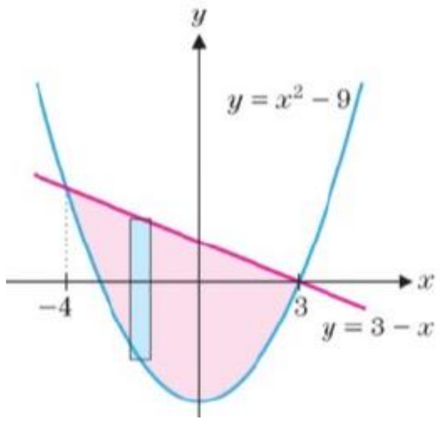
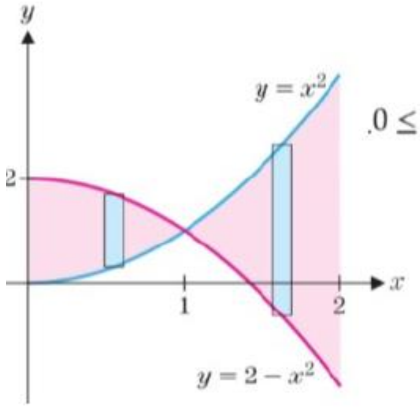
بسم الله الرحمن الرحيم

درس المساحة بين منحنيين (أو أكثر)

المثال 1.1 إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين

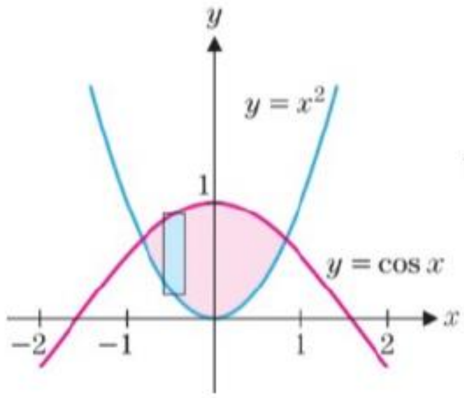
أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$.





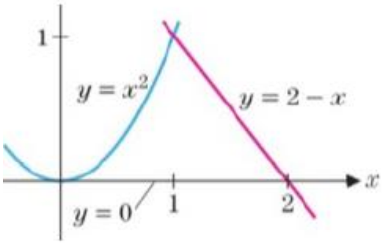
المثال 1.2 إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين متقاطعين

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ لأجل $0 \le x \le 2$.



المثال 1.3 حالة تكون فيها نقاط التقاطع معروفة تقريبيًا فقط

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$.



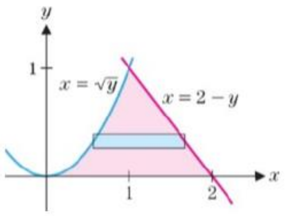
المثال 1.4 **مساحة منطقة تحددها ثلاثة منحنيات**

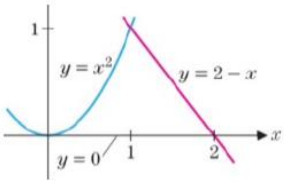
أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^2$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.

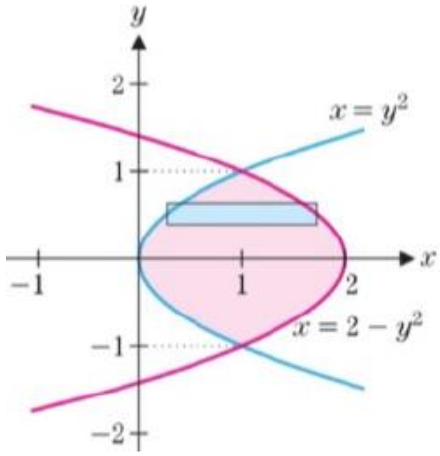
المثال 1.5 **مساحة منطقة محسوبة كتكامل بمعلومية y**

كرّر المثال 1.4، ولكن التكامل بمعلومية y بدلًا من ذلك.

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^2$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.







المثال 1.6 **مساحة منطقة محدودة بدوال y**

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$.

المثال 1.7 تقدير الطاقة المفقودة بواسطة كرة التنس

على فرض أنّ قياسات الاختبار توفر البيانات التالية أثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب. قدّر نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام.

x (cm)	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	110	220	400	700
$f_e(x)$ (N)	0	100	200	300	700

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x) - f_e(x)$	0	10	20	100	0

في التمارين 4−1، أوجد المساحة بين المنحنيين على الفترة المُعطاة.

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \le x \le 2$

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \le x \le 0$

4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \le x \le 4$

في التمارين 12–5، ارسم وأوجد مساحة المنطقة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات.

5. $y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$

6. $y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$

7. $y = x^3, y = 3x + 2$

8. $y = \sqrt{x}, y = x^2$

9. $y = 4xe^{-x^2}$, $y = |x|$

10. $y = \frac{2}{x^2 + 1}, y = |x|$

11. $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}, y = x$

12. $y = \sin x \ (0 \leq x \leq 2\pi)$, $y = \cos x$

في التمارين 18–13، ارسم وقدّر المساحة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات.

13. $y = e^x, y = 1 - x^2$

14. $y = x^4, y = 1 - x$

15. $y = \sin x, y = x^2$

16. $y = \cos x, y = x^4$

17. $y = x^4, y = 2 + x$

18. $y = \ln x, y = x^2 - 2$

في التمارين 26–19، ارسم وأوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات المُعطاة. اخترْ متغيّر التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد. تحقق من إجاباتك على التمارين 21–19 باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة.

19. $y = x, y = 2 - x, y = 0$

20. $y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$

21. $x = y, x = -y, x = 1$

22. $x = 3y, x = 2 + y^2$

23. $y = 2x\ (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$

24. $x = y^2, x = 4$

25. $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$

26. $y = \frac{\ln x}{x}, y = \frac{1 - x}{x^2 + 1}, 1 \le x \le 4$

28. باستخدام المفهوم نفسه كما في التمرين 27. تُعطى القيم للقوة $f_c(x)$ أثناء إنكماش كرة الجولف والقوة $f_e(x)$ أثناء تمدّدها من العلاقة

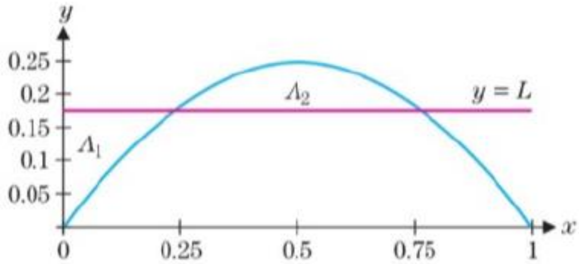
x (cm)	0	1.125	2.250	3.375	4.5
$f_c(x)$ (N)	0	880	2200	4400	7900
$f_e(x)$ (N)	0	550	1540	3000	7900

30. يعمل قوس القدم البشري مثل النابض أثناء المشي والقفز، فيخزّن الطاقة بينما يمتد القدم (أي يصبح القوس مسطحًا) ويعيد الطاقة بينما يرتد القدم. في البيانات، x هي الإزاحة العمودية للقوس و $f_s(x)$ هي القوة على القدم أثناء التمدّد و $f_r(x)$ هي القوة أثناء الارتداد (انظر كتاب ألكسندر *Exploring Biomechanics*)؛

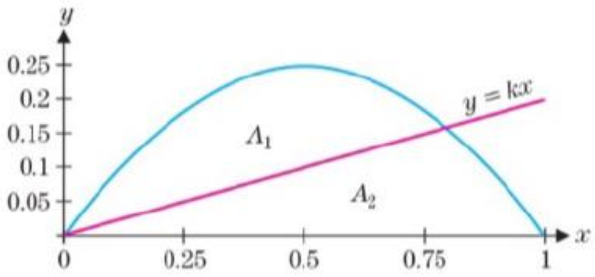
x (mm)	0	2.0	4.0	6.0	8.0
$f_s(x)$ (N)	0	300	1000	1800	3500
$f_r(x)$ (N)	0	150	700	1300	3500

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي يعيدها القوس.

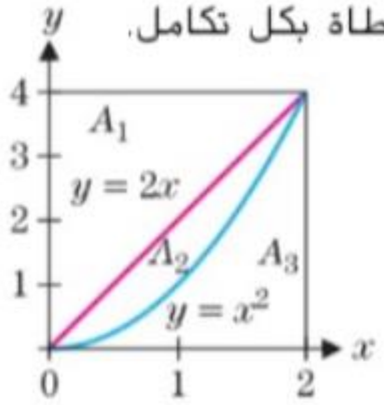
.37 لأجل $y = x - x^2$ كما هو مبين، أوجِد قيمة L بحيث تكون $A_1 = A_2$.



38. لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين. أوجد k بحيث تكون $.A_1 = A_2$



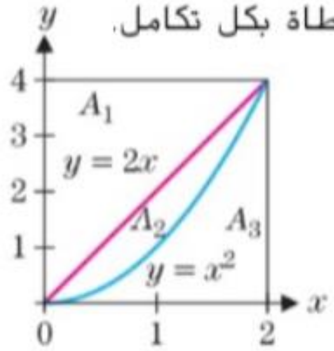
39. بدلالة A_1، A_2 و A_3، حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.



(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$

(b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

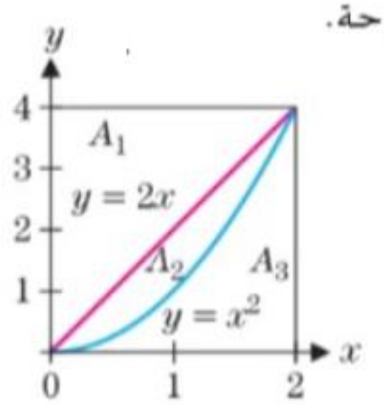
39. بدلالة A_1، A_2 و A_3، حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.



(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$

(d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\, dy$

40. أعط تكاملًا مساويًا لكل مساحة.



(a) $A_2 + A_3$

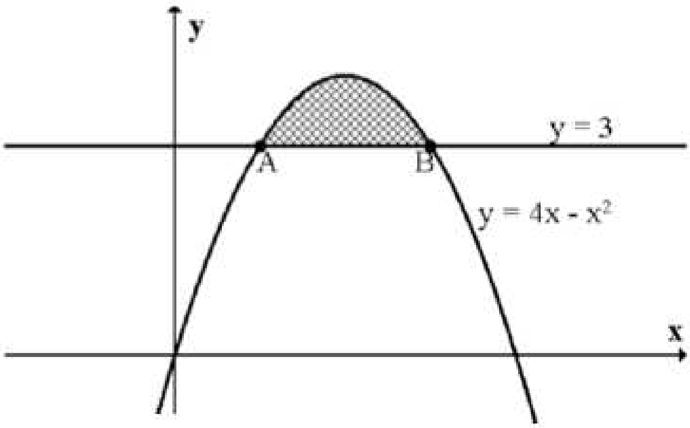
(b) $A_1 + A_2$

(c) A_1

(d) A_3

الشكل التالى يمثل المنحنيين

$$y = 4x - x^2 \ , y = 3$$

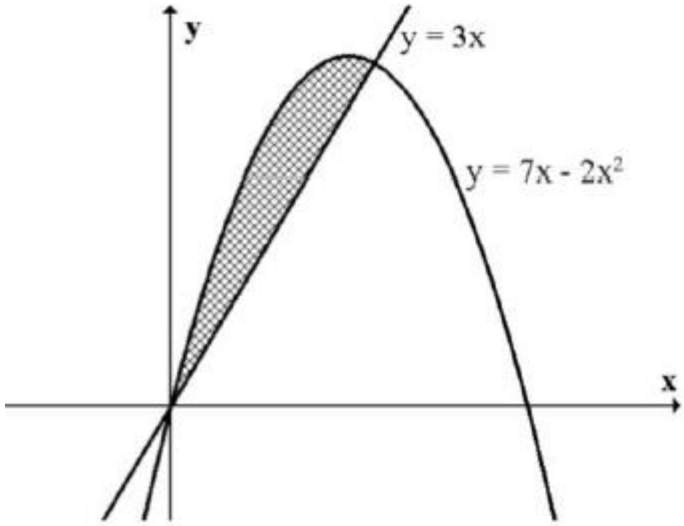


اوجد:

احداثيات النقاط A,B

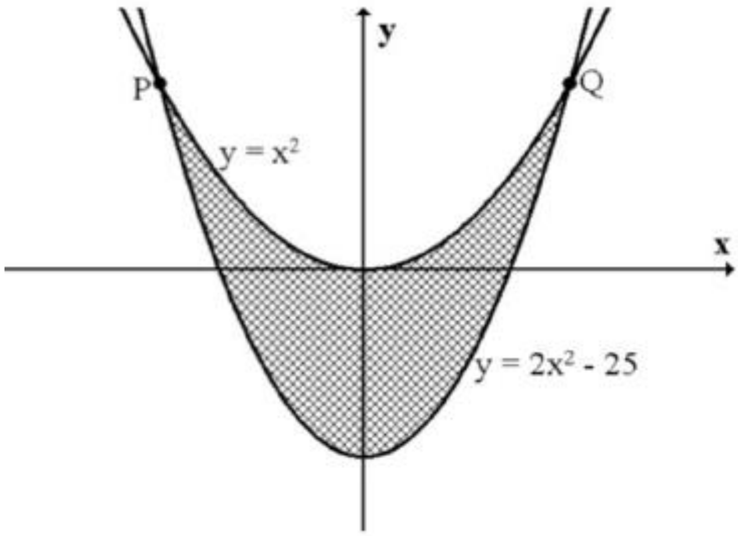
اوجد مساحة المنطقة المظللة

$$y = 3x \, , y = 7x - 2x^2$$



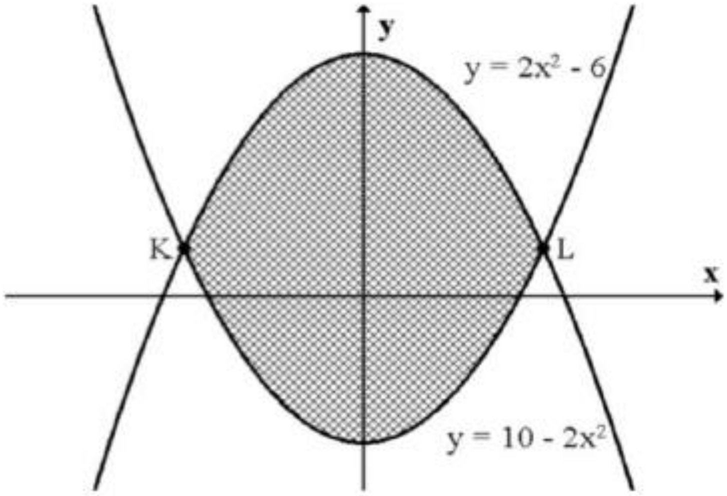
اوجد مساحة المنطقة المظللة

$$y = x^2 \ , y = 2x^2 - 25$$



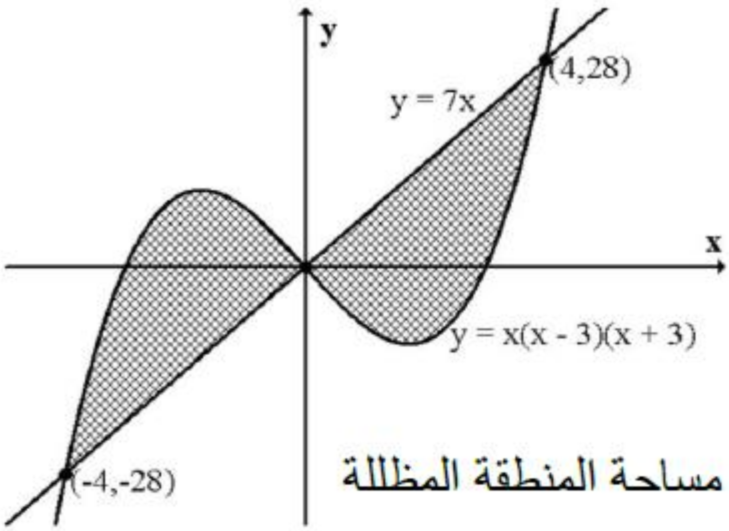
اوجد مساحة المنطقة المظللة

$$y = 10 - 2x^2 \, , y = 2x^2 - 6$$



اوجد مساحة المنطقة المظللة

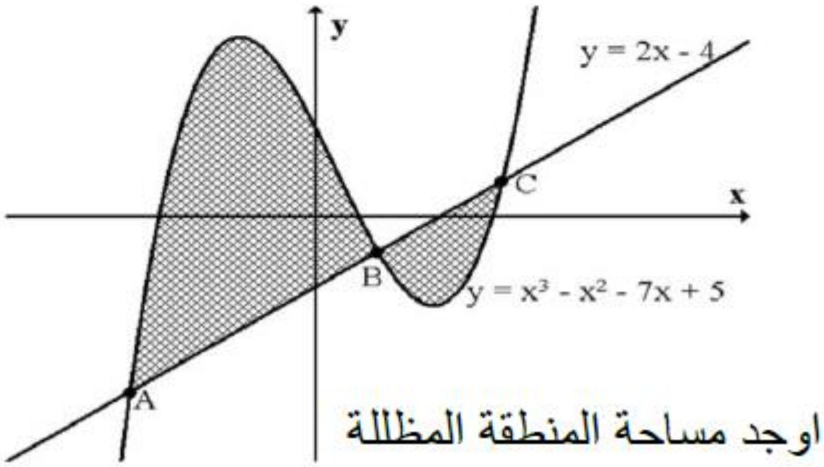
$$y = 7x \, , y = x(x-3)(x+3)$$



اوجد مساحة المنطقة المظللة

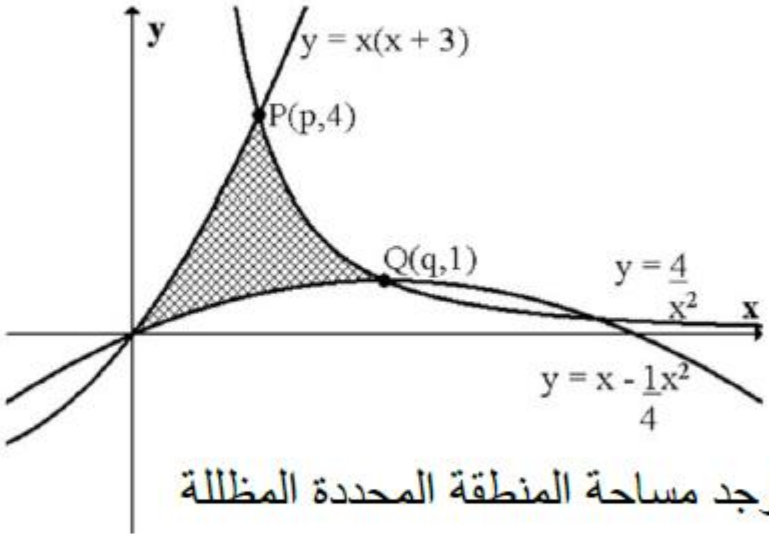
$$y = 2x - 4$$

$$y = x^3 - x^2 - 7x + 5$$



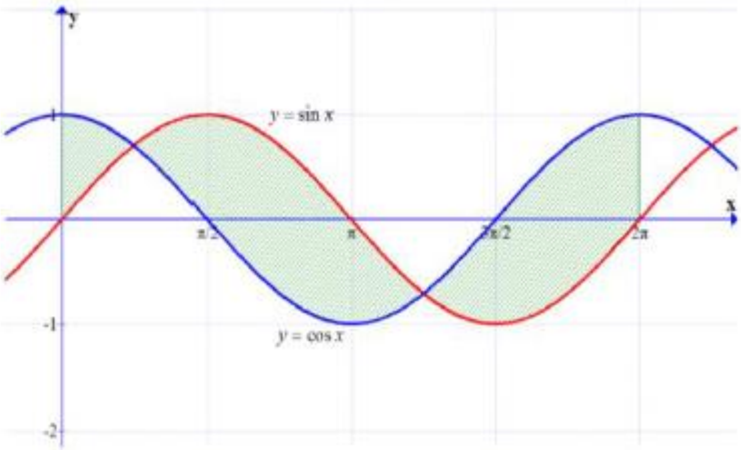
$$y = x(x+3)\ , y = \frac{4}{x^2}$$

$$y = x - \frac{1}{4}x^2$$



اوجد مساحة المنطقة المحددة المظللة

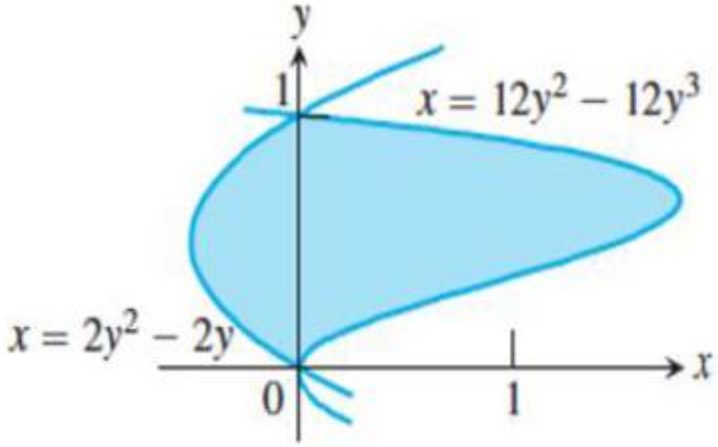
$$y = sinx \quad , y = cosx$$



اوجد مساحة المنطقة المحددة المظللة

$$x = 2y^2 - 2y$$

$$x = 12y^2 - 12y^3$$

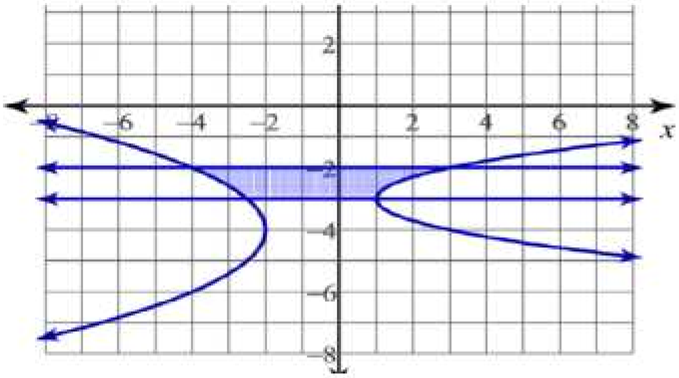


اوجد مساحة المنطقة المحددة المظللة

$$x = 2y^2 + 12y + 19$$

$$x = \frac{-y^2}{2} - 4y - 10$$

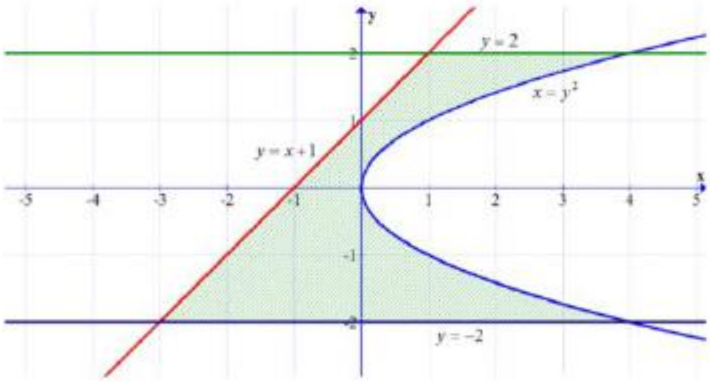
$$y = -3 \quad , y = -2$$



اوجد مساحة المنطقة المحددة المظللة

$$y = 2 \quad , \qquad y = -2$$

$$y = x + 1 \, , \qquad x = y^2$$



اوجد مساحة المنطقة المحددة المظللة

اوجد المساحة بين المنحنيين

$y = e^{-x}, y = x^2$

لكل $1 \leq x \leq 4$

اوجد المساحة بين المنحنيين

$$y = \frac{2}{x^2+1}\ , y = |x|$$

فى الفترة التى تحددها تقاطعات المنحنيين

اوجد قيمة t التى تجعل المساحة بين

$$y = \frac{2}{x+1} \, , y = \frac{2x}{x^2+1}$$

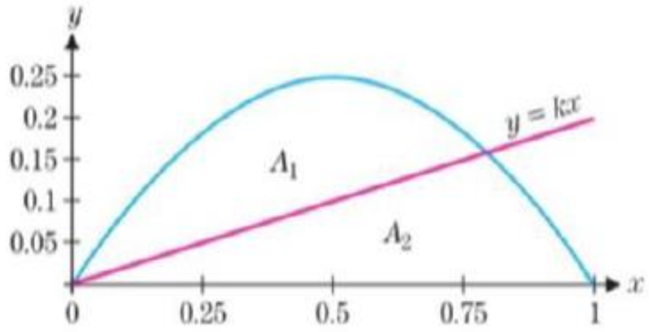
تساوى $ln\frac{3}{2}$

لكل $0 \leq x \leq t$

اوجد قيمة k التى

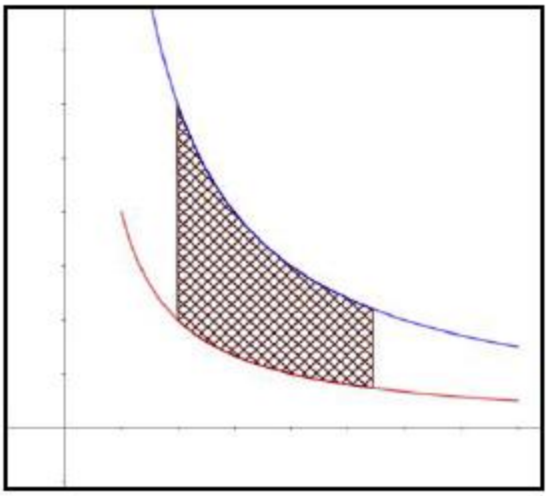
تجعل المساحة $A_1 = A_2$

بين $y = kx\ , y = x - x^2$



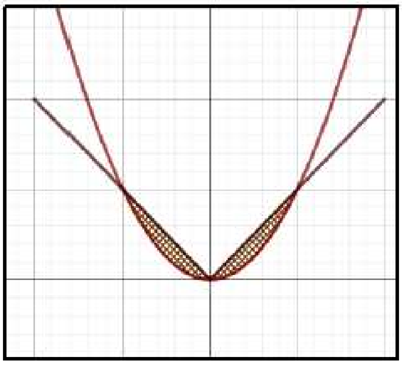
اذا كانت مساحة المنطقة
المحددة بالمنحنيات التالية

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{k}{x}$, $x = 1, x = e$ تساوى
2 وحدة مربعة فان قيمة k هى



a) 2 c) 4
b) 3 d) 5

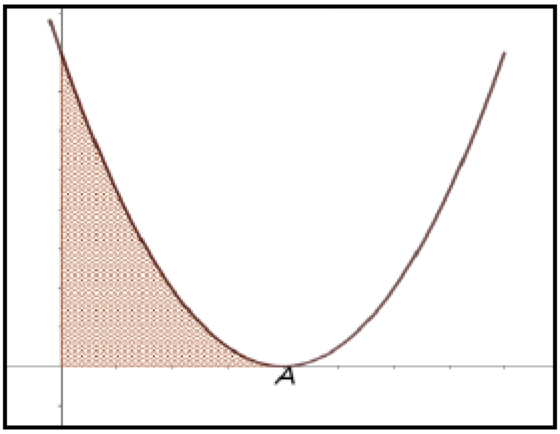
فى الشكل التالى مساحة المنطقة
المحددة بالمنحنيين $y = x^2 \, , y = |x|$
تساوى



a) $2\int_{-1}^{1}(x^2 - x)\, dx$ c) $2\int_{0}^{1}(x - x^2)\, dx$

b) $\int_{0}^{1}(x - x^2)\, dx$ d) $\int_{-1}^{1}(x - x^2)\, dx$

اذا كانت المساحة المظللة فى
الشكل التالى $y = (x - A)^2$ تساوى $\frac{8}{3}$ فان
قيمة A هى



a) 1
c) 1.5
b) 0.5
d) 2

مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات

$$y = 2x - 3 \,, y = x + 1 \,, x = 2$$

a) 2

b) 3

c) $\frac{9}{2}$

d) 6

مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات

$$y = \sqrt{x-2}\,, y = 2\,, y = 0$$

a) $\frac{16}{3}$

b) $\frac{20}{3}$

c) $\frac{15}{3}$

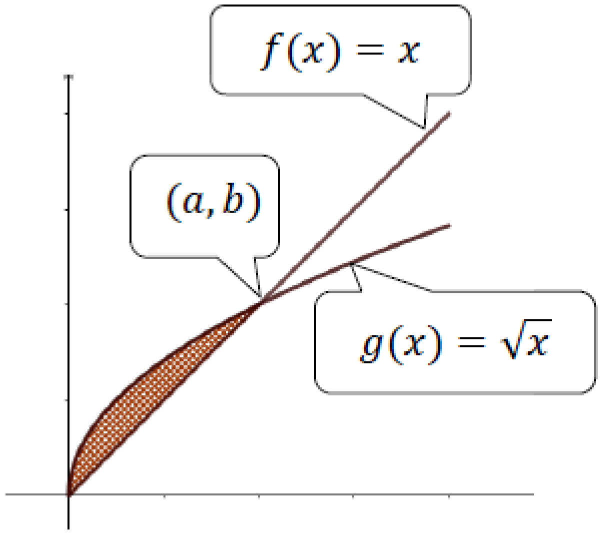
d) 0.5

مساحة المنطقة المحددة
بالمنحنى $xy = 4$ ومحور السينات
والمستقيمان $x = 1 , x = 3$ تساوى

a) $2\,ln3$
b) $4\,ln3$
c) $3\,ln3$
d) $3\,ln4$

$\int_0^a g(x)dx = 0.67$ اذا كان

فان مساحة المنطقة المظلله فى الشكل التالى هى



a) 0.67

c) 0.3

b) 0.6

d) 0.17

مساحة المنطقة المحددة

بالمنحنيات $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ حيث

$0 \leq x \leq 2$ هي

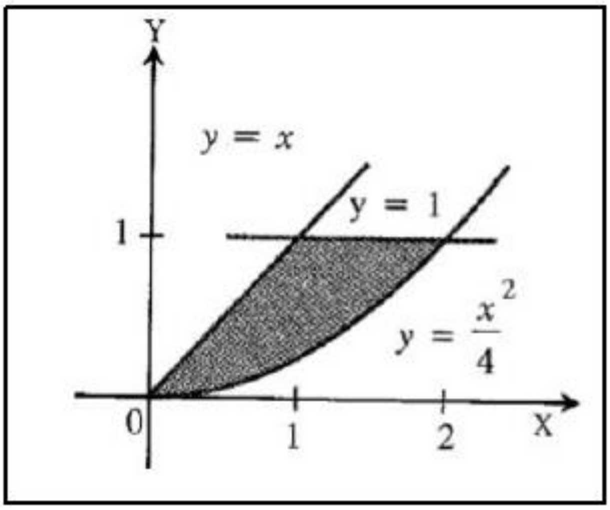
a) $\frac{20}{3}$

b) $\frac{8}{3}$

c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$

اى من التكاملات التاليه يعبر
عن مساحة المنطقة الموضحة فى الشكل التالى



a) $\int_0^2 x - \frac{x^2}{4}\, dx$

c) $\int_0^1 2\sqrt{y}\, dy - 0.5$

b) $\int_0^1 (4y^2 - y)\, dy$

d) $\int_0^1 y - \sqrt{4y}\, dy$

DEFINITION Area Between Curves

If f and g are continuous with $f(x) \geq g(x)$ throughout $[a, b]$, then the **area of the region between the curves $y = f(x)$ and $y = g(x)$ from a to b** is the integral of $(f - g)$ from a to b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

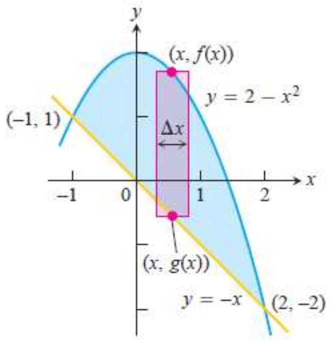


FIGURE 5.30 The region in Example 4 with a typical approximating rectangle.

EXAMPLE 4 Area Between Intersecting Curves

Find the area of the region enclosed by the parabola $y = 2 - x^2$ and the line $y = -x$.

Solution First we sketch the two curves (Figure 5.30). The limits of integration are found by solving $y = 2 - x^2$ and $y = -x$ simultaneously for x.

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x && \text{Equate } f(x) \text{ and } g(x). \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Rewrite.} \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 && \text{Factor.} \\ x = -1, \quad x &= 2. && \text{Solve.} \end{aligned}$$

The region runs from $x = -1$ to $x = 2$. The limits of integration are $a = -1$, $b = 2$.

The area between the curves is

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

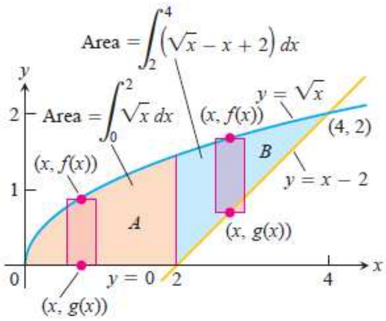


FIGURE 5.31 When the formula for a bounding curve changes, the area integral changes to become the sum of integrals to match, one integral for each of the shaded regions shown here for Example 5.

EXAMPLE 5 Changing the Integral to Match a Boundary Change

Find the area of the region in the first quadrant that is bounded above by $y = \sqrt{x}$ and below by the x-axis and the line $y = x - 2$.

Solution The sketch (Figure 5.31) shows that the region's upper boundary is the graph of $f(x) = \sqrt{x}$. The lower boundary changes from $g(x) = 0$ for $0 \leq x \leq 2$ to $g(x) = x - 2$ for $2 \leq x \leq 4$ (there is agreement at $x = 2$). We subdivide the region at $x = 2$ into subregions A and B, shown in Figure 5.31.

The limits of integration for region A are $a = 0$ and $b = 2$. The left-hand limit for region B is $a = 2$. To find the right-hand limit, we solve the equations $y = \sqrt{x}$ and $y = x - 2$ simultaneously for x:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 && \text{Equate } f(x) \text{ and } g(x). \\ x &= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 && \text{Square both sides.} \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{Rewrite.} \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{Factor.} \\ x = 1, \quad x &= 4. && \text{Solve.} \end{aligned}$$

Only the value $x = 4$ satisfies the equation $\sqrt{x} = x - 2$. The value $x = 1$ is an extraneous root introduced by squaring. The right-hand limit is $b = 4$.

For $0 \le x \le 2$: $\quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

For $2 \le x \le 4$: $\quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2$

We add the area of subregions A and B to find the total area:

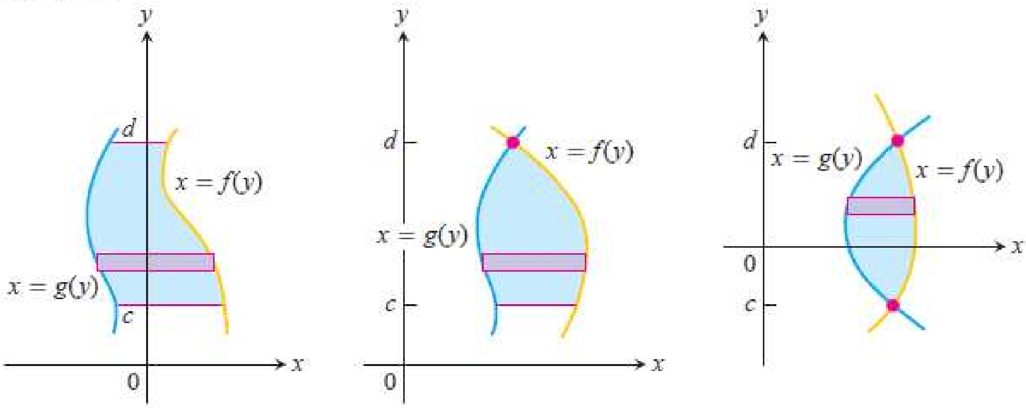
$$\text{Total area} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\,dx}_{\text{area of }A} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx}_{\text{area of }B}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right)$$

$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}.$$

For regions like these



use the formula $\quad A = \displaystyle\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$

In this equation f always denotes the right-hand curve and g the left-hand curve, so $f(y) - g(y)$ is nonnegative.

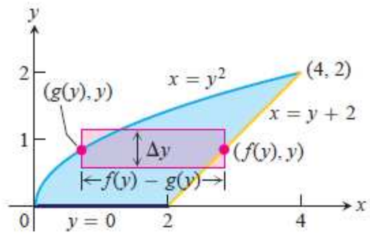


FIGURE 5.32 It takes two integrations to find the area of this region if we integrate with respect to x. It takes only one if we integrate with respect to y (Example 6).

EXAMPLE 6 Find the area of the region in Example 5 by integrating with respect to y.

Solution We first sketch the region and a typical *horizontal* rectangle based on a partition of an interval of y-values (Figure 5.32). The region's right-hand boundary is the line $x = y + 2$, so $f(y) = y + 2$. The left-hand boundary is the curve $x = y^2$, so $g(y) = y^2$. The lower limit of integration is $y = 0$. We find the upper limit by solving $x = y + 2$ and $x = y^2$ simultaneously for y:

$$
\begin{aligned}
y + 2 &= y^2 && \text{Equate } f(y) = y + 2 \text{ and } g(y) = y^2. \\
y^2 - y - 2 &= 0 && \text{Rewrite.} \\
(y + 1)(y - 2) &= 0 && \text{Factor.} \\
y = -1, \quad y &= 2 && \text{Solve.}
\end{aligned}
$$

The upper limit of integration is $b = 2$. (The value $y = -1$ gives a point of intersection *below* the x-axis.)

The area of the region is

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b [f(y) - g(y)]\,dy = \int_0^2 [y + 2 - y^2]\,dy \\
&= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,dy = \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\
&= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

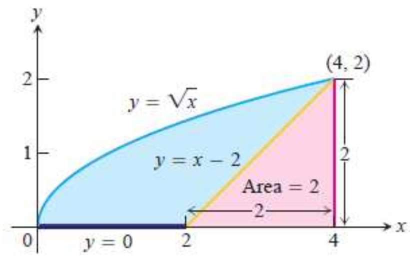


FIGURE 5.33 The area of the blue region is the area under the parabola $y = \sqrt{x}$ minus the area of the triangle (Example 7).

Combining Integrals with Formulas from Geometry

The fastest way to find an area may be to combine calculus and geometry.

EXAMPLE 7 The Area of the Region in Example 5 Found the Fastest Way

Find the area of the region in Example 5.

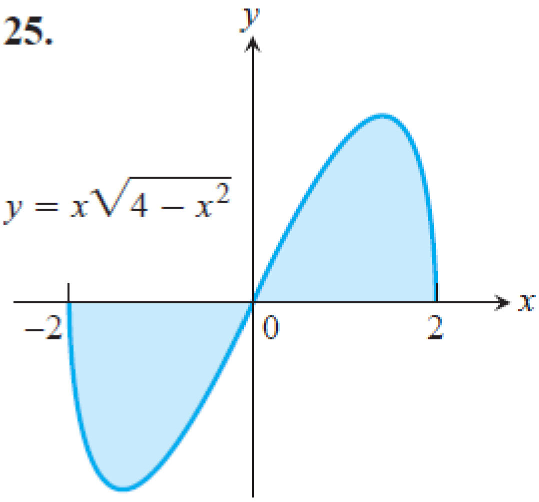
Solution The area we want is the area between the curve $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, and the x-axis, *minus* the area of a triangle with base 2 and height 2 (Figure 5.33):

$$
\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{2}(2)(2) \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\
&= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

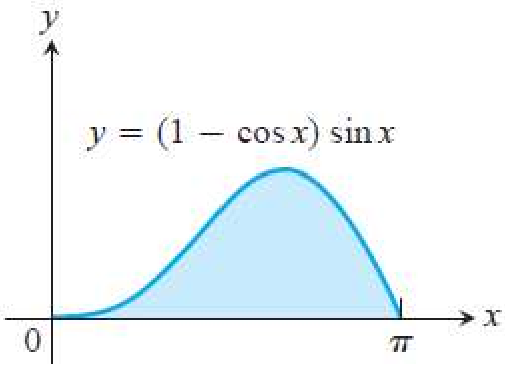
■

Find the total areas of the shaded regions in Exercises 25–40.

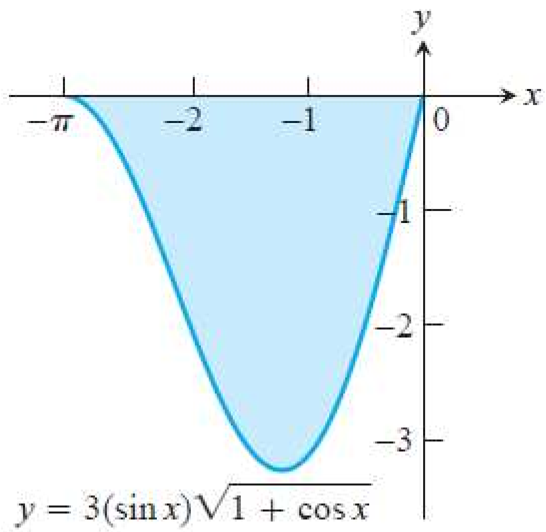
25.



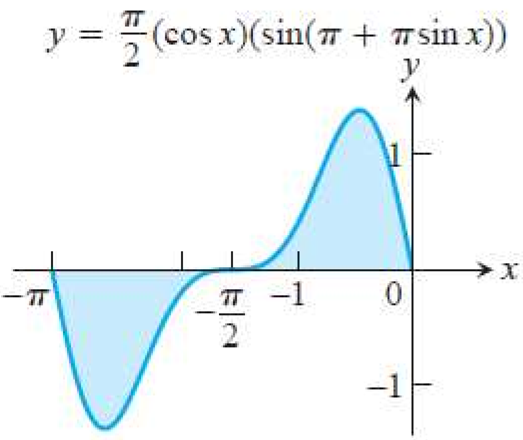
26.



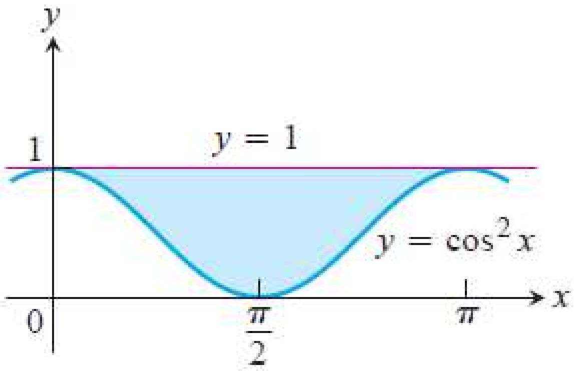
27.


y
x
$-\pi$
-2
-1
0
-1
-2
-3
$y = 3(\sin x)\sqrt{1 + \cos x}$

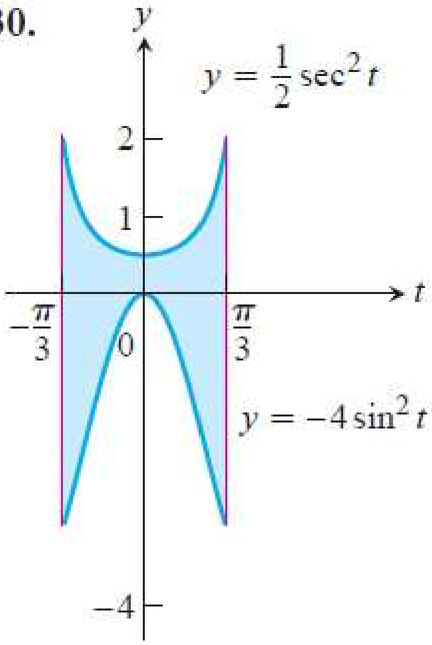
28.


$y = \frac{\pi}{2}(\cos x)(\sin(\pi + \pi \sin x))$
y
1
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
-1
0
-1

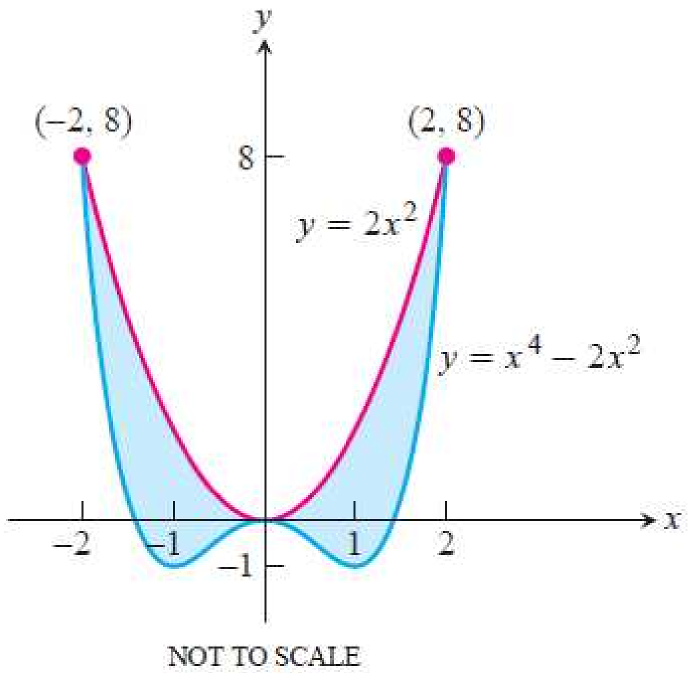
29.



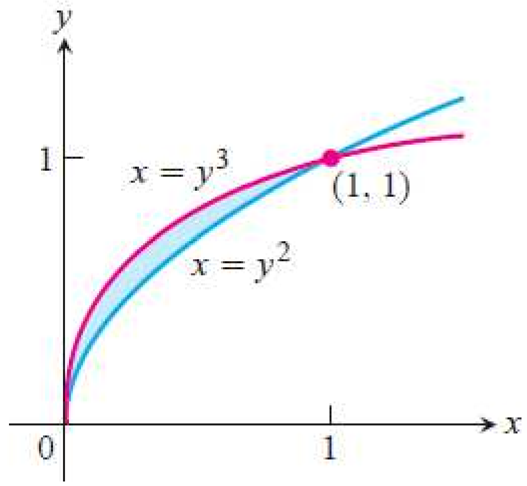
30.



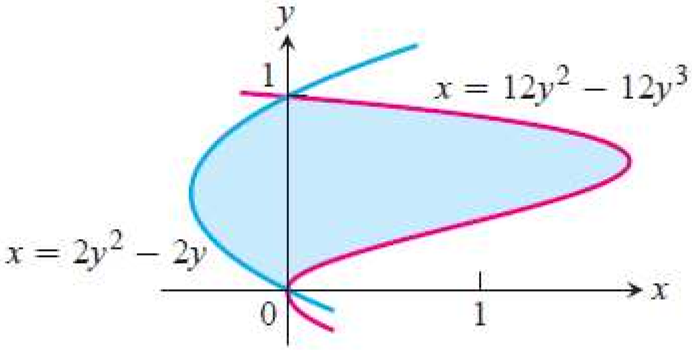
31.



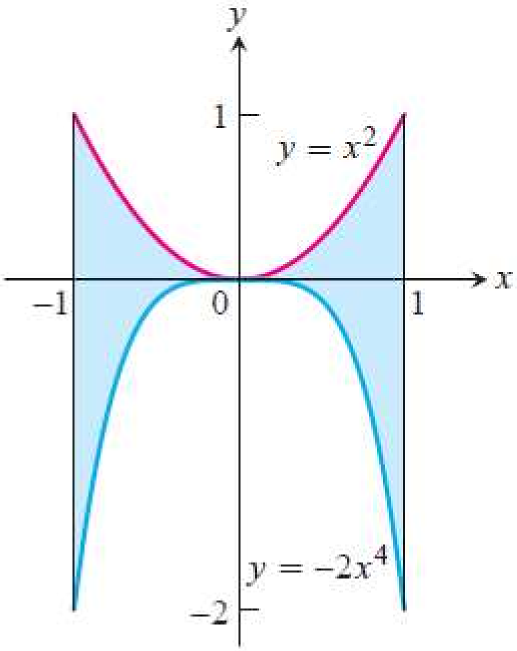
32.



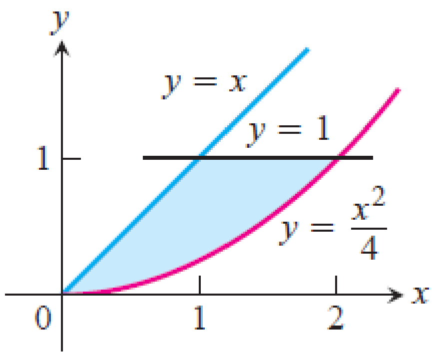
33.



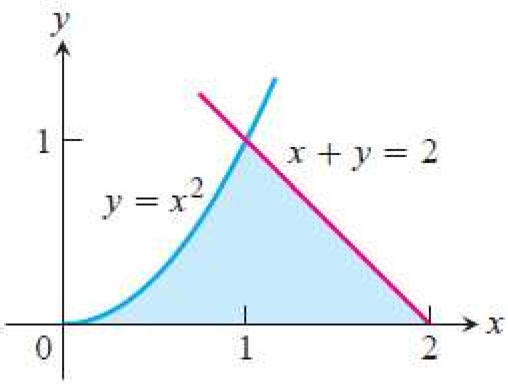
34.



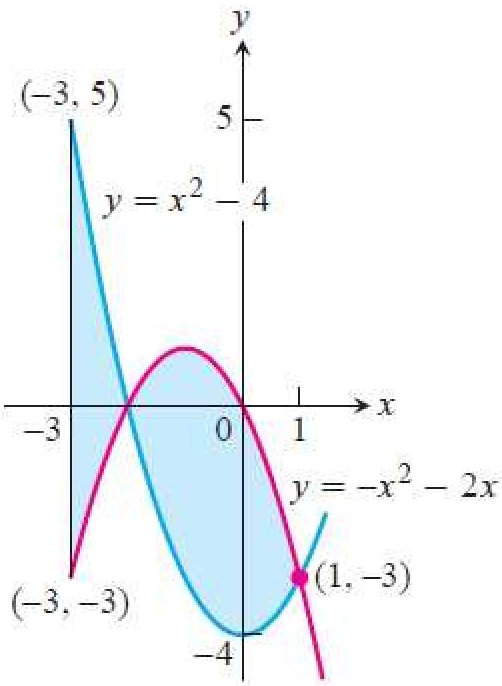
35.



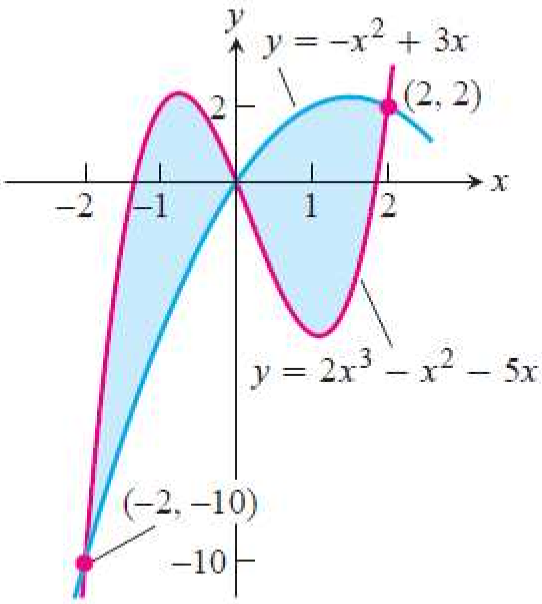
36.



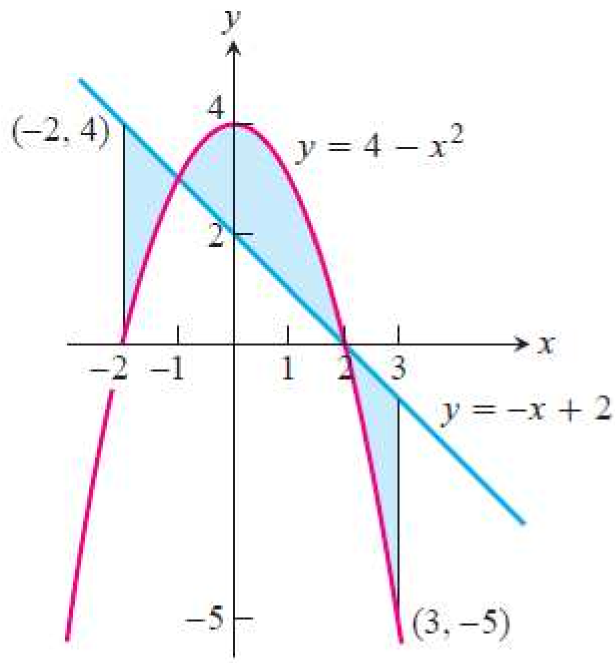
37.



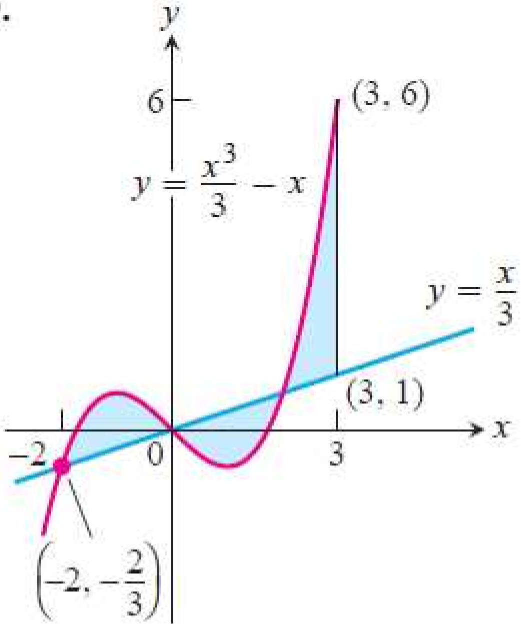
38.



39.



40.



Find the areas of the regions enclosed by the lines and curves in Exercises 41–50.

41. $y = x^2 - 2$ and $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ and $y = -3$

43. $y = x^4$ and $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ and $y = x$

45. $y = x^2$ and $y = -x^2 + 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ and $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ and $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, and $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ and $5y = x + 6$ (How many intersection points are there?)

50. $y = |x^2 - 4|$ and $y = (x^2/2) + 4$

Find the areas of the regions enclosed by the lines and curves in Exercises 51–58.

51. $x = 2y^2$, $x = 0$, and $y = 3$

52. $x = y^2$ and $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ and $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ and $x + 2y^2 = 3$

55. $x + y^2 = 0$ and $x + 3y^2 = 2$

56. $x - y^{2/3} = 0$ and $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ and $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ and $x = 2y$

Find the areas of the regions enclosed by the curves in Exercises 59–62.

59. $4x^2 + y = 4$ and $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ and $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ and $x + y^4 = 1$, for $x \geq 0$

62. $x + y^2 = 3$ and $4x + y^2 = 0$

Find the areas of the regions enclosed by the lines and curves in Exer cises 63–70.

63. $y = 2\sin x$ and $y = \sin 2x$, $0 \le x \le \pi$

64. $y = 8\cos x$ and $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \le x \le \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ and $y = 1 - x^2$

66. $y = \sin(\pi x/2)$ and $y = x$

67. $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad \text{and} \quad x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y \quad \text{and} \quad x = -\tan^2 y, \quad -\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}$ and $x = 0,\quad 0 \le y \le \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ and $y = x^{1/3},\quad -1 \le x \le 1$

71. Find the area of the propeller-shaped region enclosed by the curve $x - y^3 = 0$ and the line $x - y = 0$.

72. Find the area of the propeller-shaped region enclosed by the curves $x - y^{1/3} = 0$ and $x - y^{1/5} = 0$.

73. Find the area of the region in the first quadrant bounded by the line $y = x$, the line $x = 2$, the curve $y = 1/x^2$, and the x-axis.

74. Find the area of the "triangular" region in the first quadrant bounded on the left by the y-axis and on the right by the curves $y = \sin x$ and $y = \cos x$.

76. Find the area of the region between the curve $y = 3 - x^2$ and the line $y = -1$ by integrating with respect to **a.** x, **b.** y.

77. Find the area of the region in the first quadrant bounded on the left by the y-axis, below by the line $y = x/4$, above left by the curve $y = 1 + \sqrt{x}$, and above right by the curve $y = 2/\sqrt{x}$.

78. Find the area of the region in the first quadrant bounded on the left by the y-axis, below by the curve $x = 2\sqrt{y}$, above left by the curve $x = (y - 1)^2$, and above right by the line $x = 3 - y$.