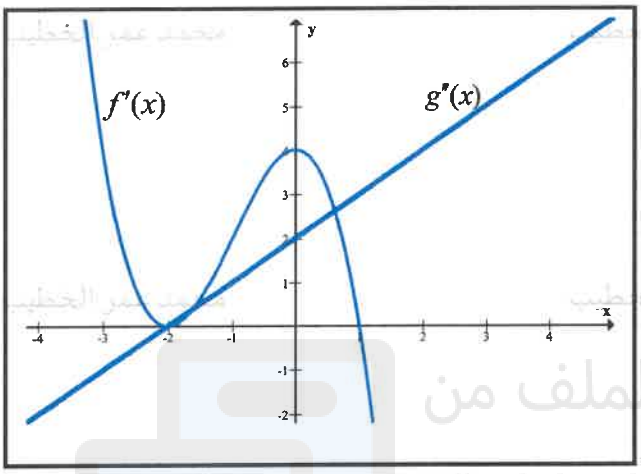
$= \frac{2}{5}\tan^{-1} u + c$

$= \frac{2}{5}\tan^{-1} x^{5/2} + c$

BONUS

اسئلة اضافية من خارج الهيكل

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالتين $g''(x) , f'(x)$ لإكمال الفراغات التالية:

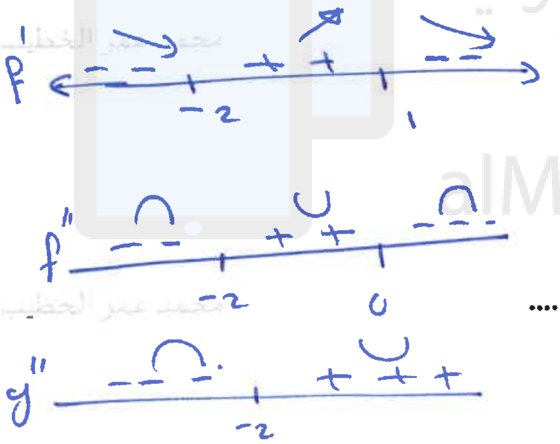


(أ) النقاط الحرجة للداله $f(x)$ هي:...-2,١...

(ب) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي:...(-∞,١)...

(ج) للدالة $f(x)$ قيم عظمى المحليه عند...$x=١$

(د) فتره التقعر للاعلى للدالة $f(x)$ هي:...(-2,٠)...



(هـ) فترات التقعر للاسفل للدالة $g(x)$ هي:...(-∞,-2)...

(و) عدد تقاط الانقلاب للدالة $f(x)$ تساوي:...$x=2$...

(ي). قيمة x التي عندها للدالتين $f(x),g(x)$ نقطة انقلاب هي :...$x=-2$...

(م) ايهما أكبر $f(3)$ ام $f(2)$ مع ذكر السبب...$f(2)$ لأن

الدالة f متناقصة ع الفترة (١,∞)

(ن) اذا كان للدالة $g(x)$ نقاط حرجة عند $-3\ ,\ -1$

فبّين نوع القيم القصوى المحلية عند هذه القيم الحرجة.

$g''(-1) > 0 \Rightarrow$ للدالة قيمة صغرى محلية عند $x=-1$

$g''(1) < 0 \Rightarrow$ للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=1$

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$

$D = [-1, 3]$.

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$

$f'(x)$ غ.م $\rightarrow x = -1, 3$.

الاعداد الحرجة $-1, 1, 3$

$f(1) = 2$

$f(-1) = 0$

$f(3) = 0$

عظمى مطلقة 2 عند $x = 1$

صغرى مطلقة 0 عند $x = -1, 3$.

---

(2) مصنع لانتاج دمى الاطفال ، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم ،فاذا كانت دالة التكلفة لانتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ اوجد عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح.

$r(x) = 20x$

$p(x) = r(x) - c(x)$

$= 20x - (0.002x^2 + 8x + 5000)$

$p' = 20 - (0.004x + 8)$

$= 12 - 0.004x.$

$p'(x) = 0 \rightarrow x = 3000$

$p''(x) = -0.004 < 0$

للدالة قيمة عظمى كلية وحيدة

عند $x = 3000$

---

(3) لتكن $C(x)=x^3-6x^2+15x$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة بالالاف . اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$\bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^3 - 6x^2 + 15x}{x} = x^2 - 6x + 15.$$

$\bar{c}'(x) = 2x - 6$

$\bar{c}'(x) = 0 \rightarrow x = 3.$

$\bar{c}''(x) = 2$

$\bar{c}''(3) = 2 > 0$

للدالة قيمة صغرى كلية وحيدة.

الانتاج هو

3000.

(1) اذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p)=200(30-p)$ **حيث** p **سعر القطعة**

اوجد مدى الاسعار الذي يكون فيه مرونة الطلب $E<-1$ **.(اوجد الفترة التي يكون فيها الطلب مرن)**

$$E=\frac{p\cdot f'(p)}{f(p)}$$

$$=\frac{p\cdot(-200)}{200(30-p)}$$

$$=\frac{-p}{30-p}=\frac{p}{p-30}$$

$$\frac{p}{p-30}<-1.$$

$p>-(p-30)$ لانه $p<30$

$p>-p+30$

$2p>30$

$p>15 \longrightarrow (15,30)$ مدى الاسعار

---

(2) اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=4p(t)[5-p(t)]$ **حيث تمثل** $p(t)$ **عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ،اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى**

$$f(p)=4p[5-p]=20p-4p^2$$

$$f'(p)=20-8p.$$

$f'(p)=0 \longrightarrow p=2.5$

~~p~~ $f''(p)\ -8<0$

التعداد السكاني الذي يكون عنده معدل النمو أكبر ما يمكن هو 2.5 مليون

---

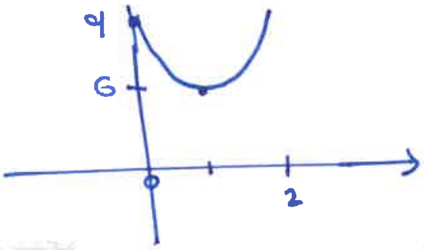
(3) تحدد العلاقة $m(x)=(x-1)^3+6x$ **حيث** $0\le x\le 2$ **كتلة أول** x **متر من سلك معدني رقيق**

اوجد الكثافة الخطية ثم صف كيف تتوزع الكثافة

$$\rho(x)=m'(x)$$

$$=3(x-1)^2+6.$$

منحنى الدالة



الوصف.

تتوزع الكثافة.

بحيث يكون عند الاطراف أكثر من الوسط.

(1) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1+\ln x^2$ حيث $x>0$

$$F'(x) = 2\cdot \ln(ex) + 2x\cdot \frac{e}{ex} - 3$$

$$= 2\ln(ex) + 2 - 3.$$

$$= 2\ln(ex) - 1$$

$$= 2[\ln e + \ln x] - 1$$

$$= 2[1 + \ln x] - 1$$

$$= 2 + 2\ln x - 1$$

$$= 1 + 2\ln x.$$

$$= 1 + \ln x^2 \quad \#$$

---

(2) اوجد $F'(x)$ اذا كان $F(x)=\int_{0}^{\sin^{-1}x} \sin t\, dt$

$$F'(x) = \sin(\sin^{-1}x)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

(3) اذا كان $F(x)=x+\int_{\tan x}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ ، فاثبت ان $F'(x)=0$

$$F(x) = x - \int_{0}^{\tan x} \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{\tan^2 x + 1}\cdot \sec^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{\sec^2 x}\cdot \sec^2 x = 1 - 1 = 0 \quad \#$$

(1) عبر عن النهاية في بصورة تكامل محدود ثم اوجد قيمة النهاية

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\pi c_i\ \frac{1}{n}.$$

$$=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

$$\Delta x=\frac{1}{n}.$$
$$=\frac{b-a}{n}$$
$$b-a=1.$$
$$a=0\ ,\Rightarrow b=1$$
$$c_i=0+\Delta x\,i$$
$$=0+\frac{1}{n}i$$
$$c_i=\frac{1}{n}i$$

---

(2) عبر عن النهاية في بصورة تكامل محدود ثم اوجد قيمة النهاية

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{c_i}\cdot\Delta x$$

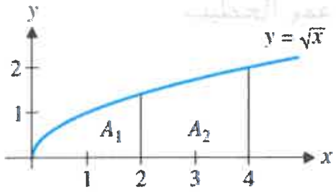
$$=\int_0^2 e^x\,dx=e^x\Big]_0^2=e^2-1.$$

$$\Delta x=\frac{2}{n}=\frac{b-a}{n}$$
$$b-a=2$$
$$a=0\Rightarrow b=2$$
$$c_i=0+\frac{2}{n}i$$
$$c_i=\frac{2}{n}i$$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\ \frac{2}{n}$$



$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2+\frac{2i}{n}}\cdot\frac{2}{n}.$$

$$=\lim\sum f(c_i)\cdot\Delta x$$

$$=\int_2^4\sqrt{x}\,dx=A_2$$

$$\Delta x=\frac{2}{n}.=\frac{b-a}{n}.$$
$$c_i=2+\frac{2}{n}i$$
$$=a+\Delta x\,i$$
$$a=2\rightarrow b=4.$$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{e^{-x}+1} \, dx \times \frac{e^x}{e^x}$

$= \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$

$= \text{Ln}\,|1+e^x| + c.$

---

(2) $\int \frac{1}{1+\sin x} \, dx \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}.$

$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} \, dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx.$

$= \int \sec^2 x - \sec x \tan x \, dx = \tan x - \sec x + c.$

---

(3) $\int x(x-2)^5 \, dx$

$u = x-2$

$du = dx.$

$\rightarrow x = u+2$

$= \int x \, u^5 \, du$

$= \int (u+2) \, u^5 \, du$

$= \int u^6 + 2u^5 \, du$

$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{2}{6} u^6 + c$

$= \frac{1}{7} (x-2)^7 + \frac{1}{3} (x-2)^6 + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

اكمال المربع

$6x-x^2$

$= -[x^2-6x]$

$= -[x^2-6x+9-9]$

$= -[(x-3)^2-9]$

$= 9-(x-3)^2$

$u = \frac{x-3}{3}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3} \rightarrow 3\,du = dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,3\,du$

$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+c$

---

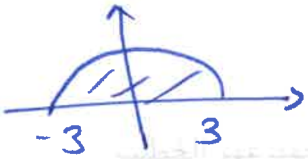
(2) $\int \sec x \quad dx \quad \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

---

(3) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ = نصف مساحة دائرة نصف قطرها 3



$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi$

---

(4) $\int_0^5 x|3x-6|\,dx$

$|2x-6| \quad 6-2x \quad \underset{2}{|} \quad 2x-6$

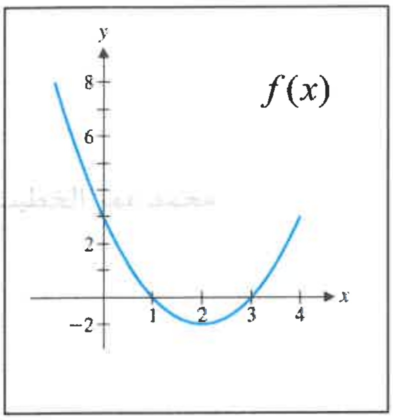
$x|3x-6| \quad x(6-3x) \quad \underset{2}{|} \quad x(2x-6)$

$= \int_0^2 x(6-3x)\,dx + \int_2^5 x(3x-6)\,dx$

$= \int_0^2 6x-3x^2\,dx + \int_2^5 3x^2-6x\,dx$

$= 3x-x^3\Big]_0^2 + x^3-3x\Big]_2^5 = 58$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow H'(x)=f(x)$$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

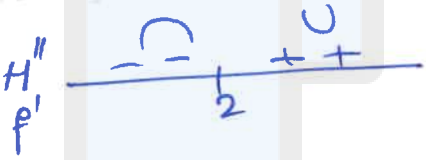
(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $H(x)$ ......1 و 3......

(ب) اوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$ ......$(-\infty,1)$ ، $(3,\infty)$......

(ج) اوجد فترة التناقص للدالة $H(x)$ ......$(1,3)$......

(د) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة عظمى محلية......$x=1$......

(هـ) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية......$x=3$......



(و) اوجد فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ ......$(2,\infty)$......

(ي) اوجد فترة التقعر للاسفل للدالة $H(x)$ ......$(-\infty,2)$......

(ل) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ نقطة انقلاب......$x=2$......

---

(2) اذا كان $f(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<1\\ 2t & 1\le t\end{cases}$ دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ حيث $H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

فاوجد الدالة $H(x)$

$0\le x<1$

$$H(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 2\,dt=2x$$

$1\le x$

$$H(x)=\int_0^1 2\,dt+\int_1^x 2t\,dt=2+t^2\Big]_1^x=2+x^2-1$$
$$=x^2+1$$

$$\therefore H(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2+1 & 1\le x\end{cases}$$

(1) اذا كان $f(1)=3\,,f(4)=-5$ ، فاوجد $\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$$\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$$

$$= \int x\,f'(u)\,\frac{du}{2x}.$$

$$= \int_1^4 f'(u)\,du.$$

$$= f(4) - f(1) = -5 - 3 = -8$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$x = 2 \to u = 4.$

---

(2) اذا كان $f(0)=1\,,f(1)=9$ ، فاوجد $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\,f'(x)\,dx$

$$= \int 3\sqrt{u}\;f'(\cancel{x})\cdot\frac{du}{f'(x)}$$

$$= \int_1^9 3\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_1^9 3\,u^{1/2}\,du$$

$$= 3\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= 2\left[(9)^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$

$$= 2\,[27 - 1]$$

$$= 54$$

$u = f(x)$

$\frac{du}{dx} = f'(x)$

$\frac{du}{f'(x)} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = f(0) = 1$

$x = 1 \to u = f(1) = 9$

إنتهت اسئلة الهيكل للفصل الدراسي الثاني بحمد الله

نتمنى لكم التوفيق والنجاح