«1»

الصف : 12 متقدم

الدرس : 6-2

الحجم : شرائح وأقراص وحلقات

الهدف : معرفة حساب الحجم بطريقة الشرائح
معرفة حساب حجم مجسم بطريقة الأقراص .
معرفة حساب حجم مجسم بطريقة الحلقات .

تذكرة : نعلم أن حجم الاسطوانة = القاعدة × الارتفاع

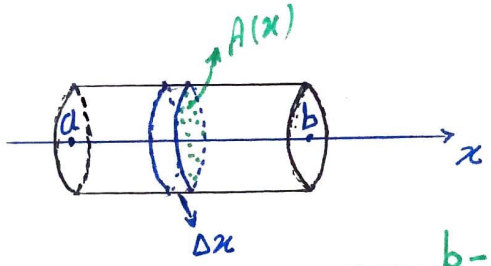
$V = \pi r^2 \times h$

حجم الصندوق = (العرض × الطول) × الارتفاع

= القاعدة × الارتفاع .

بشكل عام : $V =$ مساحة مقطع × الارتفاع

«1» طريقة الشرائح :



في الشكل المجاور اسطوانة .
لحساب حجمها
نقسم الاسطوانة الى شرائح
ارتفاع كل شريحة منها Δx حيث $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
وتكون مساحة قاعدة الشريحة $A(x)$. «مساحة الدائرة πr^2»
حجم الشريحة $\boxed{V(x) = A(x) \times \Delta x}$

من أجل عدد n شريحة يكون حجم الاسطوانة

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x}$$

ومنه

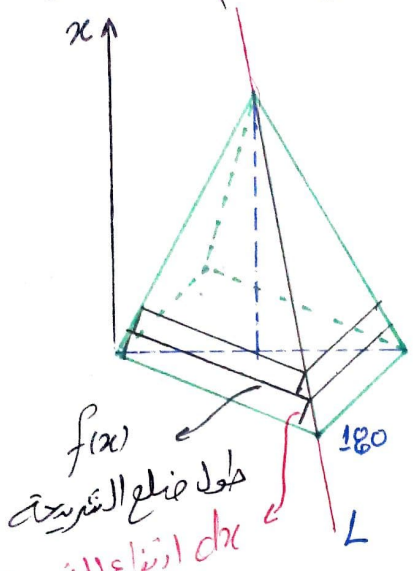
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}$$

حيث $A(x)$ مساحة المقطع .

مثال: حساب الحجم من مساحات المقاطع العرضية:

إذا كانت قاعدة هرم مربع طول ضلعها 180 مترًا وارتفاع الهرم 100 متر أوجد حجم الهرم.



الحل:

حجم الشريحة $V(x) = f^2(x) \cdot dx$

نوجد $f(x)$.

كلما ازداد ارتفاع الشريحة عن الأرض حيث $x=0$ يقل طول ضلع قاعدة الشريحة لأن المستقيم الذي هو حرف الهرم ميل

نوجد معادلة المستقيم L.

ميل المستقيم $m = \frac{180-0}{0-100} = \frac{180}{-100} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ميل المستقيم

يتقاطع مع y عند $p = 180$

فتكون معادلته $y = mx + p$

$y = -\frac{9}{5}x + 180$

إذن طول ضلع الشريحة $f(x) = -\frac{9}{5}x + 180$ مساحتها $A(x) = \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2$

مساحة المربع (الضلع)²

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{100} \left(\frac{81}{25}x^2 - 648x + 32400\right) dx$$

$$= \left[\frac{81}{25} \times \frac{1}{3}x^3 - 648 \times \frac{1}{2}x^2 + 32400x\right]_0^{100}$$

$$= \frac{81}{75}(100)^3 - 324(100)^2 + 32400(100) - (0 - 0 + 0)$$

$$= 1{,}080{,}000 \ m^3$$

طريقة «2»: يمكن حساب التكامل بالتعويض :

$$V = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

نفرض $u = -\frac{9}{5}x + 180 \Leftarrow du = -\frac{9}{5}dx$ $\quad \left(-\frac{5}{9}\times\right)$

$$-\frac{5}{9}du = dx$$

حدود التكامل :

$$x = 0 \Rightarrow u = -\frac{9}{5}(0) + 180 = 180$$

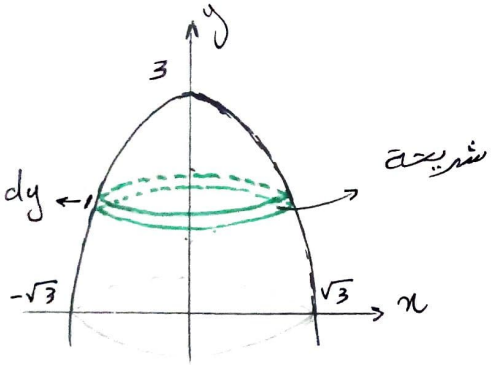
$$x = 100 \Rightarrow u = -\frac{9}{5}(100) + 180 = 0$$

$$V = \int_{180}^{0} u^2\left(-\frac{5}{9}du\right) = -\frac{5}{9}\int_{180}^{0} u^2 du$$

$$= -\frac{5}{9}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{180}^{0} = -\frac{5}{9}\left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{3}(180)^3\right]$$

$$= 1{,}080{,}000$$

حساب حجم قبة :



مثال: في الشكل المجاور قبة نصف قطرها عند $y=0$ هو $r=\sqrt{3}$ وارتفاع القبة 3 . ويعطى الرسم التخطيطي لها بالعلاقة $y = -x^2 + 3$ على $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$

احسب حجم القبة .

الحل: نقسم القبة الى شرائح ارتفاع كل منها dy وتكون الشرائح اسطوانية

$$y = -x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = 3 - y \Rightarrow x = \sqrt{3-y} = r$$

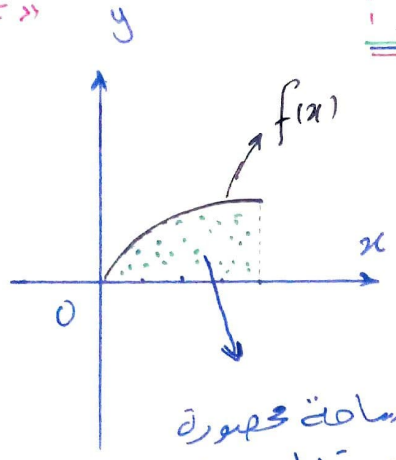
$$A(y) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{3-y}\right)^2 = \pi(3-y)$$

$$V = \int_0^3 A(y)\,dy = \int_0^3 \pi(3-y)\,dy = \left[\pi\left(3y - \frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^3$$

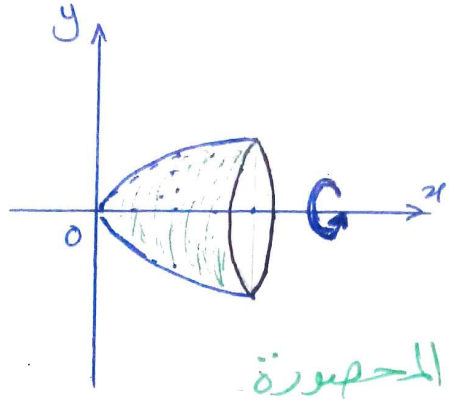
$$= \pi\left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \pi\left(3(0) - \frac{1}{2}(0)^2\right)$$

$$= \pi\left(9 - \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\pi = 14.137$$

حساب حجم ناتج عن دوران تمثيل بياني حول محور :



مساحة محصورة بين تمثيل $f(x)$ والمحور x

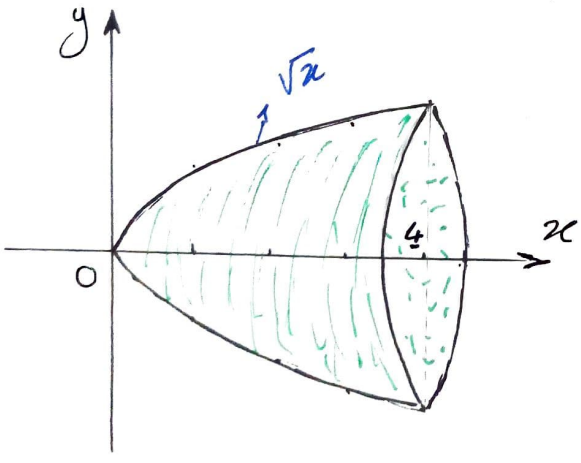


عند دوران المساحة المحصورة بين تمثيل $f(x)$ والمحور x على الفترة $[a,b]$ فإن حجم المجسم الناتج يعطى بالقانون

$$\boxed{V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx}$$

وتدعى هذه الطريقة بطريقة الأقراص.

مثال : احسب حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة التي تقع تحت المنحني $y=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,4]$ حول المحور x.



الحل :

$$V = \int_0^4 \pi f^2(x)\, dx$$

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

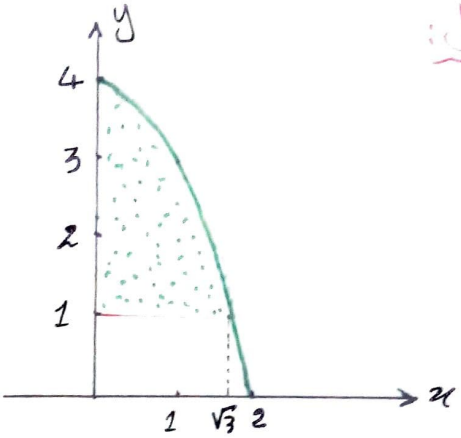
$$V = \pi \left[\frac{1}{2}(4^2) - \frac{1}{2}(0)\right]$$

$$V = \pi (8-0) = 8\pi$$

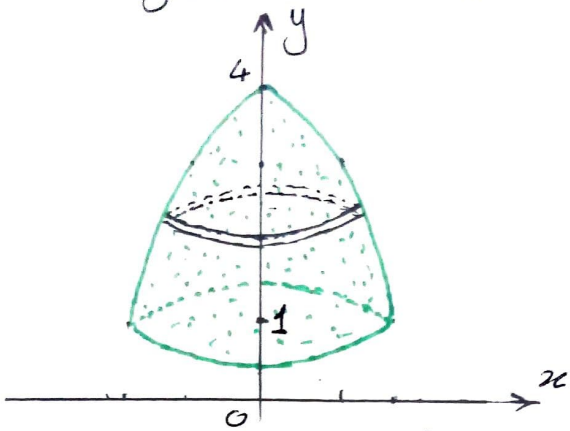
استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغير مستقل .

مثال: أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y=4-x^2$ و $y=1$ من $x=0$ الى $x=\sqrt{3}$ حول المحور y .

الحل:



التمثيل البياني .



المجسم الناتج عن الدوران

لدينا $y=4-x^2 \Leftarrow x^2=4-y \Leftarrow x=\sqrt{4-y}$

المساحة المطلوب دورانها من $y=1$ حتى $y=4$.

فيكون

$$V=\pi\int_1^4 f(y)\,dy=\pi\int_1^4 (\sqrt{4-y})^2\,dy$$

$$=\pi\int_1^4 (4-y)\,dy=\pi\left[4y-\frac{1}{2}y^2\right]_1^4$$

$$=\pi\left[\left(4(4)-\frac{1}{2}(4)^2\right)-\left(4(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right)\right]=\frac{9\pi}{2}$$

طريقة الحلقات :

تستخدم هذه الطريقة لحساب حجم المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين .

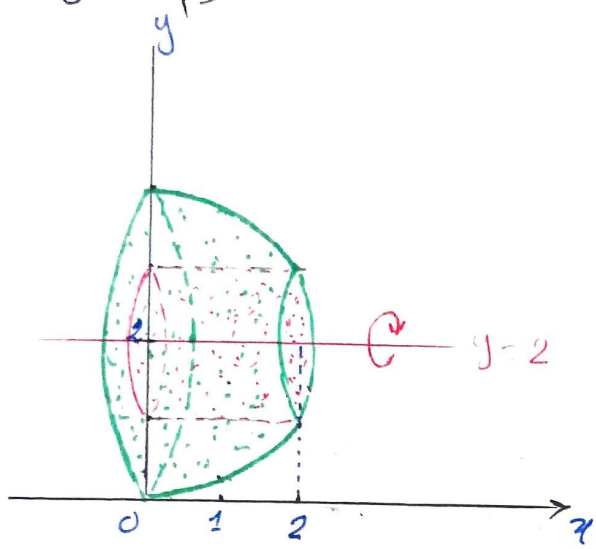
مثال:

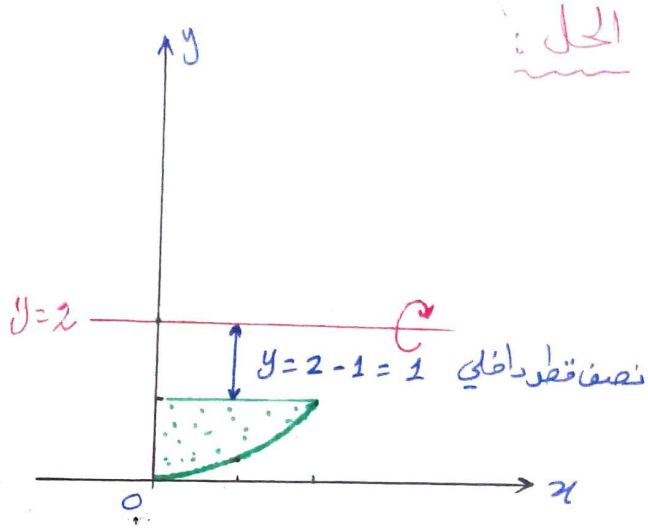
مثال: لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلات البيانية

$x=0$ ، $y=\frac{1}{4}x^2$ ، $y=1$.

احسب حجم المجسم الناتج من دوران R حول المستقيم $y=2$

الحل:





لاحظ أنه في المجسم الناتج من الدوران .

نصف القطر الخارجي هو من المستقيم $y=2$ حتى $y=\frac{1}{4}x^2$

$$r_0 = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

ونصف القطر الداخلي « نصف قطر الثقب » هو $r_1 = 2-1 = 1$

$V =$ الخارجي V - الثقب V

$$V = \int_0^2 \pi\left(2-\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx - \int_0^2 \pi 1\, dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(4 - x^2 + \frac{1}{16}x^4\right) dx - \pi\int_0^2 dx$$

$$= \pi\left[4x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{80}x^5\right]_0^2 - \pi\left[x\right]_0^2$$

$$= \pi\left[4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{80}(2)^5 - (0-0+0)\right] - \pi\left[2-0\right]$$

$$= \frac{56}{15}\pi$$

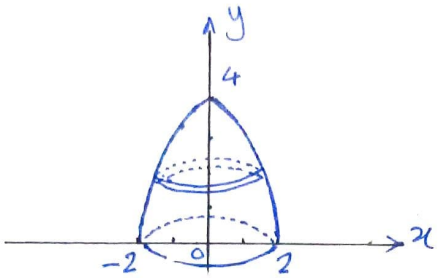
مثال: لتكن R المنطقة المحدودة بواسطة $y=4-x^2$ ، $y=0$

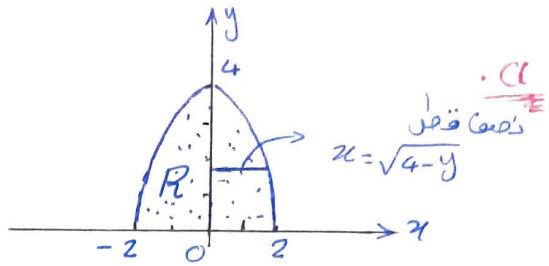
أوجد حجم المجسمات :

a- دوران R حول y

b. دوران R حول ~~المحور~~ $y=-3$.

الحل: a.

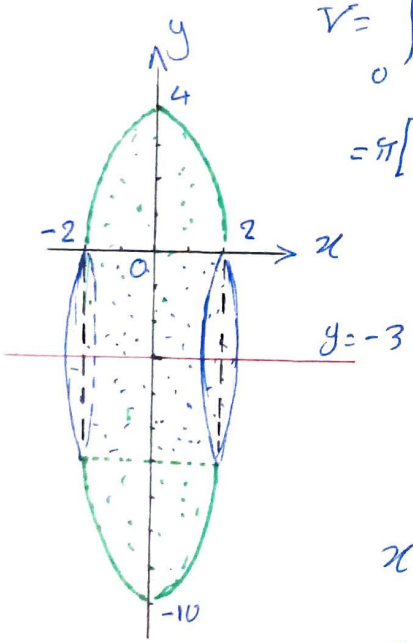




لدينا $y=4-x^2 \Leftarrow x^2=4-y \Leftarrow f(y)=x=\sqrt{4-y}$

$$V=\int_0^4 \pi f(y)^2\,dy=\int_0^4 \pi(\sqrt{4-y})^2\,dy=\int_0^4 \pi(4-y)\,dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^4=\pi\left[\left(4(4)-\frac{1}{2}(4)^2\right)-\left(4(0)-\frac{1}{2}(0)^2\right)\right]=8\pi$$



b. إن المقاطع العرضية في هذه الحالة هي عبارة عن حلقات نصف قطرها الخارجي هو بعد المحور $y=-3$ حتى القطع المكافئ.

$$r_0=(4-x^2)-(-3)=4-x^2+3=7-x^2$$

ونصف القطر الداخلي بين محور الدوران $y=-3$ والمحور x

$$r_1=0-(-3)=3$$

فيكون الحجم :

$$V=\int_{-2}^{2}\pi(7-x^2)^2\,dx-\int_{-2}^{2}\pi(3)^2\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\pi(49-14x^2+x^4)\,dx-\int_{-2}^{2}\pi\,9\,dx$$

$$=\pi\left[49x-14\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2}-\pi\left[9x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\pi\left[\left(49(2)-\frac{14}{3}(2)^3+\frac{1}{5}(2)^5\right)-\left(49(-2)-\frac{14}{3}(-2)^3+\frac{1}{5}(-2)^5\right)\right]$$

$$-\pi\left[9(2)-9(-2)\right]=\frac{1472}{15}\pi$$