حل مراجعة الدرس الأول المساحة بين المنحنيات من الوحدة السادسة

إعداد: عماد عودة

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث	
	السادسة
4	حل أوراق عمل الوحدة السابعة طرق التكامل
5	أوراق عمل الوحدة السابعة طرق التكامل وتدريبات متبوعة بالإجابات

اختبر نفسك (1)
Check yourself (1)

Mathematics الرياضيات

الحل الحل

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الثالث

2024-2023

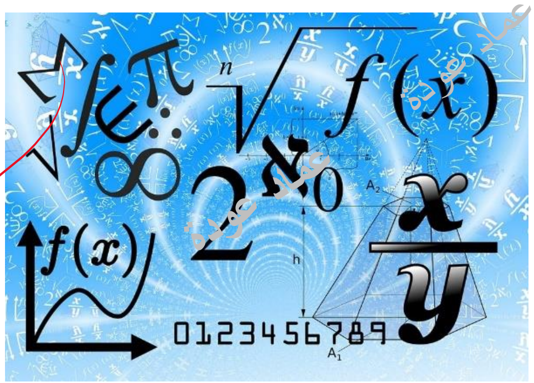
Lesson 6-1 (AREA BETWEEN CURVES)

according to the previous exam

مراجعة الدرس الاول (المساحة بين المنحنيات)
من الوحدة السادسة اعتمادا على
الاختبارات السابقة

الأستاذ عماد عودة

الحل الحل



اسم الطالب: -

الجزء الأول الاختيار من متعدد

Part One MCQ

Q1: - Find the area of the region bounded by the given curves

س1: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

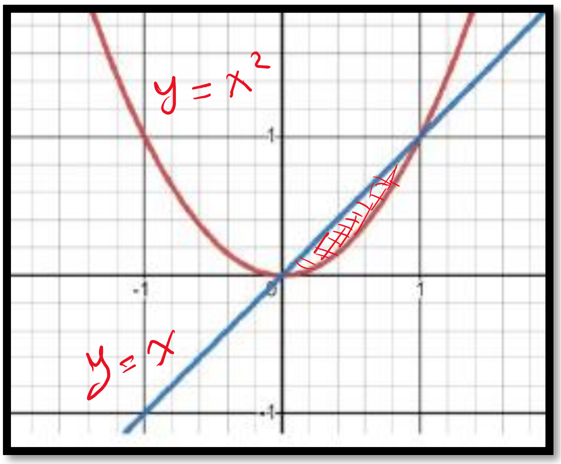
$$y = x,\ \ y = x^2$$

a) $A = \int_{-1}^{1} (x - x^2)dx$

b) $A = \int_{0}^{1} (x - x^2)dx$

c) $A = \int_{-1}^{1} (x^2 - x)dx$

d) $A = \int_{0}^{1} (x^2 - x)dx$



$$A = \int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx$$

من الرسم نحدد حدود المنطقة

Q2: - Find the area of the region bounded by the given curves

س2: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

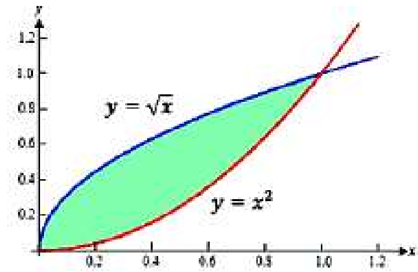
$$y = \sqrt{x}\,,\ \ y = x^2$$

a) $A = \frac{1}{6}$

b) $A = \frac{1}{3}$

c) $A = \frac{8}{3}$

d) $A = \frac{16}{3}$



بالآلة

$$A = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{1}{3}$$

Q3: - Find the area of the region bounded by the given curves

س3: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

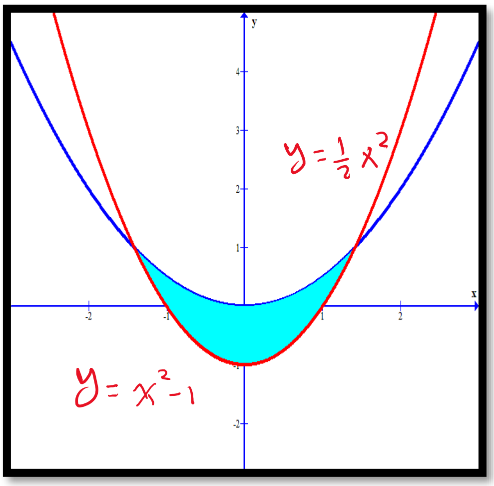
$$y = x^2 - 1, \qquad y = \frac{1}{2}x^2$$

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$

c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx$



نحدد اولاً نقاط التقاطع بمساواة الدالتين

$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$

$x^2 - \frac{1}{2}x^2 = 1$

$\frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore A = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1)\, dx$

$A = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -\frac{1}{2}x^2 + 1\, dx$

$A = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - \frac{1}{2}x^2\, dx$

Q4: - Find the area of the region bounded by the given curves — س4: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

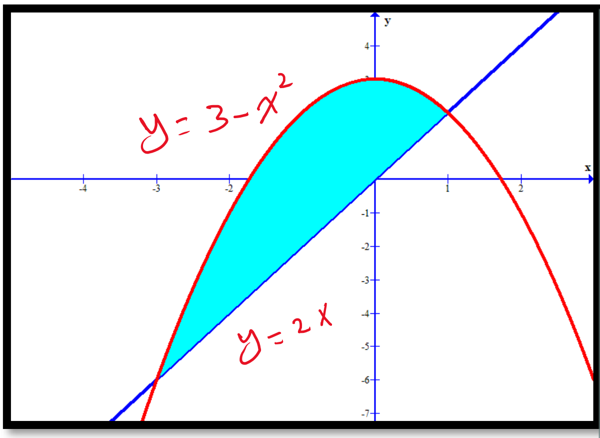
$$y = 2x \;,\quad y = 3 - x^2$$

a) $A = \dfrac{32}{3}$

b) $A = \dfrac{16}{3}$

c) $A = \dfrac{32}{3}\pi$

d) $A = \dfrac{16}{3}\pi$



من الرسم نحدد حدود المنطقة بالدالة

$$A = \int_{-3}^{1} 3 - x^2 - 2x \, dx$$

$$A = \frac{32}{3}$$

Q5: - Find the area of the region bounded by the given curves — س5: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

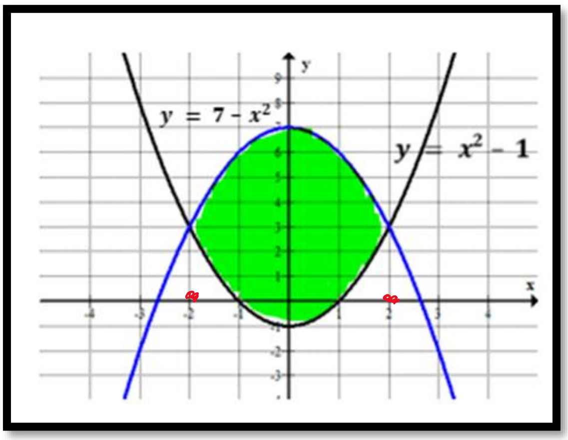
$$y = x^2 - 1, \quad y = 7 - x^2$$

a) $A = \displaystyle\int_{-2}^{2} ((7 - x^2) - (x^2 - 1)) \; dx$

b) $A = \displaystyle\int_{-2}^{2} ((x^2 - 1) - (7 - x^2)) \; dx$

c) $A = \displaystyle\int_{-1}^{7} ((y^2 + 1) - (7 - y^2)) \; dy$

d) $A = \displaystyle\int_{-1}^{7} ((7 - y^2) - (y^2 + 1)) \; dy$



من الرسم

$$A = \int_{-2}^{2} (7 - x^2) - (x^2 - 1) \, dx$$

Q6: - Find the area of the region bounded by the given curves

س6: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

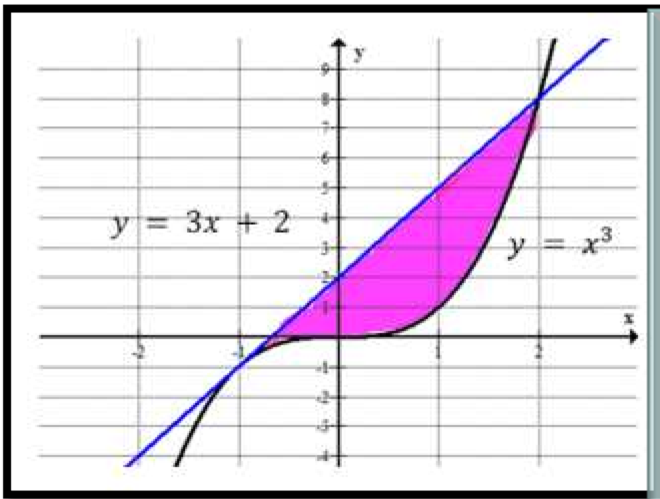
$$y = x^3, \qquad y = 3x + 2$$

a) $A = \dfrac{27}{4}$

b) $A = \dfrac{4}{27}$

c) $A = \dfrac{3645}{4}$

d) $A = \dfrac{15}{2}$



Imad Odeh

$A = \int_{-1}^{2} (3x+2) - x^3 \, dx$ بالالة

$A \int_{-1}^{2} -x^3 + 3x + 2 \, dx = \dfrac{27}{4}$

Q7: - Find the area of the region bounded by the given curves

س6: - أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

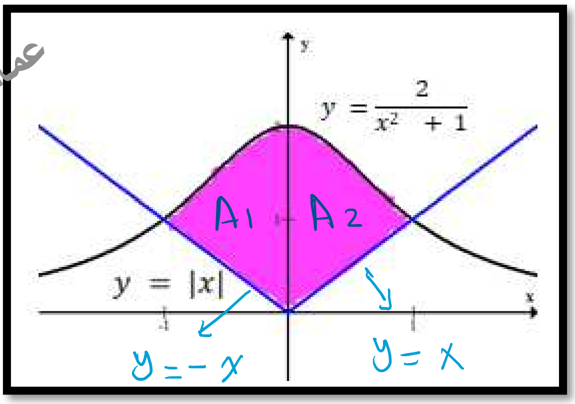
$$y = \frac{2}{x^2+1}\ , y = |x|$$

a) $A = \frac{\pi}{2} - 1$

b) $A = \pi + 1$

c) $A = \frac{\pi}{2} + 1$

d) $A = \pi - 1$



من الرسم نجد حدود التكامل نلاحظ وجود منطقتين متماثلتين

$A = A_1 + A_2 = 2A_1$

$A_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2}{x^2+1} - (-x)\,dx$

بالدالة

او بالكل

$A_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2}{x^2+1} + x\,dx$

$A_1 = 2\tan^{-1}(x) + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0}$

$= \left(2\tan^{-1}(0) + \frac{0^2}{2}\right) - \left(2\tan^{-1}(-1) + \frac{(-1)^2}{2}\right)$

$= (2(0)+0) - \left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

$A = 2A_1 \Rightarrow A = 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right] = \pi - 1$

Q8: - Find the area of the region bounded by the given curves

س8: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

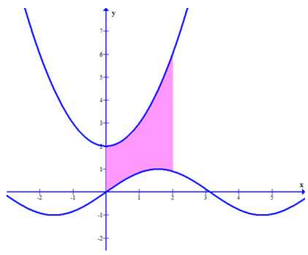
$$y = \sin x\,,\;\; y = x^2 + 2 \;\; \text{on interval} \;\; 0 \le x \le 2$$

a) $\dfrac{17}{3} - \sin 2$

b) $\dfrac{17}{3} + \sin 2$

c) $\dfrac{17}{3} - \cos 2$

d) $\dfrac{17}{3} + \cos 2$



$$A = \int_0^2 x^2 + 2 - \sin x \, dx = \frac{x^3}{3} + 2x + \cos x \Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2(2) + \cos 2\right) - (0 + 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{20}{3} + \cos 2 - 1 = \frac{17}{3} + \cos 2$$

Q9: - Find the area of the region bounded by the given curves

س9: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

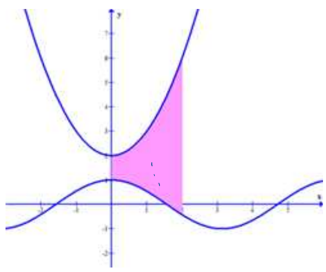
$$y = \cos x\,,\;\; y = x^2 + 2 \;\; on\ interval \;\; 0 \le x \le 2$$

a) $\dfrac{14}{3} - \sin 2$

b) $\dfrac{20}{3} - \sin 2$

c) $\dfrac{20}{3} - \cos 2$

d) $\dfrac{14}{3} - \cos 2$



$$A = \int_0^2 x^2 + 2 - \cos x \, dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \sin x \Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} + 2(2) - \sin 2\right] - [0 + 0 - 0]$$

$$= \frac{20}{3} - \sin 2$$

Q10: - Find the area of the region bounded by the given curves

س10: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

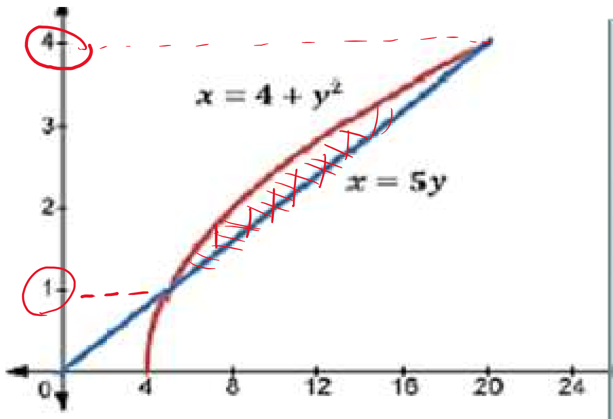
$$x = 5y\,,\quad x = 4 + y^2$$

a) $A = \int_{1}^{4} (5y - (4 + y^2)\, dy$

b) $A = \int_{5}^{20} (5x - (4 + x^2))\, dx$

c) $A = \int_{5}^{20} ((4 + y^2) - 5y)\ \ dy$

d) $A = \int_{1}^{4} ((4 + x^2) - 5x)\, dx$



I m a d O d e h

من الرسم نحدد حدود المنطقة بأخذ شريحة افقية ده

$$A = \int_{1}^{4} 5y - (4 + y^2)\, dy$$

Q11: - Find the area of the region bounded by the given curves

س11: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

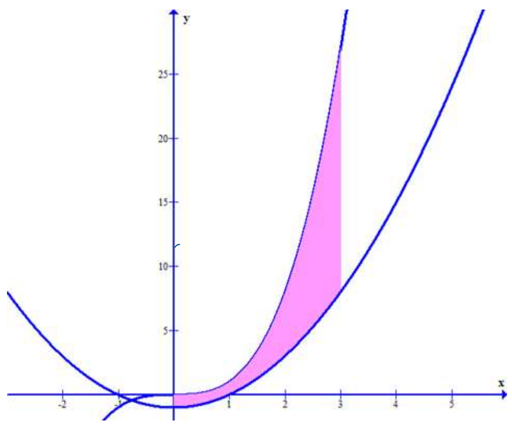
$$y = x^3\,, y = x^2 - 1,\qquad 1 \le x \le 3$$

a) $A = \int_{1}^{3} x^3 - x^2 - 1\ dx$

b) $A = \int_{1}^{3} x^3 - x^2 + 1\ dx$

c) $A = \int_{1}^{3} -x^3 - x^2 - 1\ dx$

d) $A = \int_{1}^{3} -x^3 - x^2 + 1\ dx$



I m a d O d e h

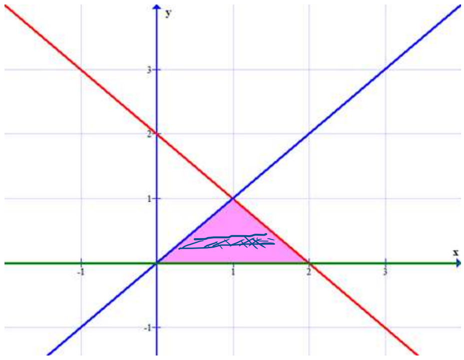
$$A = \int_{1}^{3} x^3 - (x^2 - 1)\, dx = \int_{1}^{3} x^3 - x^2 + 1\ dx$$

Q12: - Find the area of the region bounded by the given curves

س12: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = x\ ,\ \ y = 2 - x\ , y = 0$$

$x = y \qquad x = 2 - y$



a) $A = \int_0^1 2 - 2y\ dy$

b) $A = \int_0^1 2y - 2\ dy$

c) $A = \int_0^2 2x - 2\ dx$

d) $A = \int_0^2 2 - 2x\ dx$

نأخذ شريحة أفقية

$$A = \int_0^1 (2 - y) - y\ dy = \int_0^1 2 - 2y\ dy$$

Q13: - In term of $A_1, A_2 and A_3$ identify the area given by integral

س13: - بدلالة A_1, A_2, A_3 أي مما يلي يمثل المساحة المحددة بالتكامل

$$\int_0^4 (2 - \sqrt{y})dy$$

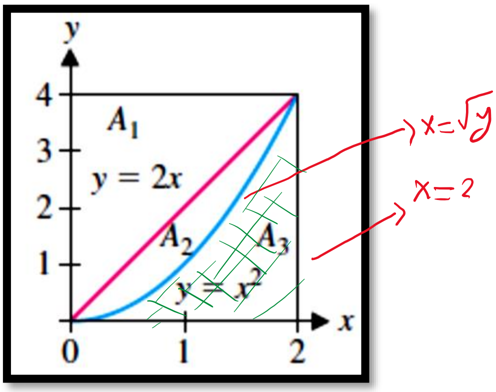
Right − left

a) A_1

b) $A_1 + A_2$

c) A_3

d) A_2



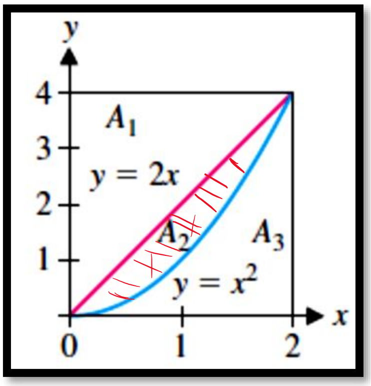
Right
$x = 2$

left
$x = \sqrt{y}$

من الرسم

Q14: - Give an integral equal to the area. س14: - اكتب تكاملا يمثل المساحة المحددة في ما يلي

A_2



a) $\int_0^4 (2x - x^2)dx$

b) $\int_0^2 (2x - x^2)dx$

c) $\int_0^4 \left(\frac{y}{2} - \sqrt{y}\right) dy$

d) $\int_0^4 (y^2 - 2y)dx$

$A = \int_{x=}^{x=} (up - down)dx$

$A = \int_0^2 2x - x^2$

or $A = \int_{y=}^{y=}$ Right - left

$A = \int_0^4 \sqrt{y} - \frac{y}{2} \; dy$

Q15: - In term of $A_1, A_2 and\ A_3$ identify the area given by integral س15: - بدلالة A_1, A_2, A_3 أي مما يلي يمثل المساحة المحددة بالتكامل

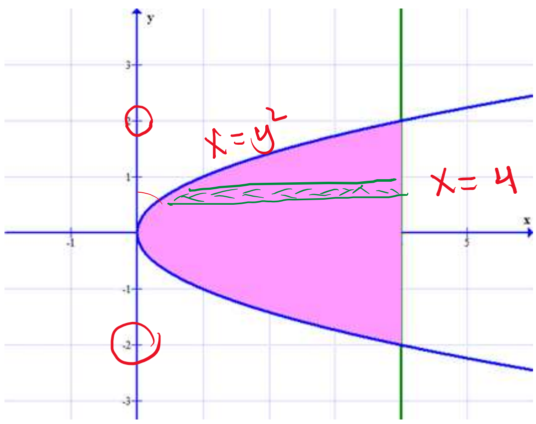
$x = y^2$, $x = 4$

a) $A = \int_0^2 y^2 - 4\, dy$

b) $A = \int_0^2 4 - y^2\, dy$

c) $A = \int_{-2}^2 y^2 - 4\, dy$

d) $A = \int_{-2}^2 4 - y^2\, dy$



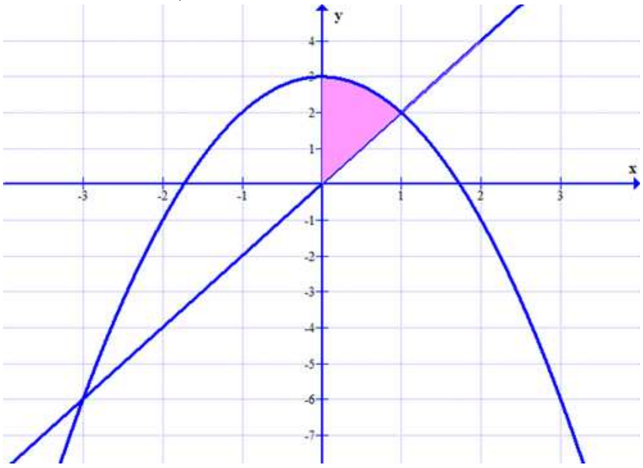
$A = \int_{-2}^2 4 - y^2 \; dy$

القسم الثاني الأسئلة الكتابية

Part Two FAQ

Q16: - Find the area of the region bounded by the given curves	س16: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = 2x\ (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$$



نقوم بتحديد نقاط التقاطع

$2x = 3 - x^2$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$ mode 5 3

$(x+3)(x-1) = 0$

$x = -3 \qquad x = 1$

نرسم ونحدد المنطقة المطلوبة

$$A = \int_0^1 3 - x^2 - 2x \, dx$$

$$= 3x - \frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} \Big|_0^1$$

$$A = \left[3(1) - \frac{(1)^3}{3} - (1)^2\right] - 0$$

$$A = 3 - \frac{1}{3} - 1$$

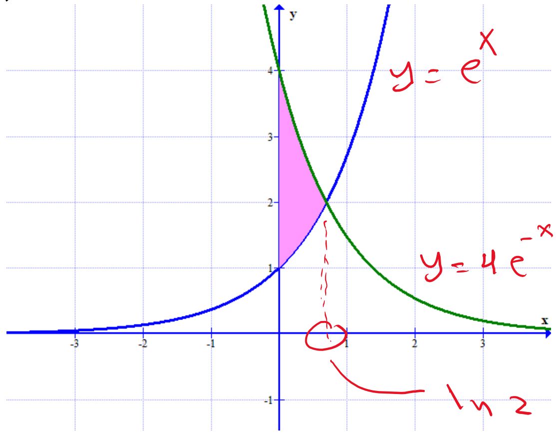
$$A = \frac{5}{3}$$

Q17: - Find the area of the region bounded by the given curves

س17: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = e^x \;,\quad y = 4e^{-x} \;,\qquad x = 0$$

نقوم أولاً بإيجاد نقاط التقاطع



$$e^x = 4e^{-x} \Rightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = 4$$

$$e^{2x} = 4$$

$$2x = \ln 4$$

$$x = \frac{1}{2}\ln 4 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

ثانياً نرسم ونحدد المنطقة

$$A = \int_0^{\ln 2} 4e^{-x} - e^x \, dx$$

$$A = -4e^{-x} - e^x \Big|_0^{\ln 2}$$

$$A = \left[-4e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}\right] - \left[-4e^0 - e^0\right]$$

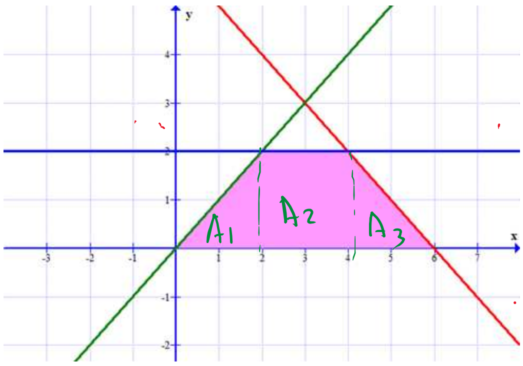
$$A = \left[-4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\right] - \left[-4 - 1\right] = [-4] - [-5] = 1$$

Q18: - Find the area of the region bounded by the given curves

س18: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = x\ ,\quad y = 2\ ,\quad y = 6 - x\ ,\quad y = 0$$

نقوم برسم وتحديد منطقة كل



الطريقة الاولى

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$A = \int_0^2 x - 0\,dx + \int_2^4 2 - 0\,dx + \int_4^6 6 - x - 0\,dx$

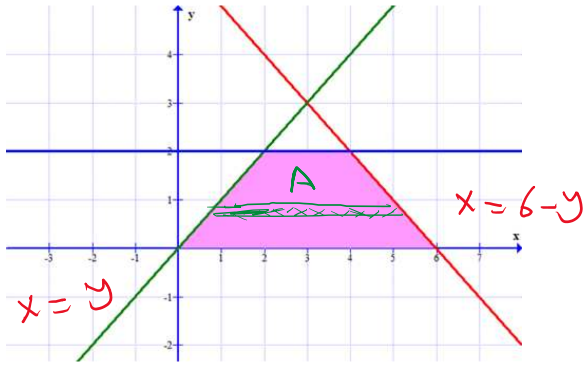
$A = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 2(4-2) + 6x - \frac{x^2}{2}\Big|_4^6$

$A = \frac{(2)^2}{2} + 2(2) + \left(6(6) - \frac{6^2}{2}\right) - \left(6(4) - \frac{4^2}{2}\right)$

$A = 2 + 4 + (36 - 18) - (24 - 8)$

$A = 2 + 4 + 18 - 16$

$A = 8$



الطريقة الثانية

$A = \int_0^2 (6 - y) - y\,dy$

$A = \int_0^2 6 - 2y\,dy$

$A = 6y - y^2\Big|_0^2$

$A = 6(2) - (2)^2 =$

$A = 8$

Q19: - Find the area of the region bounded by the given curves

س19: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

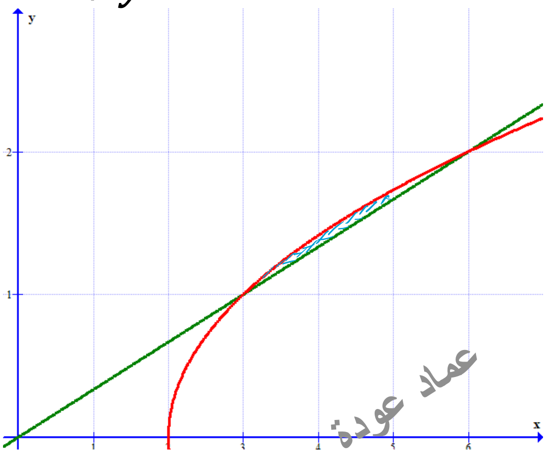
$$x = 3y\,,\, x = 2 + y^2$$

نجد نقاط التقاطع

$3y = 2 + y^2 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

بالتحليل او بالالة mode 5 3

$y = 1 \quad , \quad y = 2$



$$A = \int_1^2 3y - 2 - y^2 \, dy$$

$$A = \frac{3y^2}{2} - 2y - \frac{y^3}{3} \Big|_1^2$$

$$A = \left[3\frac{(2)^2}{2} - 2(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[\frac{3(1)^2}{2} - 2(1) - \frac{(1)^3}{3}\right]$$

$$A = \left[6 - 4 - \frac{8}{3}\right] - \left[\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{3}\right]$$

$$A = \frac{-2}{3} + \frac{5}{6}$$

$$A = \frac{1}{6}$$

Q20: - Find the area of the region bounded by the given curves

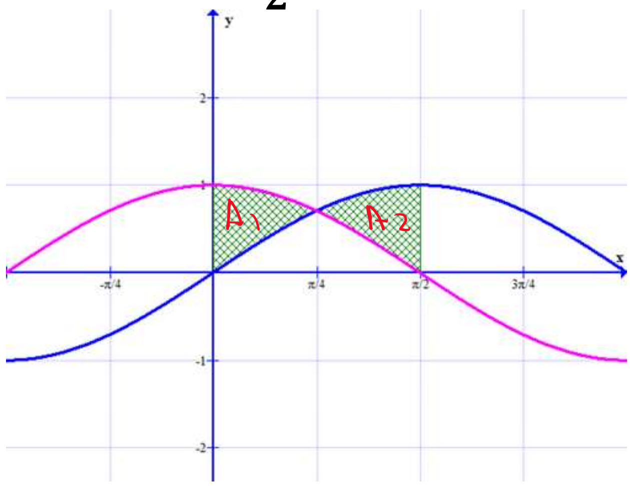
س20: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = \sin x , y = \cos x , 0, \le x \le \frac{\pi}{2}$$

لايجاد نقاط التقاطع

$\sin x = \cos x$

$x = \frac{\pi}{4}$



$A = A_1 + A_2$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x \, dx$$

$$A = \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = (\sqrt{2} - 1) + (-1 + \sqrt{2}) =$$

$$A = 2\sqrt{2} - 2$$

Q21: - The average value of a function $f(x)$ on the interval $[a, b]$ is

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Compute the average value of $f(x) = x^2$ on $[0, 3]$ and show that the area above $y = A$ and below $y = f(x)$ equals the area below $y = A$ and above $y = f(x)$.

س21: - إذا كانت نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ هي

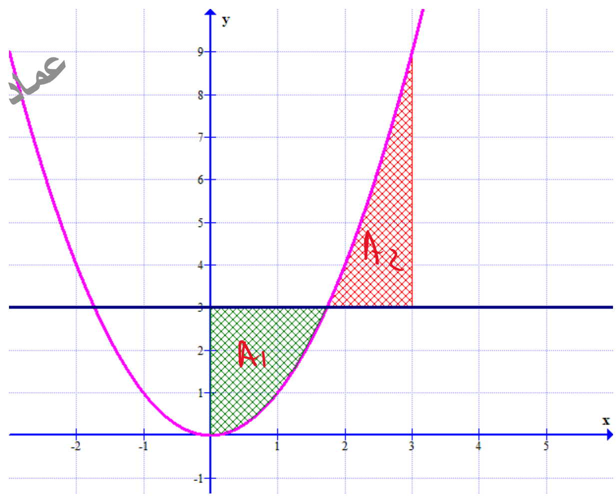
$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

احسب القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على $[0, 3]$ ثم بين ان المساحة تحت المنحنى $y = A$ وفوق المنحنى $y = f(x)$ تساوي المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المنحنى $y = A$

$A = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2 \, dx$ نحسب القيمة المتوسطة

$A = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right)$

$A = \frac{1}{3}\left(\frac{3^3}{3}\right) = \frac{1}{3}(9) = \boxed{3}$



نرسم الدالة الاصلية $y = x^2$

والخط المستقيم $y = 3$

الان نحسب نقاط التقاطع

$x^2 = 3 \Longrightarrow x = \sqrt{3}$, $\cancel{x = -\sqrt{3}}$ ليست ضمن الفترة

$\Longrightarrow A_1 = \int_0^{\sqrt{3}} 3 - x^2 \, dx = 3x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

$\Longrightarrow A_2 = \int_{\sqrt{3}}^{3} x^2 - 3 \, dx = \frac{x^3}{3} - 3x\Big|_{\sqrt{3}}^{3} = 2\sqrt{3}$

اي ان المساحتان متساويتان

Best washes

اطيب التمنيات