مصطلحات ورموز: في الاقتصاد يُستخدم المصطلح حدّية للإشارة إلى المعدل

الإيراد $R(x)$	→	الإيراد الحدي $R'(x)$
التكلفة $C(x)$	→	التكلفة الحدية $C'(x)$
الربح $P(x)$	→	الربح الحدي $P'(x)$
$P(x) = R(x) - C(x)$	→	$P'(x) = R'(x) - C'(x)$

مستوى الإنتاج:
نقصد به عدد الوحدات المنتجة x

أولًا: التكلفة الحدية: إذا كانت $C(x)$ هي دالة التكلفة لعدد x منتج فإن:

1) دالة التكلفة الحدية هي $C'(x)$
2) التكلفة الحدية عند $x = n$ هي $C'(n)$
3) التكلفة الفعلية للمنتج رقم n هي $C(n) - C(n-1)$

تمارين ص 313:

2. إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$
أوجد دالة التكلفة الحدية

$C`(x) = 4x^3 + 28x + 60$ ....

قارن بين التكلفة الحدية عند $x = 50$ والتكلفة الفعلية للمنتج رقم 50

* التكلفة الحدية عند $x = 50$

$C`(50) = 4(50)^3 + 28(50) + 60 = 501460$ ....

....

* التكلفة الفعلية للمنتج رقم 50

$C(50) - C(49) = 6,288,035 - 5,801,390 = 486,645$ ....

....

لاحظ أن التكلفة الفعلية للمنتج رقم 50 قريبة جدًا من التكلفة الحدية عند x = 50

ثانيًا: القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة: إذا كانت C(x) هي دالة التكلفة لعدد x منتج فلإيجاد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة:

1) نوجد دالة متوسط التكلفة: $\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

2) نوجد المشتقة الأولى $\overline{C}^{/}(x)$ والأعداد الحرجة في المجال $x>0$

3) نستخدم اختبار المشتقة الأولى (إذا الأعداد الحرجة وحيدة) أو اختبار المشتقة الثانية (إذا الأعداد الحرجة وحيدة أو غير وحيدة)، لتحديد قيمة x التي تحدث عندها القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

تمارين ص 313: أوجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

7. $C(x)=0.1x^2+3x+2000$

1) دالة متوسط التكلفة:

$\overline{C}(x)=\frac{0.1\,x^2+3x+2000}{x}$ .... $\rightarrow$ .... $\overline{C}(x)=0.1\,x+3+\frac{2000}{x}$ ....

....

2) المشتقة الأولى والأعداد الحرجة في المجال $x>0$:

$\overline{C}`(x)=0.1-\frac{2000}{x^2}$ .... $\rightarrow$ .... $0=0.1-\frac{2000}{x^2}$ ....

....

$0.1x^2=2000$ .... $\rightarrow$ ...... $x=100\sqrt{2}$ .... عدد حرج ....

....

3) اختبار المشتقة ....:

		$100\sqrt{2}$	
$f^{/}(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

....

.... $x=100\sqrt{2}$ .. هناك قيمة صغرى محلية عند

....

....

ثالثًا: القيمة العظمى للربح:

تمارين ص 313:

12. لتكن $R(x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع x منتج. تُعرف الأرباح بأنها $P(x) = R(x) - C(x)$.

(a) بيّن انه عند قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للأرباح، فان الإيرادات الحدية تساوى التكلفة الحدية.

$P(x) = R(x) - C(x)$

$P`(x) = R`(x) - C`(x)$

$P`(x) = 0$ عند القيمة العظمى للارباح تكون

$R`(x) = C`(x)$

(b) أوجد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت $R(x) = 10x - 0.001x^2$ دولار و $C(x) = 2x + 5000$ دولار.

* أولًا: إيجاد مستوى الإنتاج x التي تحدث عنده القيمة العظمى للربح:

$P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = 10x - 0.001x^2 - 2x - 5000$

$P(x) = 8x - 0.001x^2 - 5000$

$P`(x) = 8 - 0.002x$

* ثانيًا: إيجاد القيمة العظمى للربح:

$8 - 0.002x = 0 \rightarrow 8 = 0.002x \rightarrow x = 4000$

$P``(x) = -0.002 < 0$

هناك قيمة عظمى للارباح عند $x = 4000$

رابعًا: مرونة الطلب والتغير في الإيرادات: في معظم الحالات عندما يرتفع السعر لأي منتج يتناقص الطلب عليه.

فإذا كان *f(p)* هو طلب منتج بسعر *p* درهم فإن:

1) مرونة الطلب هي: $E = \frac{p}{f(p)} f^{/}(p)$

2) مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا هو: $E < -1$

3) الإيرادات هي: $p\,f(p)$

تمارين ص 313:

إذا كان *f(p)* هو طلب منتج بسعر *p* درهم:

13) f(p) = 200 (30 -p)

a) أوجد مرونة الطلب.

$$f^{/}(p) = \quad f`(p) = 0(30-p) - 200 = -200$$

$$E = \frac{p}{f(p)} f^{/}(p) = \quad E = \frac{p}{200(30-p)}(-200) \rightarrow . E = \frac{-p}{(30-p)}$$

b) أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا : $(E < -1)$

E لها مقارب رأسي و E < -1

$$30 - p = 0$$

$$p = 30$$

$$\frac{-p}{(30-p)} < -1 \rightarrow \frac{-p}{(30-p)} + 1 < 0$$

$$\frac{-p+30-p}{(30-p)} < 0 \rightarrow \frac{-2p+30}{(30-p)} < 0$$

$$-2p = -30 \rightarrow p = 15$$

∴ مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا هو $15 < p < 30$

المعلم: طه أبو الفتوح

تمارين ص 313:

إذا كان *f(p)* هو طلب منتج بسعر *p* درهم:

15) $f(p) = 100p\,(20 - p)$

a) أوجد مرونة الطلب.

$f'(p) =$ $f'(p) = 100(20-p) - 100p$ ……………

……$f'(p) = 100(20-2p)$ ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$E = \dfrac{p}{f(p)} f'(p) =$ .. $E = \dfrac{p}{100p\,(20-p)} 100(20-2p)$ ………………

………$E = \dfrac{(20-2p)}{(20-p)}$ ……………………………………………………………

b) أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا : $(E < -1)$

E لها مقارب رأسي و E < -1

…………… $20 - p = 0$ ……………………………

…………… $p = 20$ ……………………………

$\dfrac{(20-2p)}{(20-p)} < -1$ ……… $\rightarrow$ $\dfrac{(20-2p)}{(20-p)} + 1 < 0$

$\dfrac{20-2p+20-p}{(20-p)} < 0$ ……… $\rightarrow$ $\dfrac{40-3p}{(20-p)} < 0$

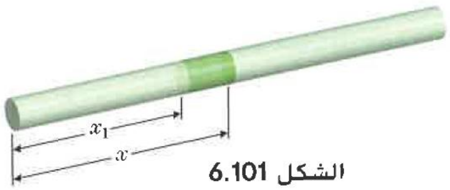
……………………………………………………………………………………………

$40 - 3p = 0$ ….. $\rightarrow$ …… $p = \dfrac{40}{3}$ ……………………………………

∴ مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا هو ……… $\dfrac{40}{3} < p < 20$ …………………

خامسًا: كثافة القضيب الرقيق:

على فرض أن كثافة x متر الأولى من قضيب رقيق هي $f(x)$ فإن الكثافة الخطية للقضيب عند $x = x_1$ هي : $\rho(x_1) = f^{/}(x_1)$



الشكل 6.101
قضيب رقيق

مثال 9.6 كثافة القضيب الرقيق

على فرض أن كثافة الأول x متر من القضيب الرقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$، وقارن الكثافتين عند النقطتين.

$$f^{`}(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\rho(2) = f^{`}(2) = \frac{1}{\sqrt{2(2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\rho(8) = f^{`}(8) = \frac{1}{\sqrt{2(8)}} = \frac{1}{4}$$

القضيب الرقيق غير متجانس (أى أن كثافة الكتلة للقضيب غير ثابتة)

سادسًا: نمذجة التيار في سلك:

على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية هي $Q(t)$ كولوم فإن التيار هو: $Q^{/}(t)$

تمارين ص 314:

34. على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^t(3\cos 2t + \sin 2t)$ كولوم. أوجد التيار

$$Q^{`}(t) = e^t(3\cos 2t + \sin 2t) + e^t(-6\sin 2t + 2\cos 2t)$$

$$= 3e^t\cos 2t + e^t\sin 2t - 6e^t\sin 2t + 2e^t\cos 2t$$

$$Q^{`}(t) = 5e^t[\cos 2t - \sin 2t]$$

سابعًا: نمذجة سرعة التفاعل الكيميائي:

تمارين ص 314:

19) إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة $x'(t) = 2x(t)[\,4 - x(t)]$

a) أوجد التركيز $x\,(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى.

* إعادة كتابة الدالة

نفرض أن $f(x) = 2x(4 - x)$

* المشتقة الأولى والأعداد الحرجة

$f`(x) = 2(4 - x) - 2x \longrightarrow f`(x) = 8 - 4x$

$8 - 4x = 0 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow f(x)$ قيمة عظمى

$x`(t) = 2x(t)[4 - x(t)] = 0 \longrightarrow x = 0 \;,\; x = 4$ أعداد حرجة

* اختبار المشتقة الأولى

		$x = 0$	$x = 4$
$f^{/}(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

b) أوجد حدود التركيز.

حدود التركيز هى 4