الملف مراجعة درس دالة الكثافة الاحتمالية مع الحل

مراجعة عامة للوحدة السادسة

مراجعة على دالة الكثافة الاحتمالية

إعداد

د : حيدر عامر السعافين

(67) اي من الدوال التالية هي دالة كثافة احتمال (pdf) على الفترة $[0,1]$

(a) $f(x)=x$

(b) $f(x)=4x^3$

(c) $f(x)=-2x$

(d) $f(x)=e^x$

كل الدوال اكبر من ما عدا c فهي سالبة ≥ 0

$$\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\neq 1\ ,\int_0^1 e^x dx=[e^x]_0^1=e^1-e^0\neq 1$$

$$\int_0^1 4x^3 dx=\left[\frac{4x^4}{4}\right]_0^1=1-0=1$$ تحقق الشروط

(68) ان قيمة الثابت k التي تجعل الدالة $f(x) = k\sin x$ دالة كثافة احتمالية (pdf) على الفترة $[0,\pi]$ هي

(a) $-\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{2}{\pi}$

(d) $\frac{1}{2}$

$$\int_0^{\pi} k\sin x \, dx = 1$$

$$k[-\cos x]_0^{\pi} = 1 \rightarrow -k(\cos\pi - \cos 0) = 1$$

$$-k(-1-1) = 1 \rightarrow -k(-2) = 1$$

$$2k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

(69) ان قيمة الثابت k التي تجعل الدالة $f(x)=\frac{k}{1+x^2}$ دالة كثافة احتمالية (pdf) على الفترة $[0,1]$ هي

(a) $\frac{4}{\pi}$

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) 1

(d) π

$$\int_0^1 \frac{k}{1+x^2}\,dx = 1 \rightarrow k(\tan^{-1}x)_0^1 = 1$$

$$k(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0) = 1$$

$$k\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 \rightarrow k = \frac{4}{\pi}$$

(70) ان قيمة الثابت k التي تجعل الدالة $f(x)=2ke^{-kx}$ دالة كثافة احتمالية (pdf) على الفترة $[0,2]$ هي

(a) $\ln\sqrt{2}$

(b) $-\ln\sqrt{2}$

(c) $2\ln\sqrt{2}$

(d) $\ln 2$

$$\int_0^2 2ke^{-kx}\,dx = 1$$

$$\left[2k\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_0^2 = 1 \to -2[e^{-2k} - e^0] = 1$$

$$-2e^{-2k} + 2 = 1 \to -2e^{-2k} = 1 - 2 = -1$$

$$e^{-2k} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{e^{2k}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{2k} = \ln = -ln2 \to k = \frac{ln2}{2} = \frac{1}{2}ln2$$

$$k = ln2^{\frac{1}{2}} = ln\sqrt{2}$$

(71) اذا كان العمر الافتراضي لمصباح كهربائي يعطى بدالة التوزيع الاحتمالي $f(t) = 4e^{-4t}$

حيث t الزمن بالسنوات،اذا تم اختيار مصباح كهربائي عشوائياً فان احتمال ان يدوم المصباح الكهربائي سنة او اقل هو

(a) 1 (b) 0.5

(c) 0.98 (d) 0.75

$$P(0 \leq x \leq 1) = \int_0^1 4e^{-4t} dt = \left[\frac{4e^{-4t}}{-4}\right]_0^1 = 0.98$$

(72) اذا كان العمر الافتراضي لمصباح كهربائي يعطى بدالة التوزيع الاحتمالي $f(t)=3e^{-3t}$

حيث t الزمن بالسنوات،اذا تم اختيار مصباح كهربائي عشوائياً فان احتمال ان يدوم المصباح الكهربائي اكثر من سنتين هو

(a) $\frac{1}{e^2}$

(b) $\frac{1}{e^6}$

(c) $\frac{1}{e}$

(d) $\frac{1}{e^4}$

$$\lim_{l\to\infty}\int_2^l 3e^{-3t}dt=\lim_{l\to\infty}\left[\frac{3e^{-3t}}{-3}\right]_0^l$$

$$-[0-e^0]=-\frac{-1}{e^0}=\frac{1}{e^0}$$

(73) ان الوسط الحسابي لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)=x+2x^3$ على الفترة $[0,1]$ يساوي

(a) 1

(b) $\frac{15}{11}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{11}{15}$

$$\mu=\int_0^1 x.f(x)dx=\int_0^1 x(x+2x^3)dx$$

$$\int_0^1 (x^2+2x^4)dx=\frac{11}{15}$$

(74) ان الوسيط لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ على الفترة $[0,\pi]$ يساوي

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

$$(median\ \text{الوسيط}) = \frac{1}{2} = \int_0^{m(\text{الوسيط})} f(x)dx = \int_0^{m(\text{الوسيط})} \frac{1}{2} sinxdx$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}[-cosx]_0^{m(\text{الوسيط})} \to 1 = -[\cos m - \cos 0]$$

$$-1 = \cos m - 1 \to \cos m = -1 + 1 = 0$$

$$m = cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

(75) ان الوسط الحسابي لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)=\dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$ على الفترة $[0,1]$ يساوي

(a) $\dfrac{2}{\pi}ln2$

(b) $4\pi\ln 2$

$$\mu=\int_0^1 x.f(x)dx=\int_0^1 x.\frac{4}{\pi(1+x^2)}dx$$

(c) $\dfrac{1}{2}$

(d) $\dfrac{1}{4}$

$$\mu=\int_0^1 \frac{4x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)}dx$$

$$\mu=\frac{2}{\pi}[\ln(1+x^2]_0^1$$

$$\mu=\frac{2}{\pi}(\ln 2-ln1)=\frac{2}{\pi}ln2$$

(76) اذا كان العمر الافتراضي لنوع من المصابيح الكهربائي يعطى بدالة التوزيع الاحتمالي

$f(t)=4te^{-2t}$ على الفترة $[0,1]$ حيث t الزمن بالسنوات

فان متوسط اعمار هذ النوع من المصابيح هو

(a) :0.33 (b) 0.5

(c) 0.42 (d) 0.85

$$\mu = \int_0^1 t.f(t)dt = \int_0^1 t.4te^{-2t}\,dt$$

$$\mu = \int_0^1 t.f(t)dt = \int_0^1 4t^2e^{-2t}\,dt=0.33$$