

كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

<u>تطبيق المناهج الإماراتية</u>	<u>الاجتماعيات</u>	<u>الرياضيات</u>
<u>الصفحة الرسمية على التلغرام</u>	<u>الاسلامية</u>	<u>العلوم</u>
<u>الصفحة الرسمية على الفيسبوك</u>	<u>الانجليزية</u>	
<u>التربية الاخلاقية لجميع الصفوف</u>	<u>اللغة العربية</u>	
<u>التربية الرياضية</u>		
مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام
<u>الصف الأول</u>	<u>الصف الأول</u>	<u>الصف الأول</u>
<u>الصف الثاني</u>	<u>الصف الثاني</u>	<u>الصف الثاني</u>
<u>الصف الثالث</u>	<u>الصف الثالث</u>	<u>الصف الثالث</u>
<u>الصف الرابع</u>	<u>الصف الرابع</u>	<u>الصف الرابع</u>
<u>الصف الخامس</u>	<u>الصف الخامس</u>	<u>الصف الخامس</u>
<u>الصف السادس</u>	<u>الصف السادس</u>	<u>الصف السادس</u>
<u>الصف السابع</u>	<u>الصف السابع</u>	<u>الصف السابع</u>
<u>الصف الثامن</u>	<u>الصف الثامن</u>	<u>الصف الثامن</u>
<u>الصف التاسع عام</u>	<u>الصف التاسع عام</u>	<u>الصف التاسع عام</u>
<u>الصف التاسع متقدم</u>	<u>الصف التاسع متقدم</u>	<u>الصف التاسع متقدم</u>
<u>الصف العاشر عام</u>	<u>الصف العاشر عام</u>	<u>الصف العاشر عام</u>
<u>الصف العاشر متقدم</u>	<u>الصف العاشر متقدم</u>	<u>الصف العاشر متقدم</u>
<u>الحادي عشر عام</u>	<u>الحادي عشر عام</u>	<u>الحادي عشر عام</u>
<u>الحادي عشر متقدم</u>	<u>الحادي عشر متقدم</u>	<u>الحادي عشر متقدم</u>
<u>ثاني عشر عام</u>	<u>الثاني عشر عام</u>	<u>الثاني عشر عام</u>
<u>ثاني عشر متقدم</u>	<u>ثاني عشر متقدم</u>	<u>ثاني عشر متقدم</u>

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من
الدرجة الأولى

الوحدة السابعة

INTEGRATION TECHNIQUES

مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

التكامل غير المحدود

$$(1) (a) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$(2) \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$$

$$(3) \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$$

$$(4) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(5) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(6) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(7) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$8) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$9) \int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$11) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$12) \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

وسوف نعمم ما يلي عن طريق استخدام تعويض بسيط:

$$**) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$**) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$**) \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + c$$

في الأمثلة التالية انتبه للتكاملات التي تحل عن طريق التعويض العادي والتكاملات التي تستخدم \ln في الإجابة

أوجد قيمة التكامل

مثال

$$1. \int \frac{2}{16+x^2} dx$$

alManahj.com/ae

$$2. \int \frac{3}{4+4x^2} dx$$

$$3. \int \frac{5}{x^2+36} dx$$

$$4. \int \frac{5}{3\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$6. \int \frac{4}{5\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$7. \int \frac{9}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx$$

alManahj.com/ae

$$8. \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}} dx$$

$$9. \int \frac{7}{|4x|\sqrt{x^2-9}} dx$$

$$10. \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-5)^2}} dx$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}} dx$$

alManahj.com/ae

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$13. \int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$14. \int \frac{4}{5+2x+x^2} dx$$

alManahj.com/ae

$$15. \int \frac{4x+4}{5+2x+x^2} dx$$

$$16. \int \frac{4x}{5+2x+x^2} dx$$

$$17. \int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx$$

alManahj.com/ae

$$18. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

$$19. \int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$20. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

alManahj.com/ae

$$21. \int \frac{1}{\sqrt{x+x}} dx$$

$$22. \int \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

$$23. \int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x} dx$$

alManahj.com/ae

$$24. \int \frac{4}{x^{1/3}(1+x^{2/3})} dx$$

Integration by Parts

التكامل بالأجزاء

قاعدة التكامل بالأجزاء

$$\int u dv = uv - \int v du$$

تكامـل سهل حسابه

استخدم التكامل بالأجزاء أو الجدولي (الاختزال) لحساب :

مثال

1. $\int x \cos x dx$

alManahj.com/ae

2. $\int x^2 \sin x dx$

3. $\int x^2 \sin 4x \, dx$

4. $\int_0^1 x^2 \sin \pi x \, dx$

alManahj.com/ae

5. $\int x \sec^2 x \, dx$

6. $\int 3x \csc^2 x \, dx$

7. $\int (x^2 - 5x) e^x \, dx$

alManahj.com/ae

8. $\int x^4 e^{-x} \, dx$

9. $\int x^2 e^{-3x} dx$

10. $\int x^2 e^{x^3} dx$

alManahj.com/ae

11. $\int e^x \cos x dx$

$$12. \int e^{2x} \sin x \, dx$$

$$13. \int e^x \sin 4x \, dx$$

alManahj.com/ae

$$14. \int \sin x \sin 2x \, dx$$

$$15. \int x^3 \ln x \, dx$$

$$16. \int \ln x \, dx$$

alManahj.com/ae

$$17. \int (\ln x)^2 \, dx$$

$$18. \int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

$$19. \int x^3 e^{x^2} \, dx$$

alManahj.com/ae

$$20. \int \sin \sqrt{x} \, dx$$

$$21. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$22. \int \sin(\ln x) dx$$

alManahj.com/ae

$$23. \int \cos^{-1} x dx$$

24. $\int \tan^{-1} x dx$

TRIGONOMETRIC TECHNIQUES OF INTEGRATION

طرائق تكامل الدوال المثلثية

أولاً: الصيغة $\int \sin^m x \cos^n x dx$ الحالة 1: إذا كان n أو m عدداً فردياً موجباً

alManahj.com/ae

أوجد قيمة التكامل

مثال

1. $\int \sin x \cos^4 x dx$

2. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

$$3. \int \cos^3 x \sin^4 x dx$$

مكامل مع قوة فردية ****

$$4. \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$$

alManahj.com/ae

$$5. \int \sqrt{\sin x} \cos^2 x dx$$

$$6. \int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx$$

$$7. \int \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$$

alManahj.com/ae

الحالة 2: إذا كان n أو m عدداً صحيحان زوجيان موجبان

$$8. \int \sin^2 x \, dx$$

$$9. \int \cos^4 x \, dx$$

$$10. \int \cos^2(x+1) \, dx$$

alManahj.com/ae

$$11. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$$

ثانياً: الصيغة $\int \tan^m x \sec^n x dx$

الحالة 1: إذا كان m عدد صحيح فردي موجب

أوجد قيمة التكامل

مثال

12. $\int \tan^3 x \sec^3 x dx$

alManahj.com/ae

13. $\int \tan x \sec^3 x dx$

$$14. \int \tan(2x + 1) \sec^3(2x + 1) dx$$

$$15. \int x \tan^3(x^2 + 1) \sec(x^2 + 1) dx$$

alManahj.com/ae

الحالة 2: إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب

أوجد قيمة التكامل

مثال

$$1. \int \tan^2 x \sec^4 x dx$$

$$2. \int \tan^4 x \sec^2 x dx$$

$$3. \int \cot^2 x \csc^4 x dx$$

alManahj.com/ae

$$4. \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x dx$$

أوجد قيمة التكامل:

$$\int \sec x \, dx$$

التعويض مع الدوال المثلثية

alManahj.com/ae

ملخص التعويضات في الدوال المثلثية في الجدول التالي:

المتطابقة	الفترة	التعويض مع الدوال المثلثية	التعبير
$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$x = a \sin \theta$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$x = a \tan \theta$	$\sqrt{a^2 + x^2}$
$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$x = a \sec \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2}$

أوجد قيمة التكامل

مثال

$$1. \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

2. $\int x^3 \sqrt{8 + x^2} dx$

alManahj.com/ae

3. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$

$$4. \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$$

alManahj.com/ae

$$5. \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

الكسور الجزئية Partial Fractions

أولاً : درجة البسط أقل من درجة المقام

أ (المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى)

مثال أ (أوجد الكسور الجزئية بتفكيك $\frac{5x-1}{x^2-2x-15}$

alManahj.com/ae

حيث $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-2x-15}$

ب (أوجد $\int f(x) dx$

ثم أوجد $\int f(x) dx$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$$

أوجد الكسور الجزئية بتفكيك

مثال

alManahj.com/ae

أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب والدالة الأصلية.

مثال

1. $\frac{2}{(x-5)(x-3)}$

2. $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$ (عامل مكرر)

3. $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ (عامل مكرر)

alManahj.com/ae

ب) المقامات التي بها عامل من الدرجة الثانية ولا يحل

أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب

مثال

1. $\frac{x+2}{x^3+x}$

alManahj.com/ae

2. $\frac{x^2+3x+2}{x^3-1}$

$$3. \frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$$

ثانياً : درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

اكتب الدالة النسبية على الصورة $q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة

مثال

$h(x)$

ثم أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب من $\frac{r(x)}{h(x)}$ ثم أوجد التكامل غير المحدود لكل كسر

$$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}$$

جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية

من خلال جدول التكامل المذكور في الدرس هنالك بعض الصيغ التي تستخدم لحساب قيم بعض التكاملات مباشرة والتي كنا نجدها باستخدام التعويض مع الدوال المثلثية .

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + c$$

أوجد قيمة التكامل

مثال

$$1. \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x} dx$$

alManahj.com/ae

$$2. \int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x} dx$$

راجع بعض الصيغ الأخرى الموجودة في الدرس .

ملاحظة

يتبع درسي المعادلات التفاضلية في وقت لاحق .