

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية



الملف حل ملخص الأسئلة المقترحة من الوزارة

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر المتقدم ← رياضيات ← الفصل الثاني

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

[الرياضيات](#)

[اللغة الانجليزية](#)

[اللغة العربية](#)

[التربية الاسلامية](#)

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني

[كل ما يخص الاختبار التكويني لمادة الرياضيات للصف الثاني عشر يوم الأحد 9/2/2020](#)

1

[تدريبات متنوعة مع الشرح على الوحدة الرابعة \(النهايات والاتصال\)](#)

2

[تدريبات متنوعة على تطبيقات الاشتقاق](#)

3

[قوانين هندسية](#)

4

[الاختبار القياسي في الرياضيات](#)

5

ملخص

مع الحل

[الاسئلة المقترحة من الوزارة]

لمادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثاني

2022/2021

اسم الطالب :

المدرسة :

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

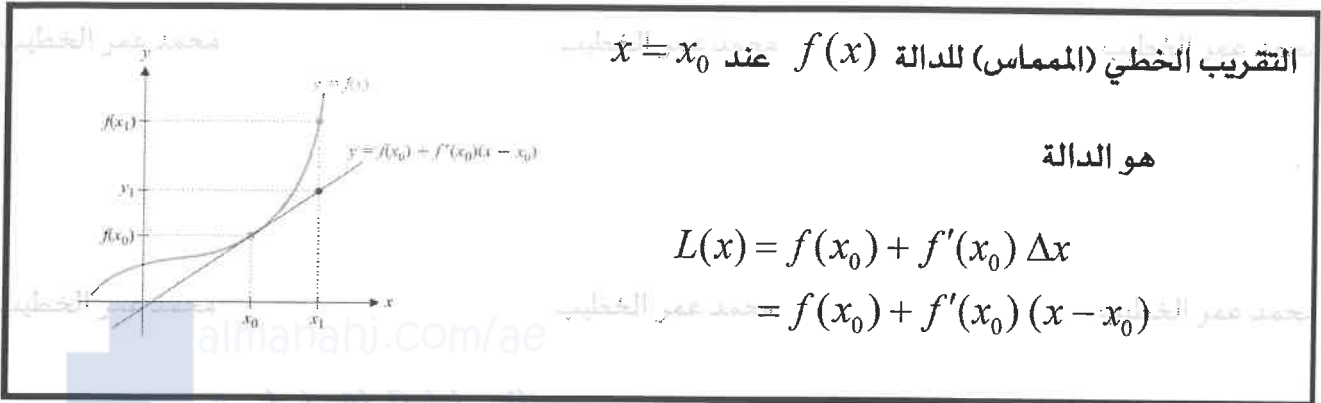
Khateebacademy.com

قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\log_a(f)$	$\frac{f'}{f \times \ln a}$
3	$f \pm g$	$f' \pm g'$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c \times f$	$c \times f'$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f \times g$	$f \times g' + g \times f'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{g \times f' - f \times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c \times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x \tan x$
8	\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	22	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
9	$(f)^n$	$n(f)^{n-1} \times f'$	23	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f \circ g)(x)$	$f'(g(x)) \times g'(x)$	24	$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y = f(u)$ $u = g(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g = f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	a^f	$a^f \times f' \times \ln a$	27	$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
14	e^f	$e^f \times f'$	28	$\csc^{-1} x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

التقريب الخطية

من اهم تطبيقات التفاضل اننا نستطيع تقريب اي دالة قابلة للاشتقاق بدالة خطية عند نقطة معينة وهذا ما يسمى بالتقريب الخطي للدالة.



التقريب الخطي (المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$

هو الدالة

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x_0 = 1$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{1.2}$

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(1) + f'(1)(x - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1.2} &\approx L(1.2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1.2) \\ &= 1.1 \# \end{aligned}$$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt{1.2}$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1.2} = \sqrt{x}$$

$$x_1 = 1.2$$

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = (x+1)^{1/3}$ عند $x_0 = 0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

$$\begin{aligned} L(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1.2} &\approx L(0.2) = 1 + \frac{1}{3}(0.2) \\ &= 1.066 \# \end{aligned}$$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

$$f(x) = (x+1)^{1/3}, \quad x_0 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{1.2} = (x+1)^{1/3}$$

$$x_1 = 0.2$$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sqrt{2x+9}$ عند $x_0 = 0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{8.8}$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$= f(0) + f'(0)(x-0)$$

$$= 3 + \frac{1}{3}(x)$$

$$= 3 + \frac{1}{3}x$$

$$\sqrt{8.8} = L(-0.1) = 3 + \frac{1}{3}(-0.1)$$

$$= 3 - \frac{1}{30}$$

$$= \frac{89}{30} = 2.967 \#$$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt{8.8}$

$$f(x) = \sqrt{2x+9}, x_0 = 0$$

$$f(0) = 3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+9}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{8.8} = \sqrt{2x+9}$$

$$8.8 = 2x+9$$

$$-0.2 = 2x$$

$$x_1 = -0.1$$

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \frac{2}{x}$ عند $x = 1$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\frac{2}{0.99}$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$= 2 + -2(x-1)$$

$$= 2 - 2x + 2$$

$$= 4 - 2x$$

$$\frac{2}{0.99} = L(0.99) = 4 - 2(0.99)$$

$$= 2.02 \#$$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\frac{2}{0.99}$

$$f(x) = \frac{2}{x}, x_0 = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2}$$

$$f'(1) = -2$$

$$\frac{2}{0.99} = \frac{2}{x}$$

$$x_1 = 0.99$$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sin 3x$ عند $x_0 = 0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(0.3)$

$$\begin{aligned}L(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\&= f(0) + f'(0)(x - 0) \\&= 0 + 3(x) \\&= 3x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 0.3 &\approx L(0.1) = 3(0.1) \\&= 0.3 \# \end{aligned}$$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin(0.3)$

$$f(x) = \sin 3x, \quad x_0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 3 \cos 3x.$$

$$f'(0) = 3.$$

$$\sin 0.3 = \sin 3x$$

$$0.3 = 3x$$

$$x_1 = 0.1$$

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sin x$ عند $x_0 = \pi$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(3)$

$$\begin{aligned}L(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\&= f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) \\&= 0 + -1(x - \pi) \\&= \pi - x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3 &\approx L(3) = \pi - 3 \\&= 0.14.\end{aligned}$$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin(3)$

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi$$

$$f(\pi) = \sin \pi = 0$$

$$f'(x) = \cos x.$$

$$f'(\pi) = \cos \pi = -1.$$

$$\sin 3 = \sin x$$

$$x_1 = 3.$$

الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثاني: الصيغ غير المعرفة (قاعدة لوبيتال)

قاعدة لوبيتال

إذا كانت f, g دوال قابلة للاشتقاق في جوار النقطة c حيث $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ أو $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

اشتق

فان

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اوجد قيمة النهايات التالية

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-2)} = \frac{-1}{4} \neq$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x-3} = \frac{4}{1} = 4 \neq$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{x^2-4} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3 \neq$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+3} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

تذكر
عدد $\neq 0 \rightarrow 0$

$$(5) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t}-1}{t} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2e^{2t}}{1} = \frac{2}{1} = 2 \neq$$

$$(6) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{e^{3t}-1} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{3e^{3t}} = \frac{1}{3} \neq$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0. \quad \#$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$$

سأخذ النهايات من الطرفين

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(\ln t) \cdot \frac{1}{\ln t}$$

$$= -\infty \cdot \infty$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$$

نعلم ان $\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln t = 0^-$ تكون موجبة سالبة

لذلك تكون النهايات غير معرفة.
(غير موجودة)

محمد عمر الخطيب
اوجد قيمة النهايات التالية

محمد عمر الخطيب

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty} \right)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

محمد عمر الخطيب

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \cot x \rightarrow \infty$$

محمد عمر الخطيب

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 x}{x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\sin x \cdot \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0 \neq$$

محمد عمر الخطيب

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\ln x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= 0 \cdot 0$$

محمد عمر الخطيب

$$= 0$$

محمد عمر الخطيب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \rightarrow -\infty$$

محمد عمر الخطيب

$$\frac{1}{-\infty} \rightarrow 0$$

الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة f بأنها النقطة c في مجال الدالة f والتي تكون عندها
اما: $f'(x) = 0$ او $f'(x)$ غير موجودة

ملاحظة (ممكن ان تكون احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة)

القيم القصوى (المطلقة) تحليلاً

اختبار القيم

- (1) ايجاد جميع النقاط الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة
- (2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.
- (3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ على الفترة $[0, 2]$ وبين نوعها

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x = -1 \text{ و } 1$$

الاعداد الحرجة فقط

$$x = 1$$

$$\text{لان } x = -1$$

خارج المجال

اختبار القيم

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 3$$

$$f(1) = -1$$

عظمى مطلقة 3 عند $x = 2$

صغرى مطلقة -1 عند $x = 1$

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ على الفترة $[-3, 2]$ وبين نوعها

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$x = -1, 1$$

الاعداد الكرجية هي

$$x = -1, 1$$

$$f(-3) = -17 \quad \text{صغرى مطلقة}$$

$$f(2) = 3 \quad \text{عظمى مطلقة}$$

$$f(-1) = 3$$

$$f(1) = -1$$

(2) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ على الفترة $[-3, 1]$ وبين نوعها

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, x = \pm 2$$

الاعداد الكرجية $x = 0, \pm 2$

$$f(-1) = 5$$

$$f(3) = 11 \quad \text{عظمى مطلقة}$$

$$f(0) = 2$$

$$f(-2) = -14 \quad \text{صغرى مطلقة}$$

(3) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ على الفترة $[-1, 3]$ وبين نوعها

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0, x = \pm 2$$

الاعداد الكرجية

$$x = 0, 2$$

$$f(-1) = -5$$

$$f(3) = 11 \quad \text{عظمى مطلقة}$$

$$f(0) = 2$$

$$f(2) = -14 \quad \text{صغرى مطلقة}$$

القيم القصوى المحلية: اختبار المشتقة الاولى للقيم القصوى المحلية

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 6x + 6 = 0$$

لا يوجد قيم قصوى محلية.

لا يوجد اعداد حرجية

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x = 1$$

الاعداد الحرجية $x = 1$



لا يوجد قيم قصوى محلية.

عند $x = 1$ محاسن افقى.

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

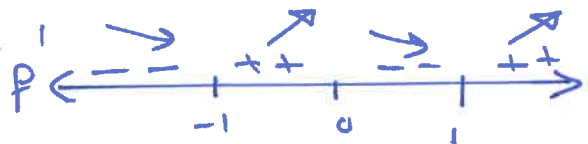
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, \pm 1$$

الاعداد الحرجية $0, \pm 1$



عظمى محلية عند $x = 0$

صغرى محلية عند $x = \pm 1$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

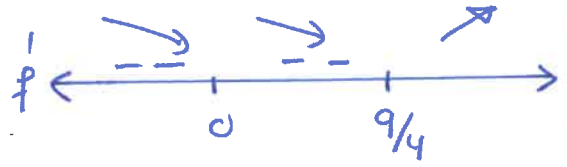
$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 9) = 0$$

$$x = 0, x = \frac{9}{4}$$

الاعداد الحرجة هي $0, \frac{9}{4}$



حزري عليه عند $x = \frac{9}{4}$

لا يوجد على عليه.

عند $x = 0$ كما اس افقي

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = e^{x^2-1}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$$f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{e^{x^2-1}}$$

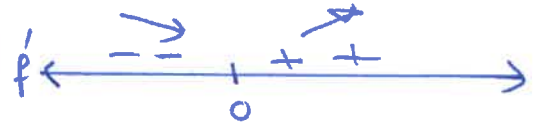
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{البط} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$f'(x) \text{ م.ع} \Rightarrow e^{x^2-1} = 0$$

لا يوجد من

الاعداد الحرجة هي $x = 0$



حزري عليه عند $x = 0$

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = xe^{-2x}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية. وبين نوعها

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-x}(-2) \quad \text{لنضرب}$$

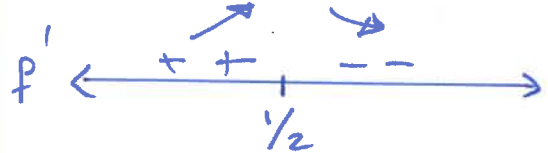
$$= e^{-2x}(1 - 2x)$$

$$= \frac{1-2x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{البط} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) \text{ م.ع} \Rightarrow \text{الكمام} = 0 \Rightarrow \text{لا يوجد من}$$

الاعداد الحرجة هي $x = \frac{1}{2}$



عظمي عليه عند $x = \frac{1}{2}$

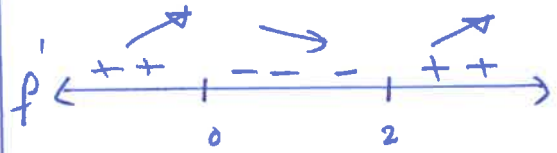
(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = x^2 e^{-x}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) \\ &= e^{-x}(2x - x^2) \\ &= \frac{2x - x^2}{e^x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$f'(x) \text{ م.ع.} \Rightarrow e^x = 0 \text{ لا يوجد حل}$$

الاعداد الحرجة هي $x = 0, 2$



حفرى عليه عند $x = 2$

عظمى عليه عند $x = 0$

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x) = (x^2 + x + 0.45)e^{-2x}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين

$$f'(x) = (2x + 1)e^{-2x} + (x^2 + x + 0.45)e^{-2x}(-2)$$

$$= e^{-2x} [2x + 1 - 2x^2 - 2x - 0.9]$$

$$= e^{-2x} [-2x^2 + 0.1]$$

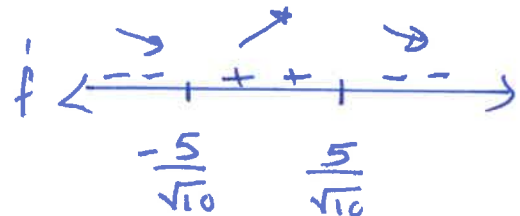
$$= \frac{0.1 - 2x^2}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0.1 - 2x^2 = 0$$

$$x = \frac{-\sqrt{5}}{10} \text{ , } \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$f'(x) \text{ م.ع.} \Rightarrow e^{2x} = 0 \text{ لا يوجد حل}$$

الاعداد الحرجة $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$

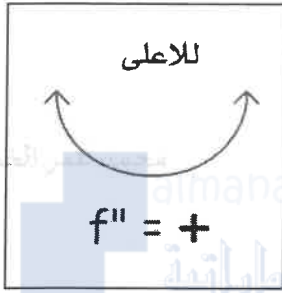


عظمى عليه عند $x = \frac{\sqrt{5}}{10}$

حفرى عليه عند $x = -\frac{5}{\sqrt{10}}$

التعر

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للأعلى على الفترة المفتوحة I

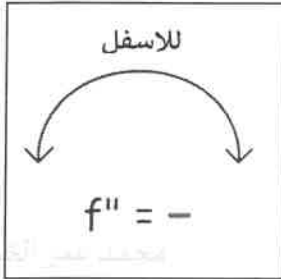


(1) إذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسه.

أو (2) إذا كان $y' = f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة I .

أو (3) إذا كان $f''(x) > 0$ على الفترة المفتوحة I .

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للأسفل على الفترة المفتوحة I



(1) إذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسه.

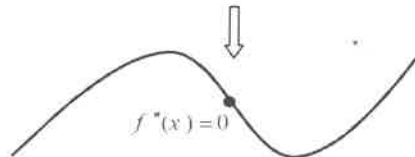
أو (2) إذا كان $y' = f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة I .

أو (3) إذا كان $f''(x) < 0$ على الفترة المفتوحة I .

نقطة الانعطاف

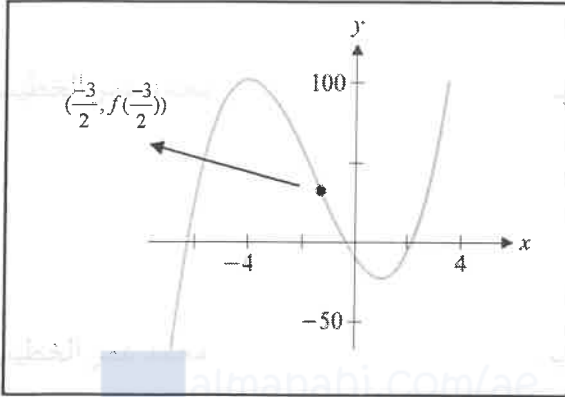
إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) والتمثيل البياني يغير اتجاه التعر عند النقطة $c \in (a, b)$ فإن النقطة $(c, f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

ملاحظة: إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = c$ فإنها لا تعتبر نقطة انقلاب (انعطاف)



فترات التقعر للدالة (بيانياً)

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f في الاجابة عن الأسئلة التالية

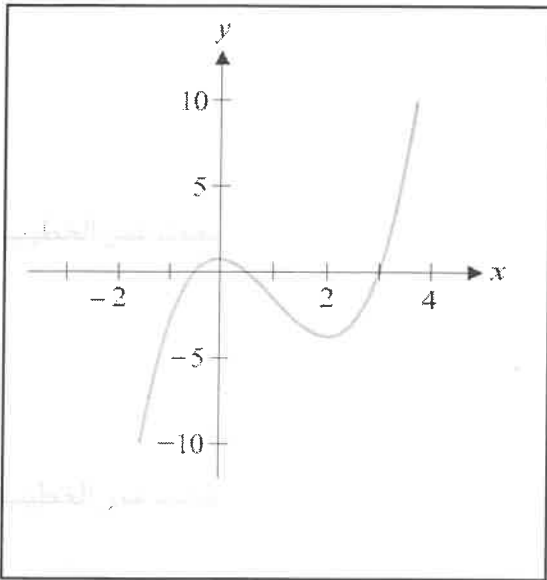


(أ) فترة التقعر للأسفل هي $(-\infty, -\frac{3}{2})$

(ب) فترة التقعر للأعلى هي $(\frac{3}{2}, \infty)$

(ج) نقطة الانقلاب هي $(-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}))$

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f في الاجابة عن الأسئلة التالية



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة 0 و 2

(ب) اوجد فترة التناقص للدالة (-5, 2)

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة $(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$

(د) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

..... عظمى محلية عند $x=0$

..... صغرى محلية عند $x=2$

(هـ) اوجد فترة التقعر للأسفل $(-\infty, -1)$

(و) اوجد فترات التقعر للأعلى $(1, \infty)$

(ي) اوجد نقاط الانعطاف للدالة $(-1, 1)$

فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1) إيجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفر أو غير موجودة وتعيينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة المشتقة الثانية " f'' .

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة " f'' .

(أ) اذا كانت اشارة الدالة " f'' موجبة (+) على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة.

(ب) اذا كانت اشارة الدالة " f'' سالبة (-) على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة.

(1) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

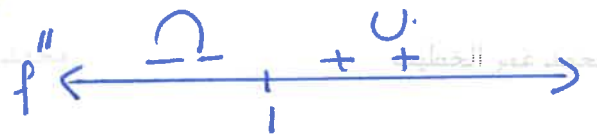
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$



للاسفل (او $-\infty$)

للاعلى (1, ∞)

نقطة الانعطاف (1, 1)

(2) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$

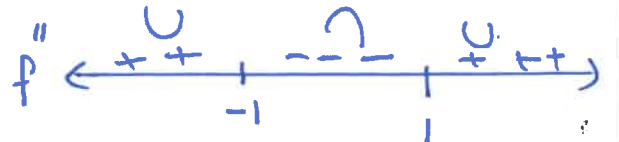
$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 - 12 = 0$$

$$x = -1, x = 1$$



للاعلى (1, ∞) و (-1, $-\infty$)

للاسفل (-1, 1)

نقاط الانعطاف هي

(-1, -4) و (1, 0)

(1) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

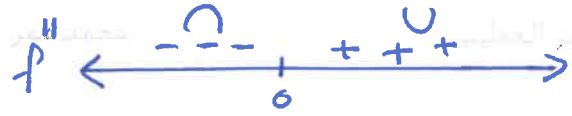
$$D = \mathbb{R} / \{0\}$$

$$f'(x) = 1 - x^{-2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{ لا يوجد حل}$$

$$f''(x) \text{ م.ع} \Rightarrow x = 0$$



للاصل $(-\infty, 0)$

للاعلى $(0, \infty)$

لا يوجد نقاط انعطاف

(2) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x) = x + 3(1-x)^{1/3}$$

$$f'(x) = 1 + (1-x)^{-2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{-5/3}$$

$$= -\frac{2}{3(1-x)^{5/3}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{لا يوجد حل}$$

$$f''(x) \text{ م.ع} \Rightarrow x = 1$$



للاصل $(-\infty, 1)$

للاعلى $(1, \infty)$

نقطة الانعطاف $(1, 1)$

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

$$f''(x) = 0$$

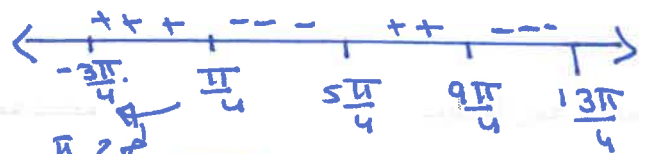
$$-\sin x + \cos x = 0$$

$$-\sin x = -\cos x$$

$$-\cos x \text{ بالجمع مع}$$

$$\tan x = 1$$

$$x \begin{cases} \alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ \alpha_2 \rightarrow \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$



للاصل $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) + 2n\pi$

للاعلى $(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}) + 2n\pi$

نقاط الانعطاف

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

الوحدة الرابعة: تطبيقات الاشتقاق /// الدرس السادس: رسم المنحنيات

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

خطوط التقارب للدوال النسبية

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في أبسط صورة قبل إيجاد خطوط التقارب وإذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x - a$ واختفى من المقام فان للدالة فجوة عند $x = a$ وليس خط تقارب رأسي

$x - a$ عامل غير مكرر

(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام وتكون معادلة $x = a$

(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة

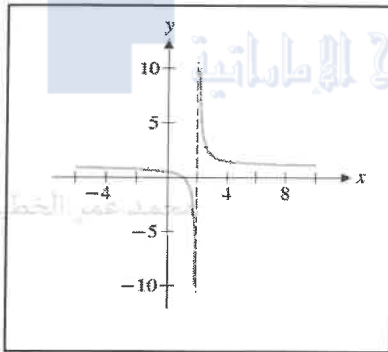
البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلة $y = a$

(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت

درجة البسط اكبر من درجة المقام . وتكون معادلة $y = ax + b$

ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لاجادة

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت



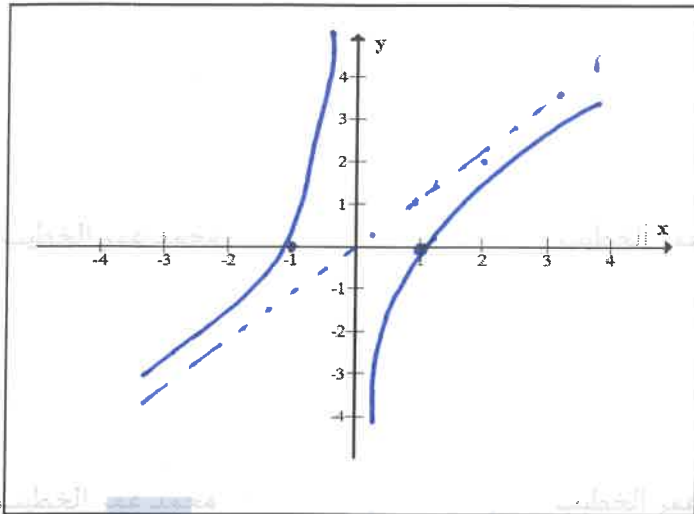
ملاحظات لرسم الدوال النسبية

المميزات المهمة تحليل الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب والفجوات

اشارة الدالة الاصلية



(1) ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

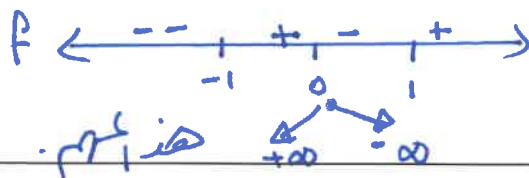
خطوط التناوب الرأسية $x=0$

خطوط التناوب الأفقية لا يوجد

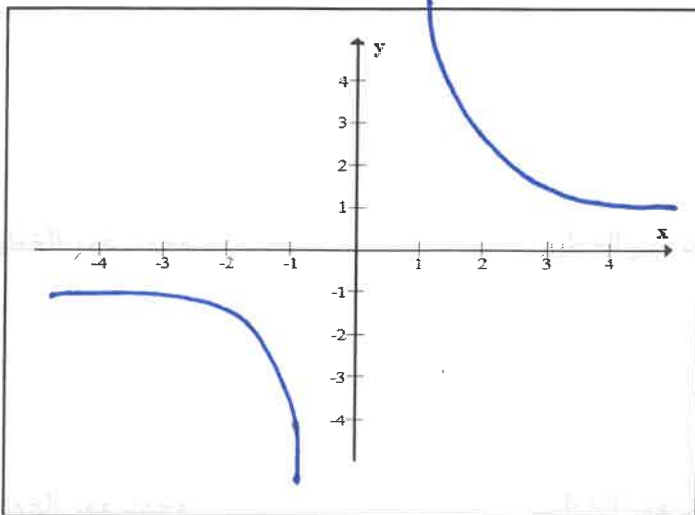
خطوط التناوب المائلة $y=x$

$$\begin{array}{r} x \\ x \overline{) x^2 - 1} \\ \underline{-x^2} \\ -1 \end{array}$$

اصناف لداية $x = \pm 1$ (اصفا، لبط).



اتساره الدالة f (الاصفا) عبرها اصناف لبط، كفاام



(2) ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3}$

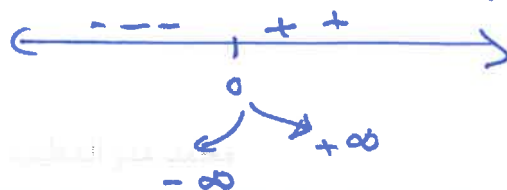
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

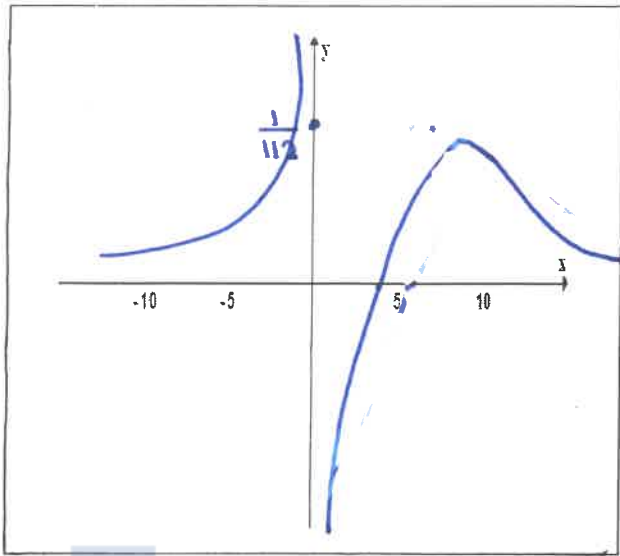
الرأسية $x=0$

الافقية $y=0$

اصناف لداية (لا يوجد)

اتساره f





(1) ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x-4}{x^3}$

الرأسية $x=0$

الافقية $y=0$

اصنا، ليد $x=4$

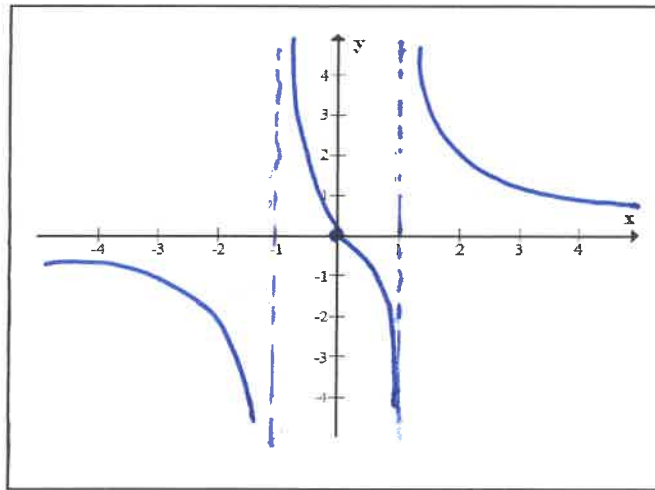
اسماء الالات f \leftarrow $\begin{array}{c} ++ \\ -- \end{array}$ \rightarrow
 $\infty \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^3 - (x-4) 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-2x+12}{x^4}$$

f' $\begin{array}{c} ++ \\ ++ \\ -- \end{array}$ \rightarrow
 $0 \quad 6$

(خودري لان ليله قطع هو ليتارن لافين)



(2) ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

الرأسية $x = \pm 1$

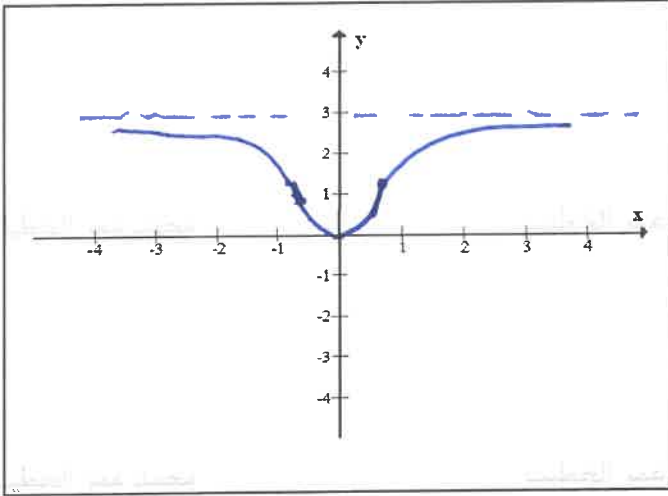
الافقية $y=0$

اصنا، ليد $x=0$

اسماء f

\leftarrow $\begin{array}{c} -- \\ ++ \\ -- \\ ++ \end{array}$ \rightarrow
 $-1 \quad 0 \quad 1$
 $\infty \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$

غير مهم اسماي



$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1} \quad (1) \text{ ارسم منحنى الدالة}$$

الرأسي لا يوجد

$$y = 3 \quad \text{الافقي}$$

$$x = 0 \quad \text{اصفار لدرام}$$

استاء لدرام

$$f' \leftarrow \begin{array}{c} + + + \\ | \\ + + + \end{array} \rightarrow$$

دائماً موجبة --- وفضولاً x . المنهج الإماراتية

$$f'(x) = \frac{6x(x^2 + 1) - 3x^2(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 6x - 6x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad f \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow - - - \\ | \\ + + + \end{array} \rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 + 1)^2 - 6x(2)(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 + 1)[6(x^2 + 1) - 24x^2]}{(x^2 + 1)^4} = \frac{6 - 18x^2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6 - 18x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad f'' \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow + + + \\ | \\ - - - \end{array} \rightarrow$$

الخط المزدوج

$$\leftarrow \begin{array}{c} - - - \\ | \\ + + + \end{array} \rightarrow$$

* عندما يكون السؤال ضيق دائري --- لا يحتاج هذا كل

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس السابع : القيم المثلى

خطوات حل مسائل القيم المثلى

أقراء المسألة

(1) ارسم شكلاً توضيحياً

(2) وحدد المتغيرات ورمزها

(4) كتابة العلاقة المساعدة

(3) اكتب العلاقة الأساسية
ويستدل عليها من كلمة أكبر
ما يمكن أو اصغر ما يمكن

إذا كانت

بمتغير واحد

(5) اشتق الدالة الأساسية ثم
أوجد الأعداد الحرجة

(6) اختبر القيمة القصوى المطلقة

(7) اخذ القرار (أيجاد المطلوب)

إذا كانت
بمتغيرين

مجال مغلق... اختبار القيم

مجال مفتوح...
اختبار المشتقة الأولى
أو
اختبار المشتقة الثانية

ملاحظة :

لا يجوز اشتقاق الدالة الأساسية
في حالة وجود متغيرين

كلمات تدل على أن السؤال... على القيم المثلى مثل... أكبر ما يمكن، أصغر ما يمكن، أقصر، أطول....

مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله 96 ft على الجوانب الثلاث الأخرى ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها.

$$A = xy.$$

$$= x(96 - 2x)$$

$$= 96x - 2x^2.$$

$$A' = 96 - 4x.$$

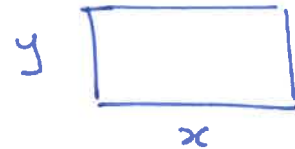
$$A' = 0 \rightarrow x = 24.$$

$$A(0) = 0$$

$$A(48) = 0$$

$$A(24) = 1152$$

أكبر مساحة



$$2x + y = 96$$

$$y = 96 - 2x$$

$$0 < x < 48$$

(1) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها 1800 ft^2 ، اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به

من الجوانب الثلاث فقط

$$P = 2x + y$$

$$= 2x + \frac{1800}{x}$$

$$P' = 2 - \frac{1800}{x^2}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1800}{x^2}$$

$$2x^2 = 1800$$

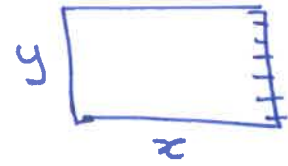
$$x^2 = 900$$

$$x = -30, x = 30$$



\Rightarrow يتوجب صرفي حليبه و صيده عند $x=30$

$$P = 2(30) + \frac{1800}{30} = 120 \text{ ft}$$



$$xy = 1800$$

$$y = \frac{1800}{x}$$

$$0 < x$$

(2) يراد عمل سياج حول اسطبل للخيول مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقتين ومتطابقتين في المساحة اذا كان طول السياج 120 ft اوجد ابعاد الاسطبل كامل لتكون مساحته اكبر ما يمكن

$$A = 2xy$$

$$= 2x \left(\frac{120-4x}{3} \right) = \frac{2}{3} x (120-4x)$$

$$= \frac{2}{3} (120x - 4x^2)$$

$$A' = \frac{2}{3} (120 - 8x)$$

$$A' = 0 \Rightarrow x = 15$$

$$A(0) = 0$$

$$A(30) = 0$$

$$A(15) = 600$$

الابعاد هي 30, 20 ← 2x



$$4x + 3y = 120$$

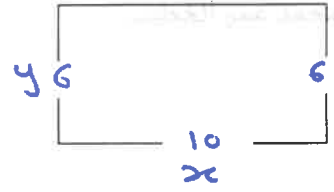
$$y = \frac{120-4x}{3}$$

$$0 \leq x \leq 30$$

(1) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها 800 ft^2 ، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول 10 ft ، ومن الجهتين الباقية بايين بعرض 6 ft لكل منهم، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب)

$$P = x - 10 + y - 6 + y - 6$$

$$= x + 2y - 22$$



$$P = x + 2 \cdot \frac{800}{x} - 22 = x + \frac{1600}{x} - 22$$

$$P' = 1 - \frac{1600}{x^2}$$

$$xy = 800$$

$$y = \frac{800}{x}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1600}{x^2} \Rightarrow x = -40, 40$$

مرفوض

$$0 < x$$

$$P = 40 + \frac{1600}{40} - 22 = 58 \text{ ft. اصغر سباع}$$

(2) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطه قيمة ثابتة P يكون مربع طول ضلعة $\frac{P}{4}$

$$A = xy$$

$$= x \left(\frac{P}{2} - x \right)$$

$$= \frac{P}{2}x - x^2$$

$$A' = \frac{P}{2} - 2x$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - 2x = 0$$

$$x = \frac{P}{4}$$

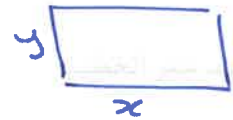
∴ نصف مربع طول
الضلع $\frac{P}{4}$

$$A = \frac{P}{4} \left(\frac{P}{2} - \frac{P}{4} \right)$$

$$= \frac{P}{4} \left(\frac{P}{4} \right)$$

$$= \frac{P^2}{16} \#$$

$$A = \frac{P^2}{16} \text{ ومساحة}$$



$$2x + 2y = P$$

$$x + y = \frac{P}{2}$$

$$y = \frac{P}{2} - x$$

(3) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحة قيمة ثابتة A يكون مربع طول ضلعة \sqrt{A}

$$P = 2x + 2y$$

$$= 2x + 2 \cdot \frac{A}{x}$$

$$= 2x + \frac{2A}{x}$$

$$P' = 2 - \frac{2A}{x^2}$$

$$P' = 0 \Rightarrow 2 = \frac{2A}{x^2}$$

$$x^2 = A$$

$$x = -\sqrt{A}, \sqrt{A}$$

مرفوض

اصغر محيط عندما

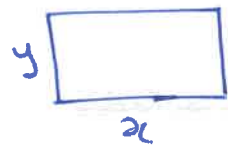
يكون نصف مربع

طول ضلعه \sqrt{A}

$$P = 2\sqrt{A} + \frac{2A}{\sqrt{A}}$$

$$= 4\sqrt{A} \#$$

$$4\sqrt{A} \text{ ومحيطه}$$



$$xy = A$$

$$y = \frac{A}{x}$$

(1) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلها 12in وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، اوجد أكبر حجم للصندوق.

$$\begin{aligned} S &= (12-2x)(12-2x)x \\ &= (12-2x)^2 x \\ &= (144 - 48x + 4x^2)x \\ &= 4x^3 - 48x^2 + 144x. \end{aligned}$$

$$S' = 12x^2 - 96x + 144$$

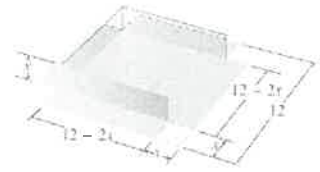
$$S' = 0 \Rightarrow x = 2, x = 6.$$

$$S(0) = 0$$

$$S(6) = 0$$

$$S(2) = 128$$

الأكبر حجم



$$0 \leq x \leq 6$$

(2) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورق مقوى مستطيل الشكل طول ضلها 10in وعرضها 6in وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة بطول ضلع x عند الرؤوس، اوجد قيمة x التي

تحقق القيمة العظمى لحجم للصندوق

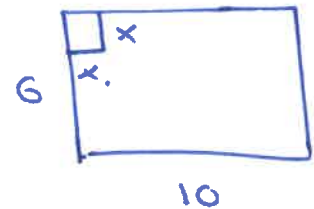
$$\begin{aligned} S &= (10-2x)(6-2x)x \\ &= (10-2x)(6x-2x^2) \\ &= 60x - 20x^2 - 12x^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 32x^2 + 60x. \end{aligned}$$

$$S' = 12x^2 - 64x + 60.$$

$$S' = 0$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{19}}{3} = 4.11 \text{ مرفوضا}$$

$$x = \frac{8 - \sqrt{19}}{3} = 1.21 \checkmark$$



$$0 \leq x \leq 6$$

الاقصى

الوحدة الرابعة : تطبيقات الاشتقاق /// الدرس الثامن : المعدلات المرتبطة

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

اقراء المسألة

(4) اكتب العلاقة الأساسية التي تربط المعطيات بالمطلوب

(1) ارسم شكلاً توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمزها

(3) اكتب المعطيات والمطلوب



(5) اشتق الدالة الأساسية ضمناً بالنسبة للزمن

اشتق كل المتغيرات بالنسبة للزمن

(6) عوض المعطيات لإيجاد المطلوب

ملاحظة :

- (1) يجوز اشتقاق الدالة الأساسية في حالة وجود متغيرين بشرط توفر معلومات عن المتغيرات أو إبحث عن علاقة مساعدة للتخلص من أحدهما
- (2) إذا كانت قيمة المتغير تزيد فإن معدل تغيره موجب
- (3) إذا كانت قيمة المتغير تقل فإن معدل تغيره سالب

ينتشر حريق في إحدى الغابات بشكل دائري ، ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5 \text{ ft} / \text{min}$ اوجد معدل التغير في مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطر الحريق 200 ft .

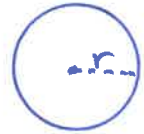
$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi (200) \cdot 5$$

$$= 2000\pi$$

$$= 6283 \text{ ft}^2/\text{min}$$



$$\frac{dr}{dt} = +5$$

$$\frac{dA}{dt} \Big|_{r=200} = ??$$

(1) سلم طوله 10 ft ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بمعدل 3 ft/s بعيداً عن الحائط

اوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد 6 ft من الحائط.

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \cdot \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$= \frac{-6(3)}{\sqrt{100 - 6^2}} = -2.25 \text{ ft/s.}$$



$$\frac{dx}{dt} = +3$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{x=6} = ??$$

(2) سلم طوله 10 ft ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بمعدل 3 ft/s بعيداً عن الحائط

اوجد معدل تغير الزاوية بين السلم والخط الافقي عندما يبعد اسفل السلم 6 ft من الحائط.

اعبره سؤال جديد .

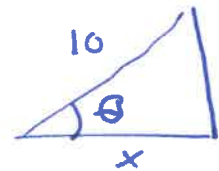
$$\cos \theta = \frac{x}{10}$$

$$-\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$-\frac{8}{10} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{8}$$

rad/s.



$$\frac{dx}{dt} = +3$$

$$\frac{d\theta}{dt} \Big|_{x=6} = ??$$

* عندما x=6 نرسم مثلث جديد



* علم من السؤال بأخذ cos للطرفين .

قطرة ماء كروية تتبخر بمعدل $1 \text{ cm}^3 / \text{min}$ وتبقى تحافظ على شكلها

(أ) اوجد معدل تناقص نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر 0.2 cm .

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}.$$

$$-1 = 4 \pi (0.2)^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{25}{4\pi} \text{ cm/min.}$$



$$\frac{dV}{dt} = -1$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$r = 0.2$$

(ب) اوجد سرعة تناقص المساحة السطحية لقطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف

القطر 0.2 cm .

$$S = 4 \pi r^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 8 \pi r \frac{dr}{dt}.$$

$$= 8 \pi (0.2) \cdot \frac{-25}{4\pi}.$$

$$= -10 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

(ج) اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف

القطر ثابت عند اي لحظة

$$\frac{dV}{dt} \propto S.$$

$$\frac{dV}{dt} = k S$$

حيث k ثابت التناسب

ا حثت

بالاختصار يكون

$$\frac{dr}{dt} = k.$$

ثابت

نجد ان معدل تغير نصف القطر ثابت

$$\frac{4}{3} \pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4 \pi r^2.$$

(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $20m^3/h$ وينتشر بشكل دائري بسمك $2cm$ ، اوجد معدل

تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $10m$.
* لقرصين لرادوي ارتفاع هو

$$V = \pi r^2 \cdot \left(\frac{2}{100}\right)$$

ارتفاع الاسطوانة بالقدم



$$\frac{dV}{dt} = +20$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{100} \pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{r=10} = ??$$

$$20 = \frac{2}{100} \pi (10) \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi} \text{ m/n.}$$

(2) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 90 gl/min وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{8}$ ، اوجد معدل

تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر 100 ft .

$$V = \pi r^2 \cdot \left(\frac{1}{96}\right)$$

ارتفاع الاسطوانة بالقدم

$$7.5 = 1 \text{ ft}^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{96} \pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \text{ in} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{12} \text{ ft} = \frac{1}{96}$$

$$12 = \frac{2}{96} \pi (100) \frac{dr}{dt}$$

$$7.5 \text{ g} \rightarrow 1 \text{ ft}^3$$

$$90 \text{ g} \rightarrow ??$$

$$?? = \frac{90}{7.5} = 12$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{144}{25\pi} \text{ ft/min.}$$

$$\frac{dV}{dt} = +12$$

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{r=100} = ??$$

$$r=100$$

(1) تكلفة إنتاج x قطعة هو $C(x)$ وهي دالة تراكمية

(2) التكلفة الفعلية لإنتاج القطعة رقم x_n هو $C(x_n) - C(x_{n-1})$

(3) التكلفة الحدية لإنتاج القطعة رقم x_n هو $C'(x_n)$

وهي دالة حدية أي تحسب قيمة التكلفة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظة: عندما يكون الإنتاج كبير فان التكلفة الفعلية لإنتاج القطعة رقم x_n تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

إذا كانت دالة التكلفة لإنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

(أ) اوجد تكلفة إنتاج اول 100 قطعة

$$C(100) = 0.02(100)^2 + 2(100) + 4000 \\ = 4400$$

(ب) اوجد تكلفة إنتاج اول 1000 قطعة

$$C(1000) = 0.02(1000)^2 + 2(1000) + 4000 \\ = 26000$$

إذا كانت دالة التكلفة لانتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

مكثنة انتاج القطعة رقم 100 هو .

(أ) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

$$C(100) - C(99)$$

$$= 4400 - 4394.02 = 5.98.$$

(ب) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100. $C'(x) = 0.04x + 2$.

$$C'(100) = 0.04(100) + 2$$

$$= 6.$$

(ج) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100 والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

التكلفة الفعلية تساوي تقريباً التكلفة الحدية

عندما يكون الانتاج كبير .

(د) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة

$$\bar{C}(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{4400}{100} = 44.$$

(هـ) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

$$\bar{C}(1000) = \frac{C(1000)}{1000} = \frac{26000}{1000} = 26.$$

(و) قارن بين متوسط تكلفة القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة و 1000 ماذا تلاحظ.

كما زاد الانتاج يقل متوسط المكثنة للقطعة الواحدة .

إنتهت الوحدة الرابعة بحمد الله ... واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

قواعد التكامل

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

* $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

* $\int \sin(ax+b) dx = \frac{-\cos(ax+b)x}{a} + c$

(3) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(4) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

(5) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

(6) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

(7) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

(8) $\int e^x dx = e^x + c$

* $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

(9) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

* $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

(10) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$

* $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

* $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(12) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

يتوزع التكامل على

الجمع والطرح ولا يتوزع

على الضرب أو القسمة

$$(1) \int 2 \sec x \tan x \, dx = 2 \sec x + C$$

$$(2) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$(3) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C.$$

$$(4) \int 4 \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{4}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int 4 \csc x \cot x \, dx = -4 \csc x + C.$$

$$(5) \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$(6) \int \frac{4x}{x^2+4} \, dx = 2 \int \frac{2x}{x^2+4} \, dx = 2 \ln |x^2+4| + C.$$

$$(7) \int \frac{e^x}{e^x+3} \, dx = \ln |e^x+3| + C.$$

$$(8) \int \frac{3}{4x^2+4} \, dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \frac{3}{4} \tan^{-1} x + C.$$

الدالة المكانية \leftarrow دالة السرعة المتجهة \leftarrow دالة التسارع
بالاشتقاق

الدالة المكانية \Rightarrow دالة السرعة المتجهة \Rightarrow دالة التسارع
بالتكامل

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t) = 3 - 12t$ والموقع الابتدائي $s(0) = 3$

$$v(t) = 3 - 12t \text{ m/s}, \quad s(0) = 3$$

$$s(t) = \int (3 - 12t) dt$$

$$= 3t - 6t^2 + C.$$

$$s(0) = 3 \Rightarrow C = 3.$$

$$s(t) = 3t - 6t^2 + 3.$$

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي $s(0) = 0$

$$v(t) = 3e^{-t} - 2, \quad s(0) = 0.$$

$$s(t) = \int (3e^{-t} - 2) dt$$

$$= -3e^{-t} - 2t + C.$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow -3 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = 3.$$

$$s(t) = -3e^{-t} - 2t + 3.$$

مسألة

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $a(t) = 3\sin t + 1$ والسرعة الابتدائية $v(0) = 0$

الموقع الابتدائي $s(0) = 4$

$$a(t) = 3\sin t + 1, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = 4.$$

$$v(t) = \int 3\sin t + 1 \, dt \\ = -3\cos t + t + C_1.$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow -3 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 3.$$

$$v(t) = -3\cos t + t + 3.$$

$$s(t) = \int -3\cos t + t + 3 \, dt \\ = -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + C_2.$$

$$s(0) = 4 \Rightarrow C_2 = 4.$$

$$\therefore s(t) = -3\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4.$$

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $a(t) = t^2 + 1$ والسرعة الابتدائية $v(0) = 4$

الموقع الابتدائي $s(0) = 0$

$$a(t) = t^2 + 1, \quad v(0) = 4, \quad s(0) = 0.$$

$$v(t) = \int t^2 + 1 \, dt \\ = \frac{1}{3}t^3 + t + C_1.$$

$$v(0) = 4 \Rightarrow C_1 = 4$$

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 + t + 4.$$

$$s(t) = \int \frac{1}{3}t^3 + t + 4 \, dt \\ = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t + C_2.$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore s'(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t.$$

رمز المجموع (سيجما) \sum

إذا كانت n عدد صحيح موجب و a, b, c اعداد حقيقية فان

$$(1) \sum_{i=1}^n c = nc$$

$$(2) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

خواص المجموع

$$(1) \sum_{i=1}^n (ca_i \pm db_i) = c \sum_{i=1}^n a_i \pm d \sum_{i=1}^n b_i \quad (2) \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$$

$n=6$
↓

$$\sum_{i=6}^{10} (4i+2) = 26 + 30 + 34 + 38 + 42 = 170$$

$n=10$
↓

$$\sum_{i=3}^7 (i^2 + i) = 12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 160$$

$$\sum_{i=6}^8 (i^2 + 2) = 38 + 51 + 66 = 155$$

$$\sum_{i=4}^{20} (i-3)(i+3) = \sum_{i=4}^{20} i^2 - 9 = \sum_{i=1}^{20} (i^2 - 9) - \sum_{i=1}^3 (i^2 - 9) \quad \text{اوجد ناتج المجموع}$$

$$= \sum_{i=1}^{20} i^2 - \sum_{i=1}^{20} 9 - \left[\sum_{i=1}^3 i^2 - \sum_{i=1}^3 9 \right]$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - 9(20) - \left[\frac{3(4)(7)}{6} - 9 \times 3 \right] = 2703$$

مجموع ريمان لحساب المساحة

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0, 1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

$$\begin{aligned}
 A_L &= \Delta x [f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)] \\
 &= 0.2 [2 + 2.2 + 1.6 + 1.4 + 1.6] \\
 &= 1.76.
 \end{aligned}$$

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4

الفترة $[1, 2]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى


$$\begin{aligned}
 A_R &= \Delta x [f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8) + f(2)] \\
 &= 0.2 [0.4 + 0.6 + 0.8 + 1.2 + 1.4] \\
 &= 0.88
 \end{aligned}$$

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0, 0.8]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

$$A_L = \Delta x [f(0) + f(0.1) + \dots + f(0.7)]$$

$$= 0.1 [2 + 2.4 + \dots + 1.4]$$

 almanasari.com/ae
المنهج الإماراتية

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0, 2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

$$A_R = \Delta x [f(1.2) + f(1.4) + \dots + f(2.6)]$$

$$= 0.2 [0.4 + 0.6 + \dots + 1]$$

$$= 1.60.$$

المساحة

إذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فإن المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

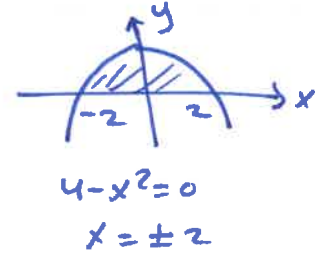
$$A = \int_a^b [\text{الدالة الأسفل} - \text{الدالة الأعلى}] dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

ملاحظة: يمكن اعتبار محور x دالة معادلتها $y = 0$

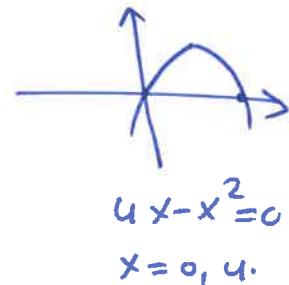
(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x) = 4 - x^2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) - (0) dx \\ &= \int_{-2}^2 4 - x^2 dx \\ &= \end{aligned}$$



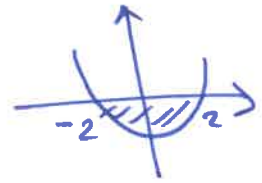
(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x) = 4x - x^2$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 (4x - x^2) - (0) dx \\ &= \int_0^4 (4x - x^2) dx. \end{aligned}$$



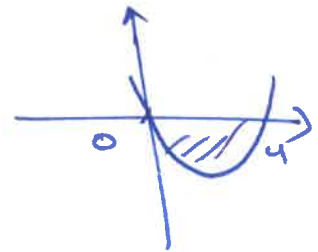
(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 4$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (0) - (x^2 - 4) dx \\ &= \int_{-2}^2 -(x^2 - 4) dx \\ &= \int_{-2}^2 4 - x^2 dx . \end{aligned}$$



(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 4x$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 0 - (x^2 - 4x) dx \\ &= \int_0^4 -(x^2 - 4x) dx \\ &= \int_0^4 4x - x^2 dx . \end{aligned}$$



إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ فإن القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad f(c) = f_{ave}$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x + 1$ على الفترة $[0, 4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق

النظرية

$$\begin{aligned} f_{ave} &= \frac{1}{4-0} \int_0^4 (2x+1) dx \\ &= \frac{1}{4} [x^2 + x]_0^4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(c) &= f_{ave} \\ 2c + 1 &= 5 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

(2) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 + 2x$ على الفترة $[0, 1]$

$$\begin{aligned} f_{ave} &= \frac{1}{1-0} \int_0^1 (x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 - 1$ على الفترة $[1,3]$

$$\begin{aligned} f_{ave} &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 x^2 - 1 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3 \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$



(2) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x - x^2$ على الفترة $[0,1]$

$$\begin{aligned} f_{ave} &= \frac{1}{1-0} \int_0^1 2x - x^2 \, dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(1) اكتب $\int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$ بصورة تكامل منفرد $\int_0^3 f(x) dx$.

(2) اكتب $\int_0^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx$ بصورة تكامل منفرد $\int_0^2 f(x) dx$.

(3) اكتب $\int_0^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx$ بصورة تكامل منفرد $\int_0^1 f(x) dx$.

(4) اذا كان $\int_1^3 f(x) dx = 3$ و $\int_1^3 g(x) dx = -2$ فاوجد

(a) $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 3 + (-2) = 1$

(b) $\int_1^3 [f(x) - g(x)] dx = 3 - (-2) = 5$

(c) $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 2(3) - (-2) = 8$

(d) $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)] dx = 4(-2) - 3(3) = -17$

الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس الخامس: النظرية الأساسية في التفاضل

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الأول)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ و $F(x)$ هي الدالة الأصلية لـ f فإن

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

أوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_0^2 (2x - 3) dx = [x^2 - 3x]_0^2 = -2$

(2) $\int_0^3 (x^2 - 2) dx = [\frac{x^3}{3} - 2x]_0^3 = 3.$

(3) $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx = [\frac{x^4}{4} + x^2]_{-1}^1 = 0.$

(4) $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x]_0^2 = -4$

(5) $\int_1^4 (x\sqrt{x} + \frac{3}{x}) dx = \int_1^4 (x^{3/2} + \frac{3}{x}) dx$
 $= [\frac{2}{5} x^{5/2} + 3 \ln|x|]_1^4 = \frac{62}{5} + 3 \ln 4.$

(6) $\int_1^2 (4x - \frac{2}{x^2}) dx = \int_1^2 (4x - 2x^{-2}) dx$
 $= [2x^2 + 2x^{-1}]_1^2 = 5$

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ فان

$$F'(x) = f(x)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ فان

$$F'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$$

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$ فان

$$F'(x) = f(g(x)) \times g'(x) - f(h(x)) \times h'(x)$$

أوجد $f'(x)$ في كل مما يلي

$$(1) f(x) = \int_1^x (t^2 + 2t + 1) dt$$

$$f'(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$(2) f(x) = \int_x^1 \sec t dt = - \int_1^x \sec t dt$$

$$f'(x) = - \sec x$$

$$(1) f(x) = \int_{e^x}^{2-x} \sin t^2 dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(2-x)(-1) - \sin(e^x)^2 \cdot e^x \\ &= -\sin(2-x) - e^x \sin e^{2x}. \end{aligned}$$

$$(2) f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(3t) dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(3x^3) \cdot 3x^2 - \sin(3x^2) \cdot 2x \\ &= 3x^3 \sin 3x^3 - 2x \sin 3x^2. \end{aligned}$$

$$(3) f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4) dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)^2 + 4 \cos x - (3x)^2 + 4 \cdot 3 \\ &= \cos x (\sin^2 x + 4) - 3(9x^2 + 4) \\ &= -27x^2 - 12 + \sin^2 x + 4 \cos x. \end{aligned}$$

$$(4) f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{2t} dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2(xe^x)} \cdot [1 \cdot e^x + x e^x] - e^{2(2-x)} \cdot (-1) \\ &= e^{2xe^x} [e^x + x e^x] + e^{4-2x}. \end{aligned}$$

قبل البدء بالتكامل... اسئل نفسك

- 1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حد قابل للتكامل
- 2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل
- 3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int x e^{x^2+1} dx \\
 &= \int x e^u \frac{du}{2x} \\
 &= \frac{1}{2} \int e^u du \\
 &= \frac{1}{2} e^u + c \\
 &= \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c.
 \end{aligned}$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

عنه هل لسؤال بدون التعويض.

$$(2) \quad \int e^x \sqrt{e^x + 4} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int e^x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{e^x} \\
 &= \int u^{\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{2}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{2}{3} (e^x + 4)^{\frac{3}{2}} + c
 \end{aligned}$$

$$u = e^x + 4$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

أوجد التكاملات التالية

$$(1) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} du$$

$$= 2 \int e^u du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

حكمة من السؤال بدون التحويل.

$$u = \sqrt{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

$$(2) \int \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{\cos u}{x^2} \cdot -x^2 du$$

$$= -\int \cos u du$$

$$= -\sin u + c = -\sin \frac{1}{x} + c.$$

$$u = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$-x^2 du = dx.$$

$$(3) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot x du$$

$$= \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (\ln x)^{3/2} + c.$$

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$$

$$x du = dx$$

$$(4) \int \sec^2 x \sqrt{\tan x} dx$$

$$= \int \sec^2 x \sqrt{u} \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + c.$$

$$u = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{\sec^2 x} = dx.$$

أوجد التكاملات التالية

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{u}(\sqrt{u}+1)} du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u} t} \cdot 2\sqrt{u} dt$$

$$= 2 \int \frac{1}{t} dt = 2 \ln|t| + c = 2 \ln|\sqrt{u}+1| + c$$

$$t = \sqrt{u} + 1$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$2\sqrt{u} dt = du$$

$$(2) \int \frac{v}{v^2+4} dv = \frac{1}{2} \int \frac{2v}{v^2+4} = \frac{1}{2} \ln|v^2+4| + c$$

محمد بن الوليد بقورين

$$(3) \int \frac{4}{x(\ln x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{4}{x u^2} \cdot x du$$

$$= \int 4 u^{-2} du$$

$$= 4 \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{4}{u} + c = -\frac{4}{\ln x + 1} + c$$

$$u = \ln x + 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x du = dx$$

إنتهت الوحدة الخامسة بحمد الله