تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر المتقدم في مادة رياضيات الخاصة بـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/15

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر المتقدم اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade15

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/almanahj_bot

تعريف 3.1

بالنسبة إلى الدالة f المُعرَّفة في مجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$

(i) $f(c)$ هي **القيمة العظمى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$ و

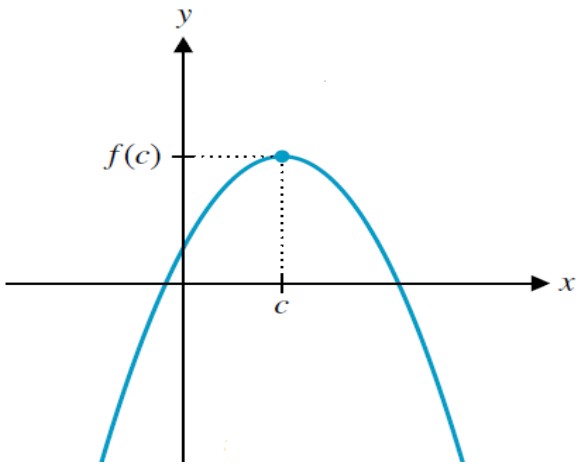
(ii) $f(c)$ هي **القيمة الصغرى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة يُشار إليها بـ **القيمة القصوى المطلقة**. (وصيغة الجمع للقيمة القصوى هي **القيم القصوى**).

القيم القصوى المطلقة (القيم القصوى) (داخلية أو طرفية)

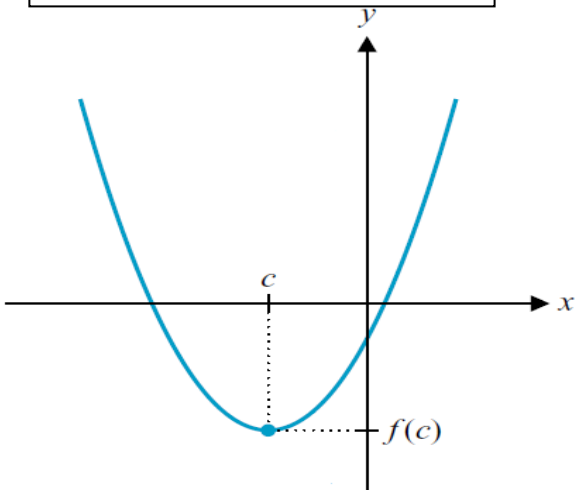
القيم العظمى المطلقة (القيم العظمى)

وهي أعلى قيمة للدالة في مجالها

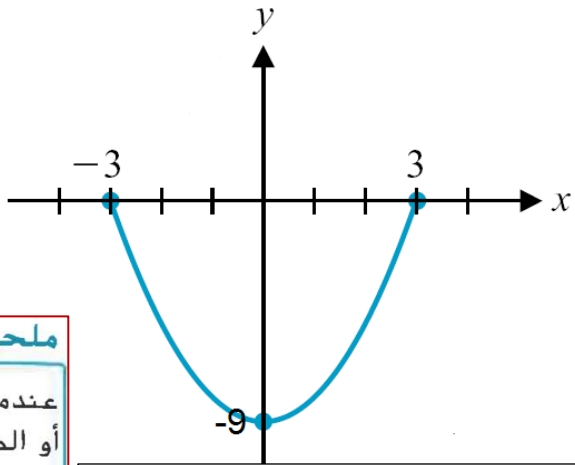


القيم الصغرى المطلقة (القيم الصغرى)

وهي أصغر قيمة للدالة في مجالها

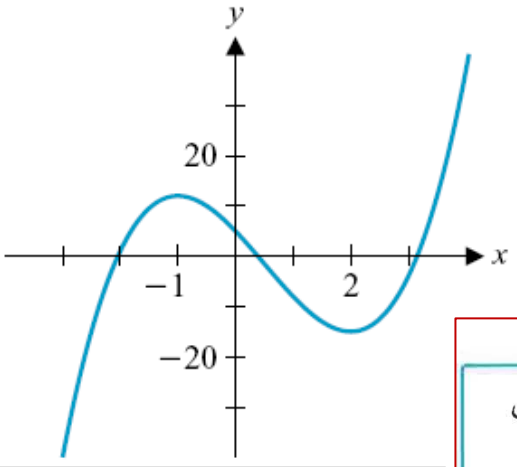


تدريب: حدد القيم القصوى للدوال التالية:



عظمى: ... $f(-3) = f(3) = 0$ ..

صغرى: ..... $f(0) = -9$ .....



عظمى: .... $f(-1) = 12$ .....

صغرى: ... $f(2) = -15$ ....

ملحوظة 3.3

عندما نستخدم القيم القصوى أو الصغرى أو العظمى بدون تحديد هل هي مطلقة أو محلية، فإننا سنشير دائمًا إلى القيم القصوى المطلقة.

التعريف 3.2

(i) $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

(ii) $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

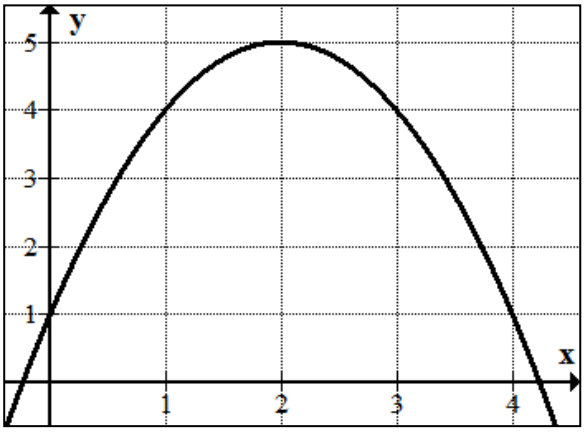
في كلتا الحالتين نطلق على $f(c)$ قيمة قصوى محلية للدالة f.

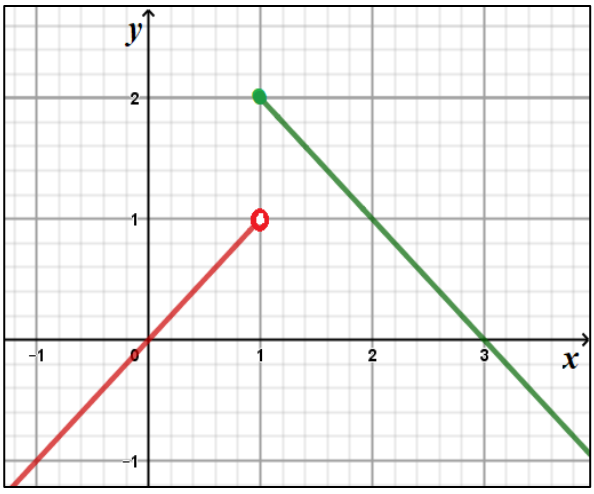
القيم القصوى المحلية (النسبية) (داخلية)

القيم العظمى المحلية (النسبية)

قمة

وهي أعلى نقطة في جوارها المباشر

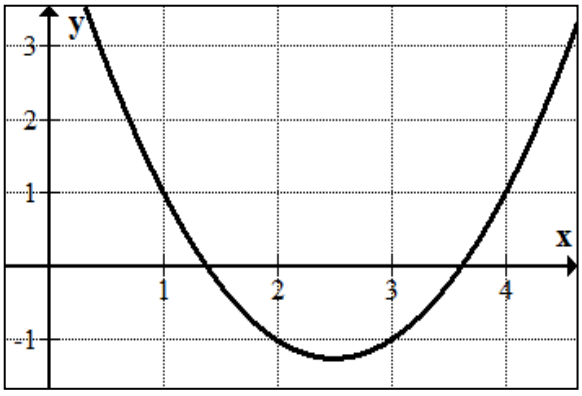


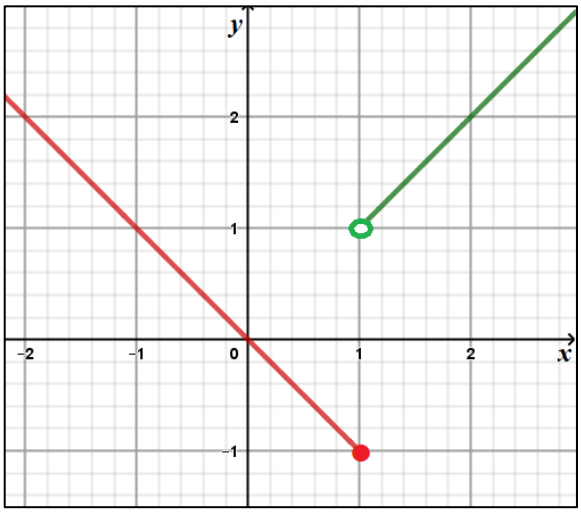


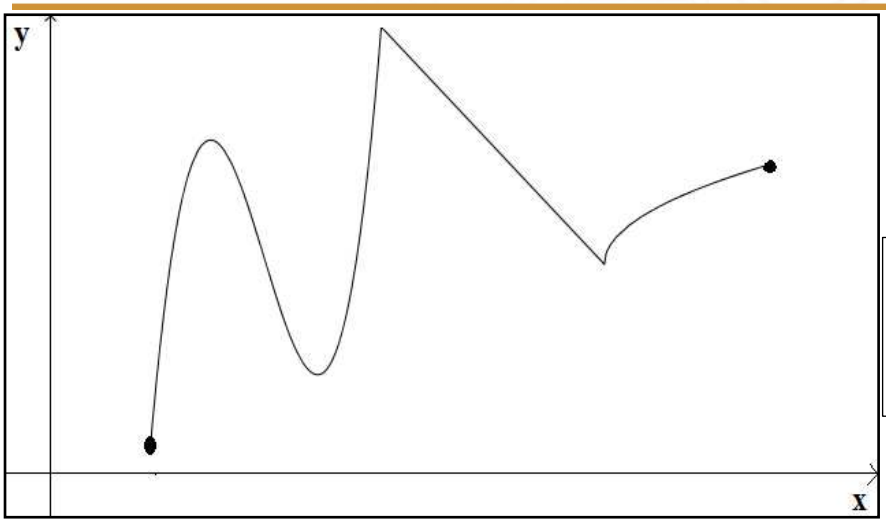
القيم الصغرى المحلية (النسبية)

قاع

وهي أصغر نقطة في جوارها المباشر



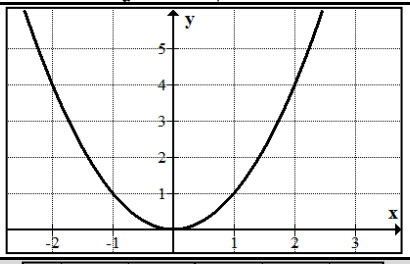
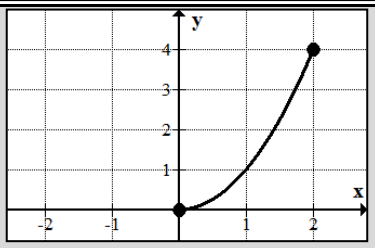
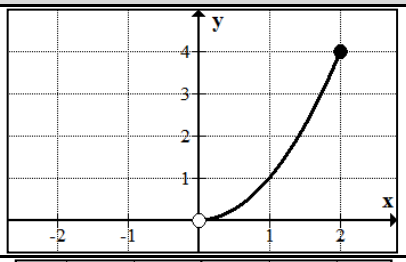
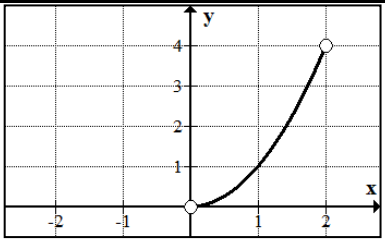




تدريب: أكتب على الرسم المقابل نوع كل القيم القصوى المطلقة وكذلك القيم القصوى المحلية.

تدريب: حدد صح (√) أم خطأ (×)
1) كل قيمة قصوى مطلقة تكون محلية. ( )
2) كل قيمة قصوى محلية تكون مطلقة. ( )

استكشاف: تأثير مجال الدوال المتصلة في تحديد القيم القصوى المطلقة :

الدالة	المجال	الرسم البياني	القيم القصوى المطلقة
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$		قيمة عظمى مطلقة: .. $f(0) = 0$ .. قيمة صغرى مطلقة: ... لا توجد ...
$y = x^2$	$[0, 2]$		قيمة عظمى مطلقة: . $f(2) = 4$. قيمة صغرى مطلقة: .. $f(0) = 0$ ..
$y = x^2$	$(0, 2]$		قيمة عظمى مطلقة: . $f(2) = 4$ .. قيمة صغرى مطلقة: ... لا توجد ...
$y = x^2$	$(0, 2)$		قيمة عظمى مطلقة: .. لا توجد .... قيمة صغرى مطلقة: ... لا توجد ...

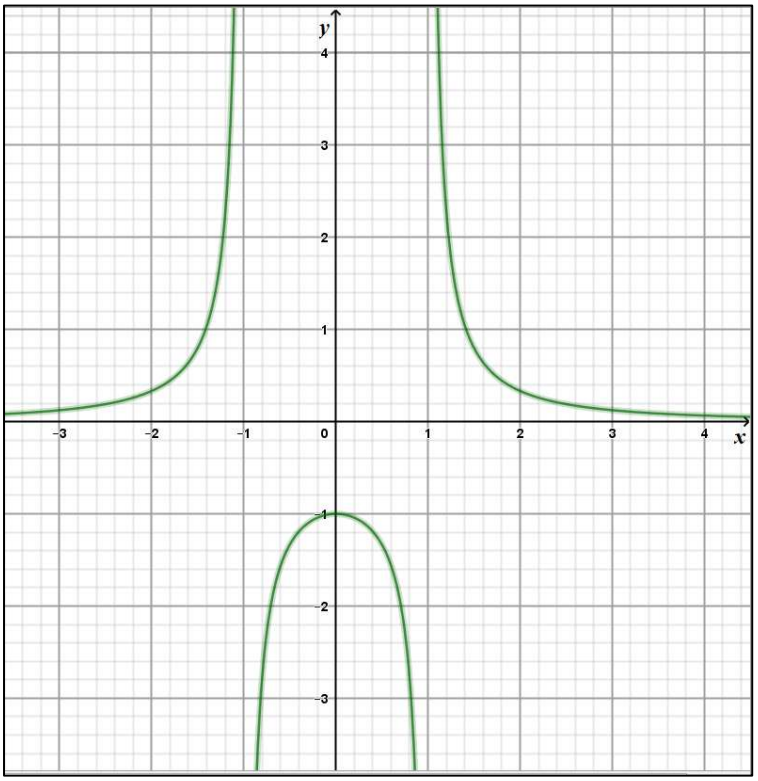
نظرية 3.1 (نظرية القيم القصوى)

الدالة المتصلة f المُعرَّفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ تحقق قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة.

تمارين ص 257:

استخدم التمثيل البياني لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة (إذا كانت موجودة) للدالة في الفترة المُعطاة.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$



(a) $(0, 1) \cup (1, \infty)$

عظمى مطلقة: ..... لا توجد .....

صغرى مطلقة: ..... لا توجد .....

(b) $(-1, 1)$

عظمى مطلقة: ..... $f(0) = -1$ .....

صغرى مطلقة: ..... لا توجد .....

(c) $(0, 1)$

عظمى مطلقة: ..... لا توجد .....

صغرى مطلقة: ..... لا توجد .....

(d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

عظمى مطلقة: ..... $f(0) = -1$ .....

صغرى مطلقة: .. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}$

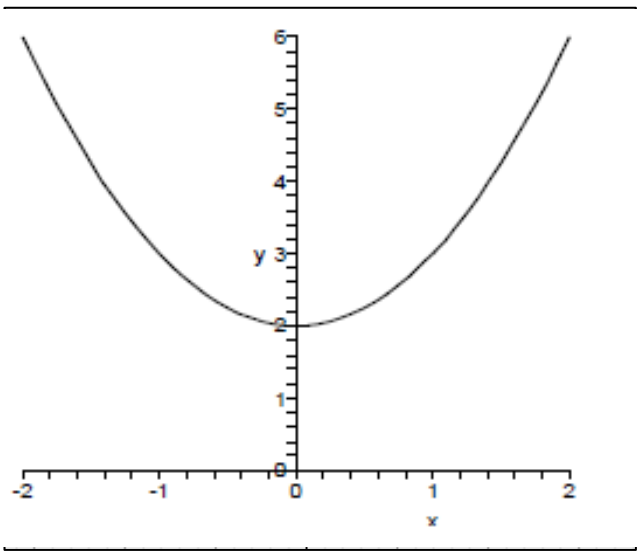
ملاحظة:

1) السؤال: حدد (مكان أو موقع) القيم القصوى ..... ⇐⇐⇐ **الجواب:** عند $x =$ .....

2) السؤال: حدد القيم القصوى ..... ⇐⇐⇐ **الجواب:** $f(\ldots.) =$ .....

تمارين ص 258:

39. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدلة متصلة f بحيث:



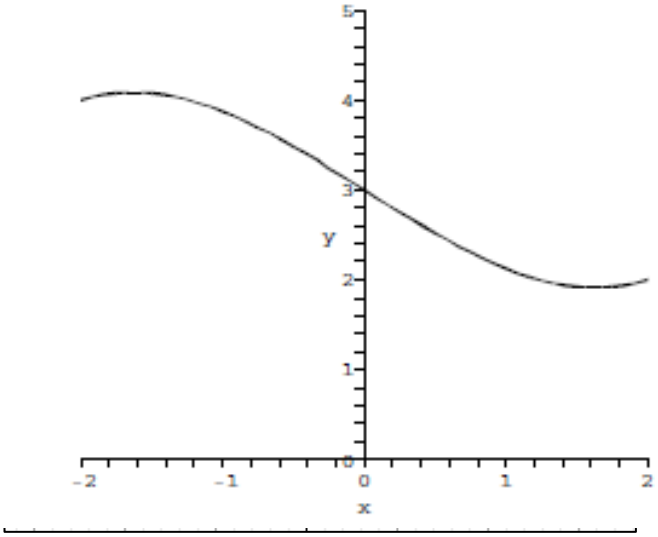
التمثيل البياني يكون في الفترة (2 , 2-)

القيمة العظمى المطلقة للدالة f غير موجودة

القيمة الصغرى المطلقة للدالة f هي 2

تفكير ناقد
هل توجد حلولًا أخرى صحيحة للمسألة؟

41. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدلة متصلة f بحيث:



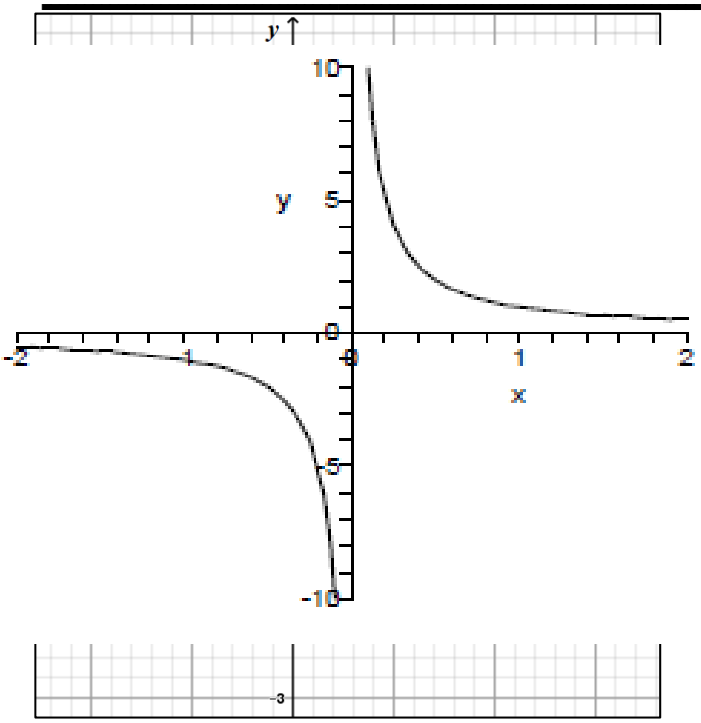
التمثيل البياني يكون في الفترة (2 , 2-)

القيمة العظمى المطلقة للدالة f هي 4

القيمة الصغرى المطلقة للدالة f هي 2

تفكير ناقد
هل توجد حلولًا أخرى صحيحة للمسألة؟

42. ارسم تمثيلًا بيانيًا لدلة f بحيث:



التمثيل البياني يكون في الفترة [2 , 2 -]

لا توجد قيمة عظمى مطلقة للدالة f

لا توجد قيمة صغرى مطلقة للدالة f

تفكير ناقد
هل توجد حلولًا أخرى صحيحة للمسألة؟

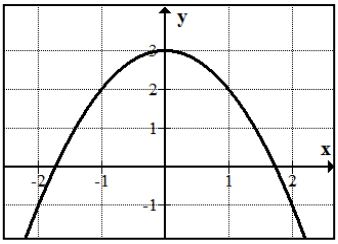
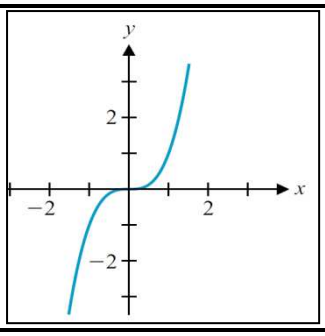
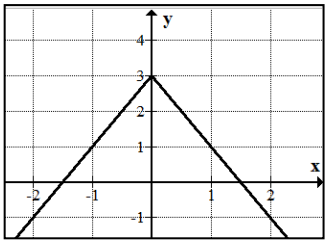
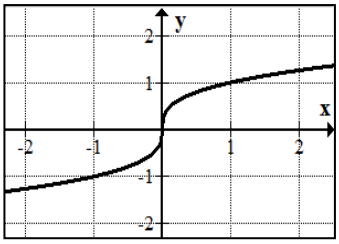
التعريف 3.3

يسمّى العدد c في مجال دالة معينة f **عددًا حرجًا** لـ f إذا كانت $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير معرّفة.

الأعداد الحرجة للدالة تحدث عند نقطة **داخلية** في مجال الدالة يكون عندها

غير موجودة $f'(x)$ **أو** $f'(x)=0$

استكشاف: النقطة الحرجة للدالة وعلاقتها بالمشتقة الأولى والقيم القصوى المحلية:

1	2	3	4
			
عند $x=0$ $f'(x)=0$. فهي نقطة حرجة للدالة	عند $x=0$ $f'(x)=0$. فهي نقطة حرجة للدالة	عند $x=0$ $f'(x)$.. غير معرفة . فهي نقطة حرجة للدالة	عند $x=0$ $f'(x)$.. غير معرفة . فهي نقطة حرجة للدالة
✓ توجد ☐ لا توجد قيمة قصوى محلية	☐ توجد ✓ لا توجد قيمة قصوى محلية	✓ توجد ☐ لا توجد قيمة قصوى محلية	☐ توجد ✓ لا توجد قيمة قصوى محلية

تدريب: ضع (√) أو (X):

1) كل عدد حرج للدالة يوجد عنده قيماً قصوى محلية. (×)

2) كل قيمة قصوى محلية للدالة تكون عددًا حرجًا للدالة. (✓)

مما سبق يتضح أن القيم القصوى المحلية تحدث فقط عندما تكون المشتقة صفرًا أو المشتقة غير مُعرفة.

النظرية 3.2 (نظرية فيرمات)

على فرض أن $f(c)$ يمثل قيمة قصوى محلية (عظمى محلية –صغرى محلية). إذَا يجب أن يكون c عددًا حرجًا لـ f .

النظرية 3.3

على فرض أن f متصلة في الفترة المغلقة $[a, b]$. يجب على كل قيمة قصوى مطلقة لـ f ان تكون موجودة عند نقطة نهاية (a أو b) أو عند عدد حرج.

تمارين ص 258: أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة في الفترة المُشار إليها:

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 2]$

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = 3x^2 - 3$ .....

الأعداد الحرجة: $f'(x)$ غير موجودة أو $f'(x) = 0$

..... $f`(x) = 3(x^2 - 1) = 0$ .....

..... $3(x - 1)(x + 1) = 0$ .....

$x = 1 \quad , \quad x = -1$

قيم الدالة:

x	~~-1~~	0	1	2
$f(x)$	~~3~~	1	-1	3

..... $f(1) = -1$ ..... قيمة صغرى .....

..... $f(2) = 3$ ..... قيمة عظمى ... قيمة صغرى ..... خارج المجال .....

تمارين ص 258: أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة في الفترة الُشار إليها:

27. $f(x) = x^{2/3}$ في الفترة $[-1, 3]$

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow f`(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .....

الأعداد الحرجة: $f'(x)$ غير موجودة أو $f'(x) = 0$

..... $3\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0$ .....

قيم الدالة:

x	-1	0	3
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

..... $f(0) = 0$ ..... قيمة صغرى .....

..... $f(3) = \sqrt[3]{9}$ ..... قيمة عظمى ..... قيمة صغرى .....

تمارين ص 258: أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة في الفترة المُشار إليها:

29. $f(x) = e^{-x^2}$ في الفترة $[0, 2]$

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = \frac{-2x}{e^{x^2}}$ ..... $\rightarrow$ ..... $f`(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

الأعداد الحرجة: $f'(x)$ غير موجودة أو $f'(x) = 0$

$-2x = 0 \rightarrow x = 0$

x	0	2
$f(x)$	1	e^{-4}
	قيمة عظمى	قيمة صغرى

قيم الدالة:

$f(0) = 1$ ..... قيمة عظمى

$f(2) = e^{-4}$ ..... قيمة صغرى

تمارين ص 258: أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة في الفترة المُشار إليها:

33. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ في الفترة $[-3, 3]$

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$ $\rightarrow$ ..... $f`(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2+1)^2}$

الأعداد الحرجة: $f'(x)$ غير موجودة أو $f'(x) = 0$

$1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
		قيمة صغرى	قيمة عظمى	

قيم الدالة:

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ ..... قيمة صغرى

$f(1) = \frac{1}{2}$ ..... قيمة عظمى

مختبر الرياضيات: يمكنك استخدام برنامج Geogebra لإيجاد القيم القصوى المطلقة كالتالي:

1) اكتب الدالة $f(x)$ في نافذة الإدخال واضغط Enter

2) استخدم الأمر Input: Max(<Function>, <Start x-Value>, <End x-Value>) ثم Enter لتحصل على القيمة العظمى المطلقة.

3) استخدم الأمر Input: Min(<Function>, <Start x-Value>, <End x-Value>) ثم Enter لتحصل على القيمة العظمى المطلقة.

تمارين ص 258:

12. $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

أولًا: جد كل الأعداد الحرجة يدويًا.

مجال الدالة: ..... $R = (-\infty, \infty)$.

المشتقة الأولى: ..... $f`(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ .....

الأعداد الحرجة: $f'(x)$ غير موجودة **أو** $f'(x) = 0$

$f`(x) = \frac{\sqrt{3}\cos}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}$ ..... بالقسمة على $\cos x$ .....

.....

$f`(x) = \sqrt{3} - \tan x = 0$ .....

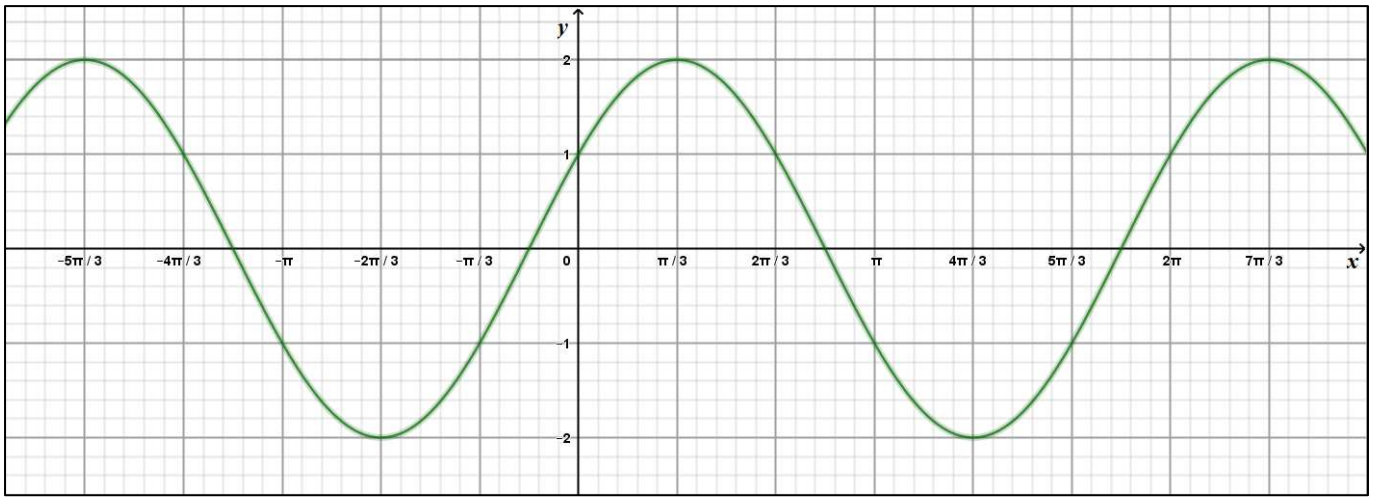
..... $x = \frac{\pi}{3}$ .....

.....

.....

ثانيًا: استخدم تكنولوجيا التمثيل البياني لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما.

مختبر الرياضيات: استخدم برنامج **Geogebra** لترسم الدالة $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$
وحدد من الرسم مواقع القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية.



القيم العظمى المحلية عند: ..... حيث k عدد زوجي ..... $f\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = 2$

القيم الصغرى المحلية عند: ..... حيث k عدد فردي ..... $f\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right) = -2$

تمارين ص 258:

23. $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & if\ x<0\\ x^2-4x+3 & if\ x\geq 0\end{cases}$

أولًا: جد كل الأعداد الحرجة يدويًا.

مجال الدالة: ..... $R=(-\infty,\infty)$ ..

المشتقة الأولى: ..... $f`(x)=\begin{cases}2x+2 & x<0\\ 2x-4 & x\geq 0\end{cases}$ .....

الأعداد الحرجة: $f'(x)$ غير موجودة أو $f'(x)=0$

$2x+2=0 \rightarrow x=-1$

$2x-4=0 \rightarrow x=2$

ثانيًا: استخدم تكنولوجيا التمثيل البياني لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما.

مختبر الرياضيات: استخدم برنامج Geogebra

لترسم الفرع الأول للدالة $f(x)$ اكتب: Input: f(x)=x^2+2x-1,x<0 ثم Enter

لترسم الفرع الثاني للدالة $f(x)$ اكتب: Input: g(x)=x^2-4x+3,x>=0 ثم Enter

وحدد من الرسم مواقع القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية.

القيم الصغرى المحلية عند:

$f(2)=-1$ ..... $f(-1)=-2$

القيم العظمى المحلية عند:

..... لا توجد .....