الاتصال ونتائجه

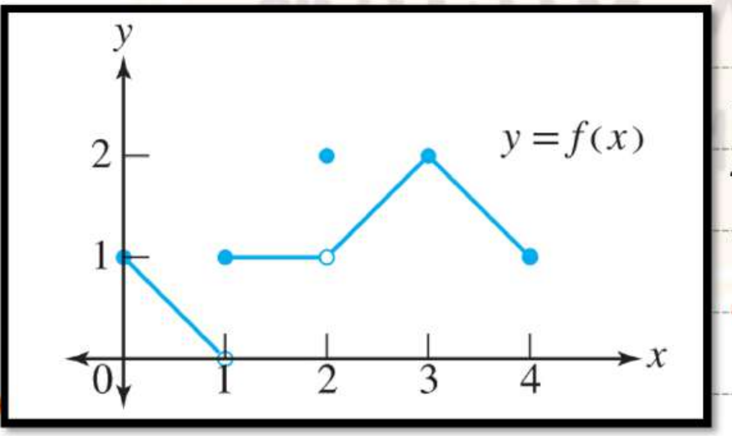
الدوال المتصلة هي "الدوال التي تتغير قيمها بتغير قيم من مدخلاتها، لكن هذا التغير لا يتم بالقفز من قيمة إلى أخرى، بل عبر المرور بكل القيم الواقعة بين هاتين القيميتين"

من الناحية الهندسية نقول إن دالة متصلة في فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة في هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم من الورقة، أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات، أما المنحنيات التي بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (منفصلة)

وسندرس في الاتصال:
- اتصال دالة عند نقطة
- اتصال دالة على فترة

أولًا: اتصال دالة عند نقطة

<u>من أجل فهم دقيق لمفهوم الاتصال عند نقطة من خلال التمثيل البياني</u>



<u>نلاحظ</u>: عند $x = 1$

$\lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

$f(1) = 1$

الدالة غير متصلة عند $x = 1$

<u>نلاحظ</u>: عند $x = 2$

$\lim_{x\to2} f(x) = 2$

$f(2) = 2$, $\lim_{x\to2} f(x) \neq f(2)$

الدالة غير متصلة عند $x = 2$

نلاحظ: عند $x = 3$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$

$$f(3) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$$

وهنا الدالة متصلة عند $x = 3$

وعليه يمكن استنتاج تعريف اتصال دالة عند نقطة (داخلية) تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ إذا تحققت الشروط التالية

1) $f(c)$ معرفة

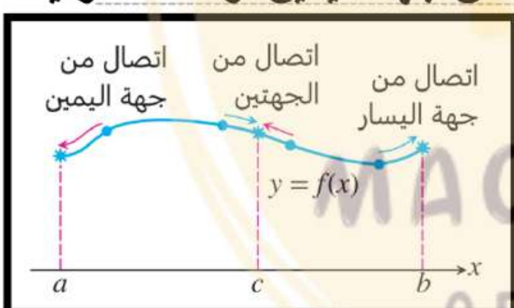
2) $\lim_{x\to C} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to C} f(x) = f(C)$

يكفي عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند $x = c$

نقطة طرفية: تكون الدالة متصلة عند a لها نهاية من جهة اليمين أو نقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار إذا كان

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$



مثال

ابحث اتصال الدالة عند $x = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ 3 - x, & x < 1 \end{cases}$$

الحل

$$\lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2 \qquad = \lim_{x\to 1^-} 3 - x = 2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \qquad , \qquad f(1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$$

وبالتالي تكون الدالة متصلة عند $x = 1$

تمرين

ابحث اتصال الدالة عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 2 \\ 5x-3, & x < 2 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 5x-6, & x \geq 3 \\ 3x+4\ , & x < 2 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x = 1$

$$f(x) = |x - 1| + 2$$

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 4$ حيث $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}$

▪ إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & x\le 2 \\ |x-3| \quad , & x>2 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x=2$, $x=3$

▪ ابحث اتصال الدالة عند $x=2$ حيث $f(x)=\sqrt{x+2}$

▪ ابحث اتصال الدالة عند $x=2$ حيث $f(x)=\sqrt[3]{2-x^3}$

أنواع النقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

سبق وذكر أن الدوال التي بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة أو منفصلة

1) الفجوة (قابلة للإزالة)

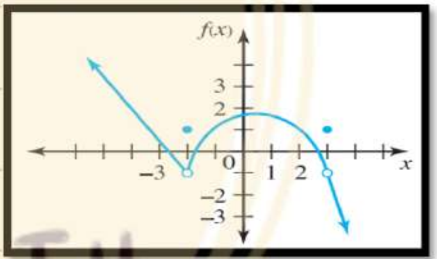
2) القفزة (غير قابلة للإزالة) وفيها تكون النهاية غير موجودة.

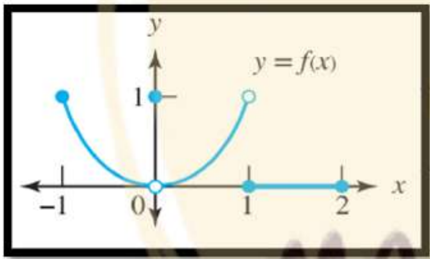
$$\lim_{x\to C^+} f(x) \neq \lim_{x\to C^-} f(x) =$$ عدد حقيقي

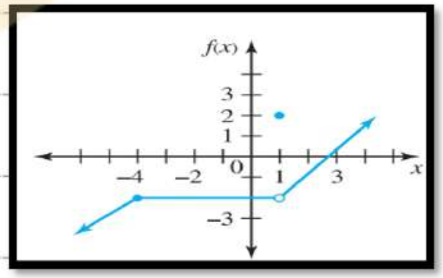
3) لا نهائي (غير قابلة للإزالة): النهاية غير موجودة أو $\pm\infty$ إحدى النهايتين تساوي $\pm\infty$ أو كلاهما.

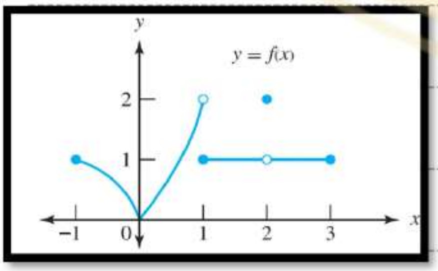
4) التذبذبي (غير قابلة للإزالة): النهاية غير موجودة والدالة تتذبذب عند نقطة الانفصال.

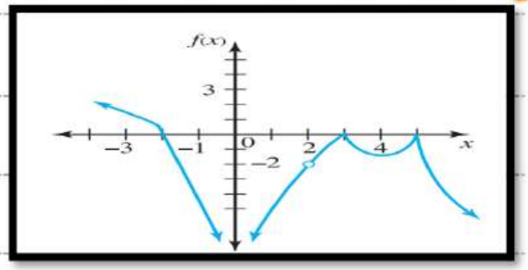
حدد نقاط الانفصال ونوعها في كل من التمثيلات البيانية التالية:

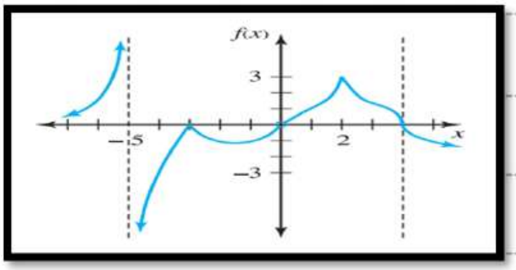


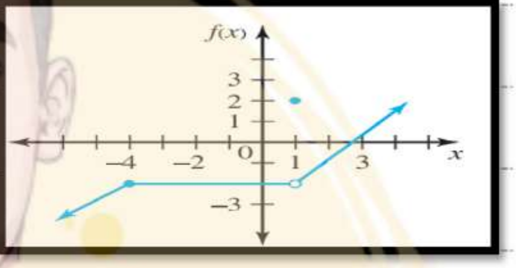


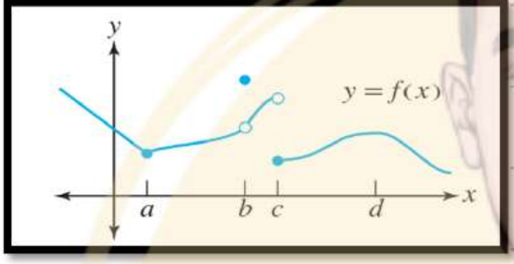












مثال

أوجد كل قيم $x = a$ التي تكون الدالة غير متصلة عندها

الحل

1) $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x-7}$

الدالة النسبية غير متصلة عند القيم الغير معرفة فيها (أصفار المقام)

الدالة غير متصلة عند $x = \dfrac{7}{2}$

2) $g(x) = e^{2x-3}$ الدالة الأسية متصلة لكل قيم المتغير x

3) $h(x) = \sqrt{5x+3}$ دالة الجذر التربيعي متصلة حينما تكون معرفة

وعليه ستكون الدالة h متصلة عند كل $5x + 3 \geq 0$

$x \geq \dfrac{-3}{5}$

$\therefore$ الدالة h غير متصلة عند كل $x < \dfrac{-3}{5}$

تمرين

حدد نقاط عدم الاتصال ونوع عدم الاتصال إن وجدت

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

4) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

5) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

6) $f(x) = ln(x+1)$

7) $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$

8) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

أوجد قيم x حيث تكون الدالة متعددة التعريف f غير متصلة

في الدوال متعددة التعريف نبحث عن نقاط الانفصال عند نقاط التفرع على الاغلب

مثال

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-3x+4, & 1\le x\le 3 \\ 5-x, & x>3 \end{cases}$$

الحل

$x+1$		x^2-3x+4		$5-x$
	1		3	

كل جزء من الدالة كثيرة حدود فإن نقاط الانفصال للدالة يمكن أن تكون عند نقاط التفرع هي $x=1,3$

عند $x=1$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x^2-3x+4\right)=2$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=2 \quad ,f(1)=1^2-3(1)+4=2$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(2)=2$$

لذلك الدلة متصلة عند $x=1$

عند $x=3$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}(5-x)=2$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\left(x^2-3x+4\right)=4$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)\neq\lim_{x\to3^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to3} f(x)$ غير موجودة

وبالتالي الدالة غير متصلة عند $x=3$

تمرين

أوجد كل قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة

حيث

$$f(x)=\begin{cases}5x-4, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 3\\ x+6, & x>3\end{cases}$$

HOMEWORK

أوجد كل قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ \frac{x}{2}+1, & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ 2, & x=2\\ \frac{x}{2}+1, & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<1\\ x^3-2x+5, & x\geq 1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\neq -1\\ 2, & x=-1\end{cases}$$

الشرح اضغط

- ☐ إذا كانت موجودة $\lim_{x\to C} f(x)$ ولكن الدالة f غير متصلة عند $x = c$
بسبب أن $f(C)$ غير معرفة أو $\lim_{x\to C} f(x) \neq f(c)$
فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة f لتصبح متصلة عند $x = c$

- ☐ أما إذا كانت $\lim_{x\to C} f(x)$ غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند $x = c$

مثال

لتكن $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

بين أن الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x = 3$ وحدد نوع الانفصال أعد تعريف الدالة $f(x)$ لتصبح الدالة متصلة عند $x = 3$ إن امكن

الحل

الدالة غير معرفة عند $x = 3$ لأن المقام عندما صفر إذن الدالة غير متصلة عند $x = 3$

لتحديد نوع عدم الاتصال

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{5}{6}$$

إذن للدالة عدم اتصال قابلة للإزالة عند $x = 3$

ويمكن إعادة التعريف

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}, & x \neq 3, x \neq -3 \\ \dfrac{5}{6}, & x = 3 \end{cases}$$

تمرين

ابحث اتصال الدالة

عند $x = 4$ $\quad f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}$

وإذا كانت f غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة f بحيث تكون الدالة متصلة عند $x = 4$

❑ أعد تعريف كل من الدوال لكي تصبح متصلة عند $x = 2$

الدالة	F(2)	$\lim\limits_{x\to C} f(x)$	بسبب عدم الاتصال عند x=2	إعادة تعريف لتصبح
$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$	1	4		f متصلة عند $x = 2$
$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$				
$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ \text{صفر}, & x = 2 \\ -1, & x = 2 \end{cases}$				

تذكر أن:

➢ لا يمكن إعادة تعريف الدالة (إيجاد الدالة الموسعة) لدالة لها نقطة انفصال نوعه (قفزة أولا نهائي وتذبذبي)

تمرين

هل يمكن إعادة تعريف الدالة

❑ $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-2|}{x-2} & , \; x\neq 2\\ 0 & , \; x=2\end{cases}$

لكي تكون متصلة عند $x=2$

❑ $f(x)=\frac{4\cos x}{\pi-2x}$

اكتب الدالة الموسعة للدالة

لكي تكون متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة إن أمكن

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ عند $x = 3$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \end{cases}$ عند $x = 2$

3) $f(x) = \dfrac{|x| + x}{x}$ عند $x = 0$

4) $f(x) = \frac{2}{x-5} - \frac{12}{x^2-4x-5}$ عند $x = 5$

5) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ عند $x = 0$

6) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ عند $x = 3$

$7)\ f(x) = \dfrac{x^2 - 64}{\sqrt[3]{x} - 2}$ عند $x = 8$

$8)\ f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$ عند $x = 0$

$9)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin x}$ عند $x = 0$

$10)\ f(x) = \dfrac{5}{lnx^2}$ عند $x = 0$

الشرح اضغط

ثانيًا: اتصال دالة على فترة

تكون الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت

1) متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

2) متصلة عند a من جهة اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

3) متصلة عند b من جهة اليسار $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

فمثلًا

الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

متصلة على الفترة المغلقة [-1, 1] وبحسب التعريف لا معنى إلى النظر إلى الدالة على يسار 1- أو على اليمين 1

* الدالة المتصلة هي الدالة التي تكون متصلة عند كل نقاط مجالها وفيما يلي بعض الدوال وتحديد فترات اتصالها (مجالها)

مثال

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة على R

1) $f(x) = x^3 + 4x - 5$ دالة كثيرة حدود متصلة على R

2) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-5x+6}$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 2, 3$

متصلة على $R \setminus \{2,3\}$

3) $f(X) = \dfrac{x}{x^2+25}$

$x^2 + 25 > 0$

لا توجد أصفار مقام الدالة متصلة على R

تمرين

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

1) $f(x) = 7$

2) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x^3 - x}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 2}$

4) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{2 - x^2}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 25}}$

إذا كانت f, g متصلتان عند $x = a$ فإن:

1) $(f \pm g)$ متصلة عند $x = a$

2) $(f \,.g)$ متصلة عند $x = a$

3) $\frac{f}{g}$ متصلة عند $x = a$ إذا كانت $g(a) \neq 0$

- إذا كانت الدالتان g,f معرفتين على الفترة $h = (a,b)$

وكانت متصلتين على الفترة h فإن كلًا من الدوال التالية متصلة على الفترة (a,b)

$(1)\ f + g$ $(2)\ f.g$ $(3)\ \frac{f}{g}$ بشرط $g \neq 0$

مثال

ابحث اتصال كل من الدوال التالية

1) $f(x) = (x+2)\sin x$

$\because$ كل من $x+2$, $\sin x$ متصلة على R

$\therefore$ الدالة $f(x)$ متصلة على R

تمرين

ابحث اتصال كل من الدوال التالية:

1) $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{x+3}$

2) $f(x) = x^3 + 5 + 3x^{-2}$

3) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2 - 1}$

4) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & -3 \geq x \geq 2 \\ x^2+4, & 2 \geq x \geq 5 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & 0 \geq x \geq \pi \\ 2\cos^2 x - 1, & x > \pi \end{cases}$

حدد الفترة التى تكون فيها الدالة متصلة: (مجال الدالة)

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \qquad , x \in [-2, 4]$

2) $f(x) = |x - 2| + |5 + x|$

3) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{|x| + 1}$

4) $f(x) = \sqrt{5 - |x|}$

5) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 3 \\ 5x - 4, & x \geq 2 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 3 \\ 2, & 3 > x > 4 \\ 6 - x^2, & x > 3 \end{cases}$

حدد الفترة التى تكون فيها الدالة متصلة: (مجال الدالة)

8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^4 - 81}{x} & , x \neq 0 \\ 108 & , x = 0 \end{cases}$

9) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

10) $f(x) = \ln(\sin x)$

11) $f(x) = \dfrac{2+x}{1+\sin x}$

12) $f(x) = \tan^{-1}(x+1)$

13) $f(x) = \dfrac{2}{\ln x^2}$

14) $f(x) = \cos^{-1}(x+1)$

15) $f(x) = \sin^{-1}(x+1)$

نهايات تركيب دالتين

نظرية: إذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = L$ وكانت f دالة متصلة عند L فإن

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\,(\lim_{x\to a} g(x)) = f(l)$$

نتيجة: إذا كانت g متصلى عند a وكانت f متصلة عند $g(a)$

فإن التركيب $g\ o\ f$ عند a

مثال

حدد أين تكون $h(x) = cos\ (x^2 - x + 2)$ متصلة

الحل

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$

لاحظ أن $f(x) = \cos x\ , g(x) = x^2 - 5x + 2$

كلًا من g,f متصلتان لكل قيم x فإن h متصلة لكل قيم x

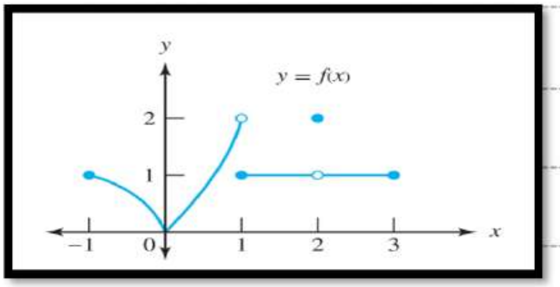
تمرين

إذا كانت $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 4 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

أوجد $\lim_{x\to 1} f\big(g(x)\big)$, $\lim_{x\to -1} f\big(g(x)\big)$

* من خلال التمثيل البياني للدالة f

أوجد كلًا مما يلي:



$1) \lim\limits_{x \to 5} f(5 - x)$

$2) \lim\limits_{x \to 4} f(5 - x)$

لإيجاد قيم الثوابت من خلال تعريف الاتصال

مثال

إذا كانت الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2, & x > 2 \\ 4, & x = 2 \\ 5a + bx, & x < 2 \end{cases}$$

متصلة عند $x = 2$ أوجد قيمة a, b؟

الحل

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

متصلة تعني

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(2)$$

4

$5a + bx$ $x^2 + ax - 2$

2

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+ax-2\right) = 4+2a-2 = 2+2a$ ①

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(5a+bx) = 5a+2b$ ②

∵ الدالة متصلة عند $x=2$

$f(2)=4$

$\therefore f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$4 = 2+2a$ $\therefore a = 1$

$5a+2b=4$ وبالتعويض بـ $a=1$

$5+2b=4$ $\therefore b = -\dfrac{1}{2}$

تمرين

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x+3} & , x \neq -3 \\ x+a & , x = -3 \end{cases}$$

متصلة عند $x=-3$ أوجد قيمة a

تمرين

إذا كانت

$$\square \quad f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x\le -2 \\ ax+b, & -2\le x\le 5 \\ x^2-12, & x\ge 5 \end{cases}$$

متصلة عند $x=5, x=-2$ أوجد قيمة a,b

إذا كانت

$$\square \quad f(x)=\begin{cases} a+bx, & x>2 \\ 3\quad , & x=2 \\ b-ax^2, & x<2 \end{cases}$$

متصلة عند $x=2$ أوجد قيمة a,b

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$$

متصلة عند $x = 1$ أوجد قيمة a

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^3-8}, & x \neq 2 \\ \frac{-2}{|a|}, & x = 2 \end{cases}$$

متصلة عند $x = 2$ أوجد قيمة a

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & , x \leq a \\ x & , x > a \end{cases}$$

متصلة عند $x = a$ أوجد قيمة a

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$$

متصلة عند $x = 0$ أوجد قيمة a

أوجد قيمة الثوابت a,b حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث

- $f(x)=\begin{cases} 4x & , x\le -1 \\ ax+b & , -1<x<3 \\ -2x & , x\ge 3 \end{cases}$

- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-a}-1}{\sqrt{x}-3} & , x\ne 9 \\ x-b & , x=9 \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\sin x}{\sin\frac{1}{2}x}, & -\pi > x > 0 \\ x+a, & 0 \ge x \ge \pi \end{cases}$$

إذا كان $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

أوجد

1) قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة

تكون غير موجودة عند أصفار المقام بعد الاختصار

2) قيم x التي تكون عندها النهاية غير موجودة

أوجد قيمة a التي تجعل الدالة متصلى على R $\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+6x+a}$

إذا كانت

- $f(x)=\begin{cases} ax^2-3, & x<2 \\ 3x-b, & x>2 \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4\,,\quad \lim\limits_{x\to -3} f(x)=6$

أوجد قيمة كلا من $a\,,b$

إذا كانت f متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت w هي عدد بين $f(a)$، $f(b)$

فإنه يوجد عدد مثل $[a,b] \in C$ حيث $f(c) = w$

نتيجة نظرية القيمة الوسطية (طريقة التنصيف)

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$

إذا كانت $f(a),f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان فإنه يوجد عدد على الأقل مثل r

ينتمي إلى الفترة (a,b) بحيث $f(r) = 0$

مثال

إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x - 2$ دالة متصلة على الفترة $[-1,0]$

فأوجد لصفر الدالة التقريب الثاني

الحل

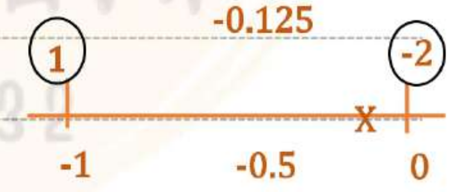
$$f(1) = (-1)^3 - 4(-1) - 2 = 1$$

$$f(0) = (0)^3 - 4(0) - 2 = -2$$

لهم إشارتين مختلفتين فإنه يوجد جذر بينهم

$$r_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{-1+(-0.5)}{2} = -0.75$$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -0.125$$

تمرين

إذا كانت

تمرين

إذا كانت $f(x) = \cos x - x$ في الفترة $[0, 1]$

مقربًا لأقرب منزلتين عشرتين

واجب

استخدام نظرية القيمة الوسطية للتحقيق من أن $f(x)$ لها صفر

في الفترة المعطاة ثم استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $\frac{1}{4}$ في الفترة $[2, 3]$

$$f(x) = x^2 - 7$$

$$f(x) = e^x + x$$

مثال

إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x - 2$ دالة متصلة على الفترة [-1,0]

استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $\frac{1}{4}$ تحتوي صفر الدالة

الحل

$r_1 = \frac{-1+0}{2} = -0.5$ طول الفترة

1   -2

-1 0

-0.125

1   X   -2

-1   -0.5   0

$\frac{1}{2}$ طول الفترة $r_2 = \frac{-1+(-0.5)}{2} = -0.75$

1   0.5781   -0.125

X

-1   -0.75   -0.5   0

$\frac{1}{3}$ طول الفترة $r_3 = \frac{-0.75+(-0.5)}{2} = -0.625$

في التمارين 14–1، حدّد أين تكون f متصلة. إذا كان ممكنًا، توسّع في f كما في المثال 4.2 إلى دالة جديدة متصلة على نطاق أكبر.

1. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2}$ اضغط الحل
2. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-3}$ اضغط الحل
3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ اضغط الحل
4. $f(x) = \frac{4x}{x^2+x-2}$ اضغط الحل
5. $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ اضغط الحل
6. $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-4}$ اضغط الحل
7. $f(x) = x^2 \tan x$ اضغط الحل
8. $f(x) = x \cot x$ اضغط الحل
9. $f(x) = \ln x^2$ اضغط الحل
10. $f(x) = 3/\ln x^2$ اضغط الحل
11. $f(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 1 \\ x^2 & , \ x \ge 1 \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \ x \neq 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases}$ اضغط الحل
13. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , \ x \le -1 \\ x^2+5x & , \ -1 < x < 1 \\ 3x^3 & , \ x \ge 1 \end{cases}$ اضغط الحل
14. $f(x) = \begin{cases} 2x & , \ x \le 0 \\ \sin x & , \ 0 < x \le \pi \\ x-\pi & , \ x > \pi \end{cases}$ اضغط الحل

في التمارين 15-20، وضّح لماذا لا تعد كل دالة متصلة عند قيم x المعطاة بالإشارة إلى أي من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف 4.1 لم يتم مراعاته.

15. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ عند $x = 1$
16. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ عند $x = 1$ اضغط الحل
17. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ عند $x = 0$
18. $f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^x-1}$ عند $x = 0$ اضغط الحل
19. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 2 \\ 3 & , \ x = 2 \\ 3x-2 & , \ x > 2 \end{cases}$ عند $x = 2$ اضغط الحل
20. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 2 \\ 3x-2 & , \ x > 2 \end{cases}$ عند $x = 2$ اضغط الحل

في التمارين 28–21، حدّد الفترات التي تكون عندها f متصلة.

21. $f(x) = \sqrt{x+3}$ اضغط الحل
22. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ اضغط الحل
23. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ اضغط الحل
24. $f(x) = (x-1)^{3/2}$ اضغط الحل
25. $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$ اضغط الحل
26. $f(x) = \ln(\sin x)$ اضغط الحل
27. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$ اضغط الحل
28. $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$ اضغط الحل

في التمارين 36–33، استخدم نظرية القيمة الوسطيّة للتحقق من أنّ $f(x)$ لها صفر في الفترة المعطاة. ثم استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $1/32$ والتي تحتوي على الصفر.

33. $f(x) = x^2 - 7$, (a) $[2, 3]$; (b) $[-3, -2]$ اضغط الحل

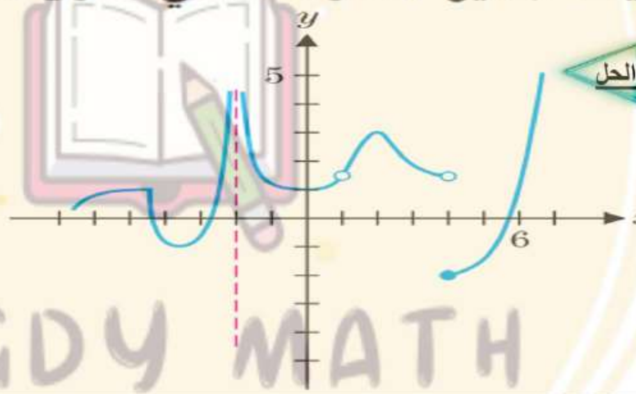
34. $f(x) = x^3 - 4x - 2$, (a) $[2, 3]$; (b) $[-1, 0]$ اضغط الحل

35. $f(x) = \cos x - x$, $[0, 1]$ اضغط الحل

36. $f(x) = e^x + x$, $[-1, 0]$ اضغط الحل

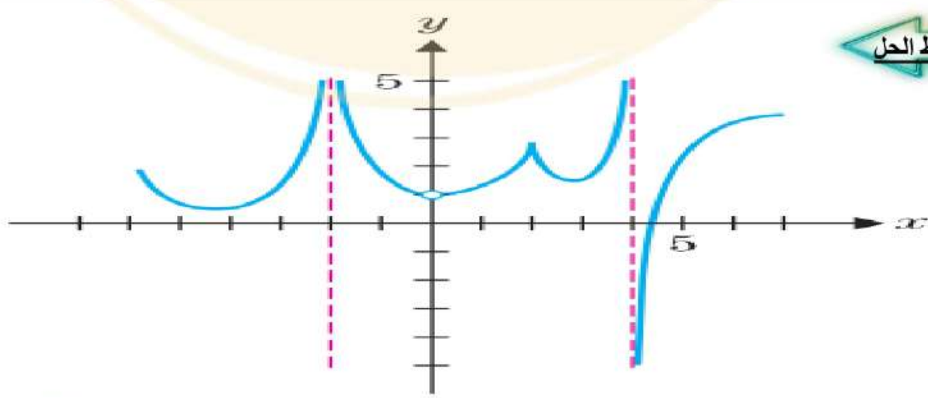
في التمرينين 37 و 38، استخدم التمثيل البياني المعطى لتعريف جميع الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة.

37.



اضغط الحل

38.



اضغط الحل

في التمارين 39–41، حدّد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة.

39. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b\cos x, & x > 0 \end{cases}$

اضغط الحل

40. $f(x) = \begin{cases} ae^{x} + 1, & x < 0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - x + b, & x > 2 \end{cases}$

اضغط الحل

41. $f(x) = \begin{cases} a(\tan^{-1} x + 2), & x < 0 \\ 2e^{bx} + 1, & 0 \le x \le 3 \\ \ln(x-2) + x^2, & x > 3 \end{cases}$

اضغط الحل

حدد جميع قيم x التي تكون فيها الدالة متصلة.

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ غير نسبيّة} \\ x & x \text{ نسبيّة} \end{cases}$

اضغط الحل

$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \text{ غير نسبيّة} \\ 4x & x \text{ نسبيّة} \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} \cos 4x & x \text{ غير نسبيّة} \\ \sin 4x & x \text{ نسبيّة} \end{cases}$

46. افترض أنّ $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ و $h(a) = 0$. حدّد ما إذا كان كل من العبارات التالية صحيح دائمًا، خاطئ دائمًا، أو ربما يكون صحيحًا / ربما يكون خاطئًا. اشرح ما يلي. (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ غير موجودة. (b) $f(x)$ ليست متصلة عند $x = a$.

اضغط الحل

47. بفرض أنّ $f(x)$ متصلة عند $x = 0$. أثبت أنّ $\lim\limits_{x \to 0} xf(x) = 0$.

اضغط الحل

52. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ne 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$ و $g(x) = 2x$ وضّح أنّ

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) \ne f\left(\lim_{x \to 0} g(x)\right)$$

اضغط الحل

تدريبات من اختبارات سابقة

إذا كانت $f(x)=\dfrac{9-x^2}{mx+2}$ متصلة على $(-\infty,\infty)$

2023-2022

أوجد قيمة m , حيث m عدد ثابت

1) -1 2) 0 3) 9 4) 1

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها $f(x)=\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}}$ متصلة

2023-2022

1) $(0,\infty)$ 2) $(0,1)$ 3) $(-1,1)$ 4) $(1,\infty)$

2022-2021

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها

$f(x)=\sqrt{9-x^2}$ متصلة

a) $(-3,3)$ b) $[-3,3]$

c) $(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ d) $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

2022-2021

حدد قيم n,m التي تجعل الدالة

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xm+2}{x-1} & ,x\neq 1\\ n & ,x=1\end{cases}$$

a) $m=-3\ \ ,n=-1$ c) $m=3\ \ ,n=-1$

b) $m=-3\ \ ,n=1$ d) $m=3\ \ ,n=1$

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$ متصلة

2020-2019

$a)\ (-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$ $\quad b)\ [-1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$

$d)\ (\sqrt{2},\infty)$ $\quad c)\ (-1,\infty)$

أوجد جميع نقاط عدم الاتصال،وحدد أي منها قابل للازالة

2020-2019

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 2\\ 4x-3 & ,x>2\end{cases}$$

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها الدالة $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$ متصلة

2019-2018

$a)\ (-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ $\quad b)\ (-\infty,-1]\cup[2,\infty)$

$c)\ (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ $\quad d)\ (-\infty,0)\cup(2,\infty)$

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}a(\tan^{-1}x+2), & x<0\\ b\cos\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi, & 0\le x\le 3\\ \ln(x-2)+x^2+1 & ,x>3\end{cases}$$

2019-2018

أوجد قيم b,a التي تجعل الدالة f متصلة

2018-2017

حدد الفترة التي تكون عندها الدالة $f(x)=\ln(3x-6)$ متصلة

$a)\ (-\infty,2)$ $\quad b)\ [2,\infty)$

$c)\ (-2,\infty)$ $\quad d)\ (2,\infty)$

2018-2017

حدد قيم b, a التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة

$$f(x)=\begin{cases} ae^{x}+1 \quad , & x<0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2 \\ x^{2}-x+b & , x>2 \end{cases}$$